

Белешке из Топологије А

1 Компактност

Дефиниција 1.1. Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ је компактан ако сваки покривач има коначни потпокривач.

Дефиниција 1.2. $A \subset X$ је компактан ако је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактан простор. Означимо са $\mathcal{K}_X = \{A \subset X \mid A \text{ је компакт}\}$.

Дефиниција 1.3. Фамилија $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ има својство коначног пресека ако свака коначна подфамилија има непразан пресек.

Став 1.1. Тополошки простор X је компактан ако свака фамилија затворених скупова која има својство коначног пресека има непразан пресек.

Последица 1.1. Ако је X компакт и $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ опадајућа фамилија непразних и затворених скупова, онда је $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Став 1.2. Ако је $f : X \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање и X компакт, онда је и $f(X)$ компакт.

Став 1.3. Ако је X компакт онда је $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

Став 1.4. Ако је X Хауздорфов, онда је $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$.

Последица 1.2. Ако је X компакт и Хауздорфов, онда је $\mathcal{F}_X = \mathcal{K}_X$.

Задатак 1.1. Испитати компактност следећих тополошких простора:

1. $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$, где је $\mathcal{S}$ Зоргенфрајева права;
2. $([0, 1], \mathcal{S}_{[0,1]})$;
3. $(X, \mathcal{T}_d)$;
4. $(X, \mathcal{T}_{cf})$.

Решење. 1. Покривач $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$ нема коначан потпокривач;

2. Покривач $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n}] \cup \{1\}$ нема коначан потпокривач;

3. Простор X је компактан ако је коначан. У супротном можемо узети покривач који се састоји само од тачака простора, који нема коначан потпокривач;

4. Нека је $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. За неко $\lambda_0 \in \Lambda$ важи $U_{\lambda_0} = X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Како је у питању покривач простора X , то за свако $x_1, \dots, x_n$ постоји $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ тако да је $x_i \in U_{\lambda_i}$, стога је $X = \bigcup_{i=0}^n U_{\lambda_i}$ па простор јесте компактан.

□

Дефиниција 1.4. Тополошки простор X је псеудокомпактан ако је свако непрекидно пресликавање $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ограничено.

Дефиниција 1.5. Тополошки простор X је пребројиво компактан ако сваки пребројиви отворени покривач има коначан потпокривач.

Напомена 1.1. Компактност $\Rightarrow$ Пребројива компактност $\Rightarrow$ Псеудокомпактност.

Задатак 1.2. 1. Ако је X пребројиво компактан онда је и псеудокомпактан. Докајати.

2. Простор $A \subset \mathbb{R}^n$ је компактан акко је псеудокомпактан. Доказати.

Решење. 1. Нека је $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање. $\{f^{-1}(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ јесте један пребројиви отворени покривач који има коначан потпокривач јер је X пребројиво компактан. Дакле $\exists n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ такви да $X \subseteq \bigcup_{i=1}^k f^{-1}(-n_i, n_i)$. Нека је даље $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Онда $X \subseteq f^{-1}(-n_0, n_0)$ тј. f је ограничена функција.

2. $\Rightarrow$: Нека је $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање. Онда је $f(A)$ компакт, па самим тим и ограничен.

$\Leftarrow$: Дефинишимо непрекидно пресликавање $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(a) = \|a\|$. Како је A псеудокомпактан, f је ограничено пресликавање, одакле је A ограничен. Потребно је још доказати да је A затворен.

Претпоставимо супротно, да A није затворен, $A \neq \bar{A}$ тј. $\exists a \in \bar{A} \setminus A$. Али онда је непрекидно пресликавање $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисано са $f(x) = \frac{1}{\|x-a\|}$ неограничено. Контрадикција. □

Ако је X Хауздорфов, онда:

1. $(\forall x_0 \in X)(\forall K \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\})(x_0 \notin K \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T}_X, x_0 \in U, K \subset V, U \cap V = \emptyset)$;

2. $(\forall K, L \in \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\})(K \cap L = \emptyset \Rightarrow (\exists U, V \in \mathcal{T}_X)(K \subset U, L \subset V, U \cap V = \emptyset))$.

3. Ако је X компакт, онда је и T_4 простор.

Напомена 1.2. Ако су $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ две топологије на простору X и $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ онда је $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$

Задатак 1.3. Нека је $(X, \mathcal{T})$ компакт и T_2 и нека су $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2$ две топологије на X . Доказати:

1. $(X, \mathcal{T}_1)$ није T_2 ;

2. $(X, \mathcal{T}_2)$ није компакт.

Решење. 1. Како је $(X, \mathcal{T})$ компакт и T_2 то је $\mathcal{K} = \mathcal{F}$, па како је $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}$ мора важити $\mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F}$.

Претпоставимо супротно, да $(X, \mathcal{T}_1)$ јесте T_2 . Онда је $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$. Али онда важи $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F} = \mathcal{K}$, па како је $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}$, важи и $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{K}_1$. Контрадикција.

2. Из $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_2$ следи $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{K}_2 \subsetneq \mathcal{K}$.

Ако претпоставимо супротно, да је $(X, \mathcal{T}_2)$ компакт, онда је $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{K}_2$, па би важило $\mathcal{K} = \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{K}_2$ тј. $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{K}_2$. Контрадикција. □

Задатак 1.4. Ако је $f : X \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање, X је компакт а Y Хауздорфов, онда је f јтворено пресликавање. Доказати.

Решење. Нека је $F \in \mathcal{F}_X$. Како је X компакт, то је $F \in \mathcal{K}_X$. Сада је $f(F)$ такође компакт а последично и затворен скуп, јер је Y Хауздорфов. □

Последица 1.3. Ако је $f : X \rightarrow Y$ непрекидна бијекција, X је компакт и Y T_2 простор, онда је f хомеоморфизам.

Задатак 1.5. Ако је X Хауздорфов, и $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}_X \setminus \{\emptyset\}$ опадајућа фамилија компактних скупова, онда је $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ непразан, затворен и компактан.

Решење. Како је X T_2 , то је $K_n \in \mathcal{F}_X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ка како је $K_n \subseteq K_1$ и K_1 компакт, то је $K_n \in \mathcal{F}_{K_1}$, па је $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Такође, како су сви K_n затворени, то је и $K \in \text{zatu}_X$. Додатно, важи да је $K \subseteq K_1$ па је K и компакт. $\square$

Вежба 1.1. За појашњење последњег дела задатка урадити следеће: Нека је X T_2 простор и нека је $K \in \mathcal{K}_X$. Ако је $L \subseteq K$, $L \in \mathcal{K}_K$ онда је и $L \in \mathcal{K}_X$. Доказати.

Лема 1.1. Нека је $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ опадајућа фамилија компактних подскупова простора X . Тада за свако $U \in \mathcal{T}_X$ такво да $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq U$ важи: $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq m \Rightarrow K_n \subseteq U)$.

Став 1.5. Нека је $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ опадајућа фамилија повезаних, непразних компактних подскупова простора X , где је X T_2 простор. Онда је $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ повезан и компактан.

Теорема 1.1. Нека су дати тополошки простори X и Y где је Y компактан. Тада је пресликавање $p_X : X \times Y \rightarrow X$ затворено.

Теорема 1.2. Простори X_1 и X_2 су компактни акко је $X_1 \times X_2$ компакт.

Задатак 1.6. Нека је $f : X \rightarrow Y$ пресликавање тополошких простора где је Y компакт и T_2 . Доказати да је f непрекидно акко је $\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X \times Y}$

Решење. $\Rightarrow$: Важи јер је Y T_2 простор.

$\Leftarrow$: Нека је $F \in \mathcal{F}_Y$. Ако је $\Gamma_f \in \mathcal{F}_{X \times Y}$, то је и $(X \times F) \cap \Gamma_f \in \mathcal{F}_{X \times Y}$. Додатно, p_X је ятворено пресликавање, па је $p_X((X \times F) \cap \Gamma_f) \in \mathcal{F}_X$. Коначно, приметимо да је $f^{-1}(F) = p_X((X \times F) \cap \Gamma_f)$ тј. $f^{-1}(F)$ је затворен тј. f је непрекидно. $\square$

Задатак 1.7. Нека је $f : X \rightarrow Y$ затворено и НА пресликавање, где притом важи $(\forall y \in Y)f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{K}_X$. Доказати:

1. Ако је X T_2 , онда је и Y T_2 простор;
2. Ако је $K \in \mathcal{K}_Y$, онда је $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$

Решење. 1. Нека су $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$. Како су $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in \mathcal{K}_X$ и X T_2 , онда $\exists U, V \in \mathcal{T}_X$ такви да $f^{-1}(y_1) \subseteq U$, $f^{-1}(y_2) \subseteq V$ и $U \cap V = \emptyset$. Даље, нека су $U' = f^c(U^c)$, $V' = f^c(V^c)$. Јасно је да $U', V' \in \mathcal{T}_Y$, $y_1 \in U'$, $y_2 \in V'$ и $U' \cap V' = \emptyset$ тј. Y је T_2 простор.

2. Нека је $K \in \mathcal{K}_Y$ и $f^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, где $U_\lambda \in \mathcal{T}_X$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

За $y \in K$ је $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Међутим, по услову задатка је $f^{-1}(y) \in \mathcal{K}_X$ па постоје $\lambda_1^y, \dots, \lambda_{n_y}^y \in \Lambda$ такви да $f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_y} U_{\lambda_i^y} =: U_y$. Сада је $K \subseteq \bigcup_{y \in K} f(U_y^c)^c$ отворен покривач од K па постоје $y_1, \dots, y_m \in K$ такви да $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m f(U_{y_j}^c)^c$.

Коначно, имамо да је $f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{j=1}^m f(U_{y_j}^c)^c) = \bigcup_{j=1}^m f^{-1}(f(U_{y_j}^c)^c) \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_{y_j} = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^{n_{y_j}} U_{\lambda_i^{y_j}}$ тј. $f^{-1}(K)$ је компакт. $\square$

Вежба 1.2. Доказати да је $f^{-1}(f(U_{y_j}^c)^c) \subseteq U_{y_j}$.

2 Локална компактност

Дефиниција 2.1. Тополошки простор X је локално компактан ако $(\forall x \in X)(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists H \in \mathcal{O}(x))$ такво да је $H \subseteq G$ и $H \in \mathcal{K}_X$.

Напомена 2.1. 1. Ако је X T_2 простор онда је X локално компактан акко $(\forall x \in X)(\exists N \in \mathcal{O}(x))(\overline{N} \in \mathcal{K}_X)$;

2. Ако је X компактен и T_2 онда је и локално компактан.

Задатак 2.1. Испитати локалну компактност следећих простора:

1. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$;
2. $(X, \mathcal{T}_d)$;
3. $(X, \mathcal{T}_a)$;
4. $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$, где је $\mathcal{L}$ топологија левих интервала.

Решење. 1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists \varepsilon > 0)$ тако да $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq G$. Онда можемо узети $H = [x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}]$;

2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall G \in \mathcal{O}(x)), H = \{x\} \in \mathcal{K}_X$;

3. Исто као у претходном случају;

4. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall G \in \mathcal{O}(x))(\exists a \in \mathbb{R})$ тако да $(-\infty, a) \subseteq G$. Можемо узети $H = (-\infty, \frac{a+x}{2}]$.

Јакључак: Сви простори су локално компактни. □

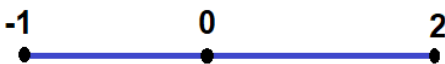
Вежба 2.1. Доказати да је за $x \in \mathbb{R}$, $H = (-\infty, x]$ компактан у $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

3 Компактификација

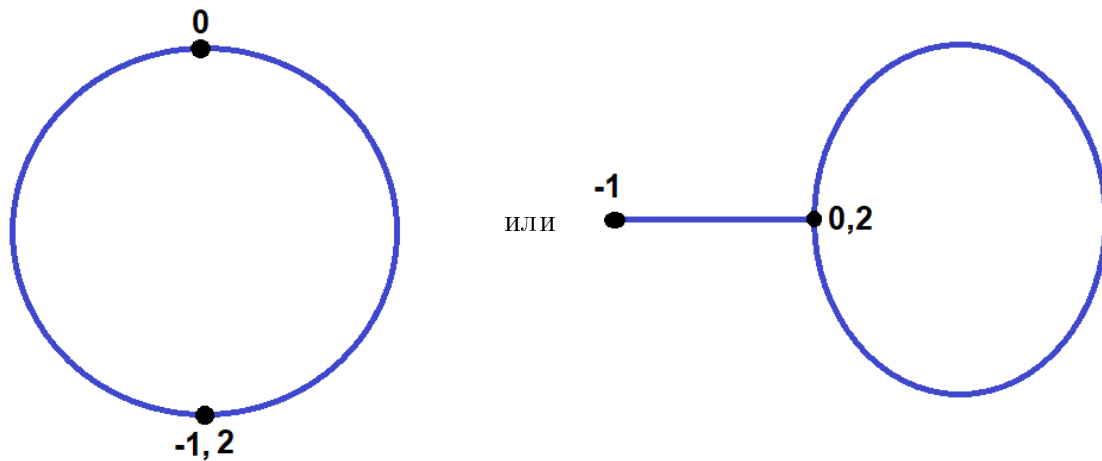
Компактификација је процес добијања компактног простора почев од некомпактног додавањем нових тачака. То можемо урадити на више начина.

Пример 3.1. Компактификујмо простор $X = (-1, 0) \cup (0, 2)$:

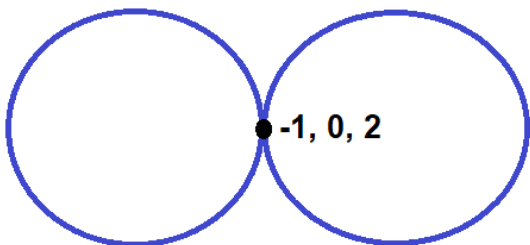
1. Додавањем 3 тачке



2. Додавањем 2 тачке



3. Додавањем 1 тачке



Напомена 3.1. Компактификација додавањем једне тачке даје простор који је јединствен до на хомеоморфизам.

4 Александровљева компактификација (једном тачком)

Од тополошког простора $(X, \mathcal{T})$ правимо компактан $(X^*, \mathcal{T}^*)$ додавањем једне тачке:

$$X^* = X \cup \{\omega\},$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{V \cup \{\omega\} \mid V \in \mathcal{T}, X \setminus V \in \mathcal{K}_X\}.$$

Особине 4.1. 1. $(X^*, \mathcal{T}^*)$ је компактан простор;

2. $(X, \mathcal{T}_X^*) = (X, \mathcal{T})$ тј. наслеђена топологија након компактификације иста је као и почетна топологија простора;

3. $(X, \mathcal{T})$ је отворен потпростор од $(X^*, \mathcal{T}^*)$.

Став 4.1. X^* је T_2 простор ако је X T_2 и локално компактан простор.

Задатак 4.1. Ако је X локално компактан и T_2 простор онда је X $T_3^{\frac{1}{2}}$ простор.

Решење. По претходном ставу је X^* T_2 , па како је и компактан то је он и T_4 , самим тиме и $T_3^{\frac{1}{2}}$. Како је X отворен потпростор од X^* то ће и он бити $T_3^{\frac{1}{2}}$. $\square$

Напомена 4.1. Ако су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори и $f : X \rightarrow Y$ пресликавање, онда f индукује пресликавање на компактификацији $f^* : X^* \rightarrow Y^*$. Притом важи

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ако } x \in X, \\ \omega_Y & \text{ако } x = \omega_X. \end{cases}$$

Међутим, ако је f непрекидно не мора да значи да ће и f^* бити.

Дефиниција 4.1. Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ је својствено ако је непрекидно и ако $(\forall K \in \mathcal{K}_Y)(f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X)$.

Задатак 4.2. Дато је пресликавање $f : X \rightarrow Y$. Доказати следеће:

1. Ако је f својствено, онда је f^* непрекидно;
2. Ако је f^* непрекидно и Y је $T2$ простор, онда је f својствено.

Решење. 1. Нека је $U \in \mathcal{T}_Y^*$.

(а) $\omega_Y \notin U$:

Онда је $(f^*)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_X^*$.

(б) $\omega_Y \in U$:

Нека је $U = V \sqcup \{\omega_Y\}$. Сада је $(f^*)^{-1}(U) = f^{-1}(V) \sqcup \{\omega_X\}$, при чему $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Даље је $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V) \in \mathcal{K}_X$ јер је f својствено. Одавде следи да скуп $(f^*)^{-1}(U)$ јесте отворен у X^* тј. f^* јесте непрекидно.

2. Како је f^* непрекидно, то је и $f = f^*|_X$ непрекидно пресликавање.

Нека је $K \in \mathcal{K}_Y$. Како је Y $T2$ простор, то је $K \in \mathcal{F}_Y$, па је $Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y$ и $Y \setminus K \sqcup \{\omega_Y\} \in \mathcal{T}_Y^*$.

Даље, како је f^* непрекидно, имамо да је $(f^*)^{-1}(Y \setminus K \sqcup \{\omega_Y\}) = f^{-1}(Y \setminus K) \sqcup \{\omega_X\} = X \setminus f^{-1}(K) \sqcup \{\omega_X\} \in \mathcal{T}_X^*$, па по дефиницији мора да буде $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$ тј. f је својствено.

□

Теорема 4.1. Ако је $X \approx Y$, онда је и $X^* \approx Y^*$.

Задатак 4.3. Ако је X компактан и $T2$ простор онда за $x_0 \in X$ важи $(X \setminus \{x_0\})^* \approx X$. Доказати.

Решење. Нека је $X_0 = X \setminus \{x_0\}$.

Дефинишимо пресликавање $f : X_0^* \rightarrow X$ са

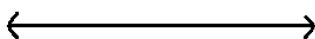
$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ако } x \neq \omega, \\ x_0 & , \text{ако } x = \omega. \end{cases}$$

f је бијективно пресликавање, и биће непрекидно (показује се слично као у претходном задатку). Додатно, $f : X_0^* \rightarrow X$ је пресликавање из компакта у $T2$ простор па мора бити затворено пресликавање тј. f је хомеоморфизам. □

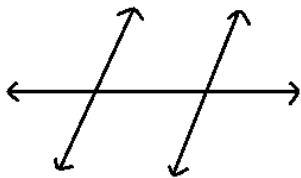
Вежба 4.1. Показати да је $f = f^*|_X$ непрекидно (из другог дела претходног задатка).

Задатак 4.4. Нађи компактификацију једном тачком простора X ако је:

1. $X = \mathbb{R}^n$;
2. X представља три отворене дужи (заобљен део на крају указује на отворени део)



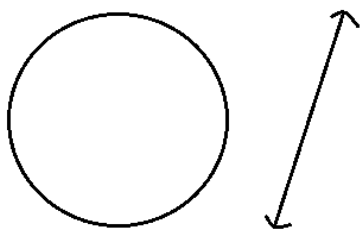
3. X :



4. X је полураван



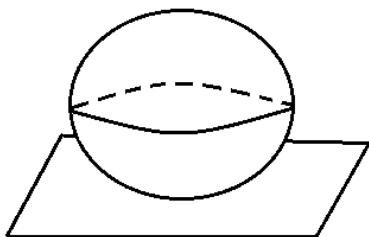
5. X :



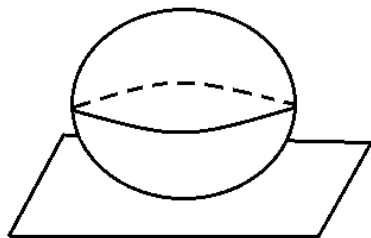
6. X :



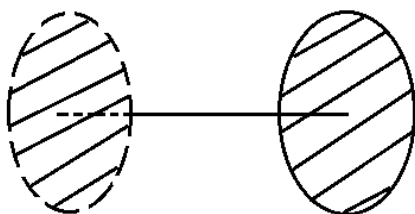
7. X :



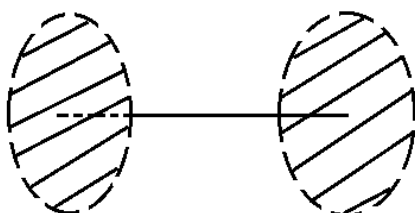
8. X :



9. X :



10. X :

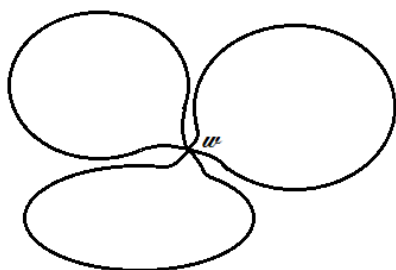


11. $X = S^1 \times \mathbb{R}$;

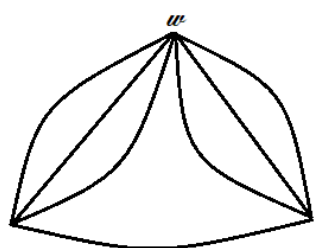
12. $X = S^2 \setminus \{A, B, C\}$ (где су A , B и C неке три тачке са сфере).

Решење. 1. $(\mathbb{R}^n)^* \approx (S^n \setminus \{*\})^* \approx S^n$;

2. X^* :

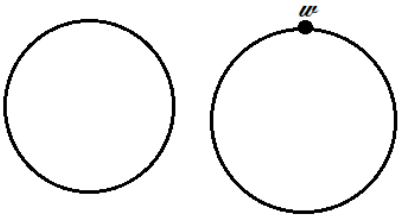


3. X^* :

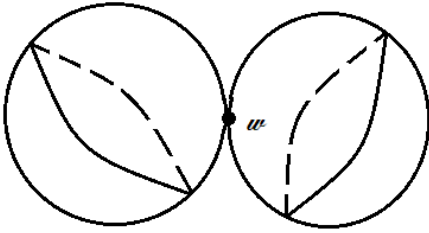


4. $X \approx (D^2 \setminus \{*\})^* \approx D^2$;

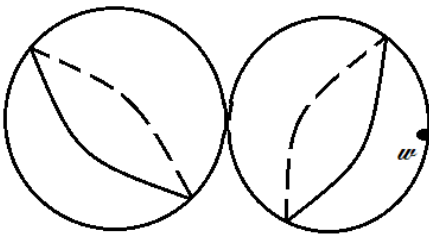
5. X^* :



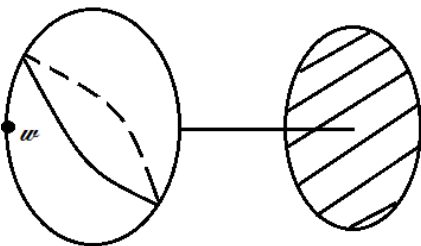
6. X^* :



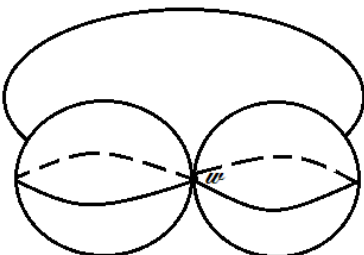
7. X^* :



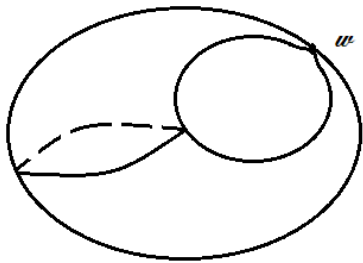
8. X^* :



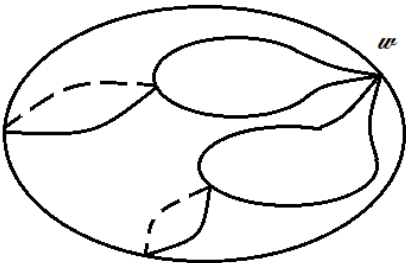
9. X^* :



10. X^* :



11. X^* :



□

5 Линделефовост, сепарабилност, I и II аксиома пребројивости

Нека је дат тополошки простор $(X, \mathcal{T})$.

Дефиниција 5.1. X је Линделефов ако сваки отворени покривач има пребројив потпокривач.

Став 5.1. X је Линделефов ако свака фамилија са својством пребројивог пресека има непразан пресек.

Дефиниција 5.2. X је сепарабилан ако постоји $D \subseteq X$ који је пребројив и свуда густ у X тј. $\overline{D} = X$.

Дефиниција 5.3. X задовољава I аксиому пребројивости ако за свако $x \in X$ постоји пребројива локална база $\mathcal{B}_x$ тј. $(\exists \mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}_x)(\forall U \in \mathcal{T}_x)(x \in U \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B}_x)(x \in B \subseteq U))$.

Дефиниција 5.4. X задовољава II аксиому пребројивости ако има пребројиву базу.

Напомена 5.1. Ако X задовољава II аксиому пребројивости онда задовољава и I аксиому пребројивости, сепарабилан је и Линделефов.

Вежба 5.1. Доказати тврђење из напомене.

Задатак 5.1. Доказати да је $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ Линделефов, сепарабилан, задовољава I аксиому сепарабилности, али не и II .

Решење. I аксиома: за $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{[x, x + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ је пребројива локална база.

Сепарабилност: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Не задовољава II аксиому: Нека је $\mathcal{B}$ произвољна база од $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. За $x \in \mathbb{R}$ постоји елемент базе $B_x \in \mathcal{B}$ такав да $x \in B_x \subseteq [x, x + 1)$.

Дефинишимо функцију $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$, $x \mapsto B_x$. Тврдимо да је F $1-1$ пресликавање.

Нека је $x \neq y$ и (без умањења општости) $x < y$. Онда $x \notin B_y$ одакле следи $B_x \neq B_y$ тј. F је $1-1$.

Коначно, како је $\mathbb{R}$ непребројив, а F $1-1$, то ће и $\mathcal{B}$ бити непребројив.

Линделефовост: Нека је $\mathbb{R} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ отворен (у $\mathcal{S}$) покривач.

Онда за свако $x \in \mathbb{R}$ $\exists \lambda_x \in \Lambda$ и $\exists b_x \in \mathbb{R}$ тако да $x \in [x, b_x] \subseteq U_{\lambda_x}$. Нека је $A = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x, b_x)$.

Идеја: $\mathbb{R} = A \cup A^c$. Урадимо следеће:

1. Нађемо пребројив покривач скупа A ;
 2. Докажемо да је A^c пребројив. Самим тим има пребројив покривач.
 3. Искомбинујемо прве две ставке за доказ тврђења.
1. Сваки $(x, b_x) \in \mathcal{U}$, где је $\mathcal{U}$ уобичајена топологија, која задовољава II аксиому пребројивости, стога A има пребројив покривач тј. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (x_i, b_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\lambda_{x_i}}$.
 2. За свако $x \in \mathbb{R}$ $\exists q_x \in (x, b_x) \cap \mathbb{Q}$.
Дефинишимо функцију $g : A^c \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto q_x$. Треба да покажемо да је g $1-1$ пресликавање.
Претпоставимо супротно, да постоје $x, y \in A^c$, $x \neq y$ и $q_x = q_y$. Нека је даље, без умањења општости $x < y$. Али онда би морало да важи $y \in (x, b_x)$ тј. $y \in A$, што је контрадикција. Ово повлачи да функција g јесте $1-1$ тј. да скуп A^c јесте пребројив.

□

Напомена 5.2. 1. Својство задовољавати I и II аксиому пребројивости јесте наследно.

2. Линделефовост је слабо наследно својство. Другим речима, ако је X Линделефов и $A \subset X$, $A \in \mathcal{F}_x$, онда је A Линделефов.

Став 5.2. Ако је (M, d) метрички простор, онда је M сепарабилан ако M задовољава II аксиому пребројивости.

Вежба 5.2. Доказати претходни став.

Пример 5.1. 1. $\mathbb{R}^n$ није компактан али јесте Линделефов јер је метрички простор и сепарабилан је $(\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n)$.

2. $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ није метризабилан.
Ако би био метризабилан, онда би по претходном ставу задовољавао II аксиому пребројивости (јер је сепарабилан), што смо показали да није тачно.

Задатак 5.2. Дат је метрички простор (M, d) . Ако је M Линделефов доказати да задовољава II аксиому пребројивости.

Решење. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Како је M Линделефов, то покривач $M \subseteq \bigcup_{x \in M} B(x, \frac{1}{n})$ има пребројиви потпокривач тј. $M \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B(x_{n,m}, \frac{1}{n})$.

Лако се види да онда $\mathcal{B} = \{B(x_{n,m}, \frac{1}{n}) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ јесте једна пребројива база од M тј. M задовољава II аксиому пребројивости. □

Лема 5.1. Дат је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. Нека је $x \in X$ и нека је $\mathcal{B}_x$ локална база од x . Тада је $\bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} B = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ x \in U}} U$.

Задатак 5.3. Ако је X небројив, онда $(X, \mathcal{T}_{cc})$ не задовољава II аксиому пребројивости.

Решење. Претпоставимо супротно, $\forall x \in X$ постоји пребројива локална база $\mathcal{B}_x$.

Онда важи $\bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} B = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ x \in U}} U = \{x\}^c$ јер за $y \neq x$ $\{y\}^c \in \mathcal{T}_{cc}$.

Али онда је $\bigcup_{B \in \mathcal{B}_x} B^c = X \setminus \{x\}$ где је скуп са леве стране пребројива унија пребројивих скупова, дакле и сам пребројив, док је скуп на десној страни небројив. Контрадикција. □

Задатак 5.4. Нека је X тополошки простор и нека су $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ две топологије на X такве да је $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Проверити:

1. Ако је $(X, \mathcal{T}_1)$ сепарабилан, онда је и $(X, \mathcal{T}_2)$ сепарабилан.
2. Ако је $(X, \mathcal{T}_2)$ сепарабилан, онда је и $(X, \mathcal{T}_1)$ сепарабилан.
3. Ако $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава I аксиому пребројивости, онда и $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава I аксиому пребројивости.
4. Ако $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава I аксиому пребројивости, онда и $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава I аксиому пребројивости.
5. Ако $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава II аксиому пребројивости, онда и $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава II аксиому пребројивости.
6. Ако $(X, \mathcal{T}_2)$ задовољава II аксиому пребројивости, онда и $(X, \mathcal{T}_1)$ задовољава II аксиому пребројивости.
7. Ако је $(X, \mathcal{T}_1)$ Линделефов, онда је и $(X, \mathcal{T}_2)$ Линделефов.
8. Ако је $(X, \mathcal{T}_2)$ Линделефов, онда је и $(X, \mathcal{T}_1)$ Линделефов.

Решење. 1. Нетачно. Пример: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{U}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_d$.

2. Тачно.

3. Нетачно. Пример: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{cc}$.

4. Нетачно. Пример: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{cc}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_d$.

5. Нетачно. Пример: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{U}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{S}$.

6. Нетачно. Пример: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{cf}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{U}$.

7. Нетачно. Пример: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{U}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_d$.

8. Тачно.

□

Вежба 5.3. У претходном задатку утврдити ставке које су тачне (тј. написати доказ).

Задатак 5.5. Ако је X регуларан и Линделефов онда је он и нормалан. Доказати.

Решење. Нека су $A, B \in \mathcal{F}_X \setminus \{\emptyset\}$, $A \cap B = \emptyset$, и нека је $x \in A$.

Одавде $x \in B^c$ па из услова регуларности имамо да $\exists U_x \in \mathcal{T}$ тако да $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq B^c$.

Слично, за $y \in B$, $\exists V_y \in \mathcal{T}$, $y \in V_y \subseteq \overline{V_y} \subseteq A^c$.

Сада имамо отворене покриваче $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$, $B \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y$. Како су (из слабе наследности) A и B Линделефови простори, то ови покривачи имају пребројиве потпокриваче, тј. $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, $B \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$.

Нека је $Y_1 = U_1 \setminus \overline{V_1}$, $Y_2 = U_2 \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2})$, $Y_3 = U_3 \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \overline{V_3})$,...

Дефинишимо $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i \in \mathcal{T}$. Како је $A \cap \overline{V_k} = \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{N}$, то је $A \subseteq U$.

Слично, нека је $W_1 = V_1 \setminus \overline{U_1}$, $W_2 = V_2 \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2})$,...

Дефинишимо $V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} W_j \in \mathcal{T}$. Као малопре, важиће $V \subseteq B$.

Остало је још проверити да ли је $U \cap V = \emptyset$?

Претпоставимо супротно, $\exists a \in U \cap V$. Другим речима, $\exists k, l \in \mathbb{N}$ такви да $a \in Y_k$, $a \in W_l$. Нека је, без умањења општости $k \geq l$. Онда $a \in Y_k = U_k \setminus (\overline{V_1} \cup \dots \cup \overline{V_l} \cup \dots \cup \overline{V_k})$ тј. $a \notin \overline{V_l}$. Али, $a \in W_l = V_l \setminus (\overline{U_1} \cup \dots \cup \overline{U_l})$ тј. $a \in V_l$, Контрадикција. □

6 Количнички простори

Дефиниција 6.1. Пресликавање $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ је количничко ако је НА и ако за свако $B \subseteq Y$ важи да је $B \in \mathcal{T}_Y$ акко $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

Пример 6.1. Пресликавање $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ је непрекидно, НА, али није количничко.

Став 6.1. Нека су дата пресликавања $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ где је f количничко. Тада је g непрекидно акко је $g \circ f$ непрекидно.

Задатак 6.1. Нека су $p : X \rightarrow Y$ и $f : Y \rightarrow X$ непрекидна пресликавања таква да је $p \circ f = 1_Y$. Тада је p количничко. Доказати.

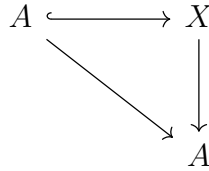
Решење. Како је $1_Y = p \circ f$ НА пресликавање, то исто мора да важи и за p .

Додатно, p је непрекидно.

Нека је $B \subseteq Y$ такво да $p^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$. Сада је $B = 1_Y^{-1}(B) = (p \circ f)^{-1}(B) = f^{-1} \circ p^{-1}(B)$. Како је $p^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ и f непрекидно, то је $f^{-1} \circ p^{-1}(B) \in \mathcal{T}_Y$ тј. $B \in \mathcal{T}_Y$. Овим је доказ завршен. $\square$

Дефиниција 6.2. Нека је $A \subseteq X$. Пресликавање $r : X \rightarrow A$ је ретракција ако је непрекидно и ако $(\forall a \in A) r(a) = a$.

Напомена 6.1. Нека је $i_A : A \hookrightarrow X$ инклузија. Приметимо да је $i_A \circ r = 1_A$ тј. r је количничко (из претходног задатка).



Дефиниција 6.3. $A \subseteq X$ је ретракт ако постоји ретракција $r : X \rightarrow A$.

Задатак 6.2. Нека је $p : X \rightarrow Y$ количничко, Y повезан и за свако $y \in Y$, $p^{-1}(y)$ је повезан. Тада је и X повезан. Доказати

Решење. Нека је $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ непрекидно пресликавање. Дефинишимо пресликавање $g : Y \rightarrow \{0, 1\}$ на следећи начин:

$g(y) = f(x)$ за $p(x) = y$. p је НА пресликавање, па овакво x увек постоји.

Да ли је g добро дефинисано?

$p^{-1}(y)$ је повезан, па је $f|_{p^{-1}(y)} = \text{const}$. Стога $g(y)$ не зависи од избора $x \in p^{-1}(y)$.

Сада имамо да је $f = g \circ p$, па како је f непрекидно, а p количничко, то је и g непрекидно (по ставу).

Даље, како је Y повезан, то је $g = \text{const}$ па из $f = g \circ p$ имамо да је и $f = \text{const}$ тј. X је повезан. $\square$

Дефиниција 6.4. Нека је X тополошки простор, Y скуп и $f : X \rightarrow Y$ НА пресликавање. Количничка топологија на Y дефинишемо као $\mathcal{T}_Y = \{u \subseteq Y \mid f^{-1}(u) \in \mathcal{T}_X\}$. То је најфинија топологија на Y таква да је f непрекидно пресликавање.

Напомена 6.2. 1. Ако је $\sim$ релација еквиваленције на простору X , онда имамо природну пројекцију $\pi : X \rightarrow X/\sim$, $x \mapsto [x]$.

Дефинишимо топологију на $X/\sim$ као количничку топологију. $X/\sim$ је количнички простор.

2. Ако је X тополошки простор и $A \subseteq X$ онда имамо релацију еквиваленције $\sim$ на X дату са $x \sim y$ ако $x = y$ или $x, y \in A$. Тада дефинишемо $X/A := X/\sim$.

Пример 6.2. 1. $X/X \approx *$;

2. $D^2/S^1 \approx S^2$;

3. $[0, 3]/\{1, 2, 3\} \approx S^1 \vee S^1 \vee S^1$.

Напомена 6.3. Ако су X и Y тополошки простори и $f : X \rightarrow Y$ непрекидно пресликавање, онда имамо релацију еквиваленције $\sim$ на X задату са $x \sim y$ ако $f(x) = f(y)$. Дефинишемо $X/f := X/\sim$.

Пример 6.3. Нека је $X = \mathbb{R}^2$. Дефинишемо релацију еквиваленције $\sim$ на X дату са $(x, y) \sim (z, w)$ ако $x - z, y - w \in \mathbb{Z}$.

$X/\sim \approx T^2$ тј. $X/\sim$ је хомеоморфан торусу.

Пример 6.4. Пројективни простори:

$\mathbb{R}P^n := S^n/\sim$, где је $x \sim -x$;

Или еквивалентно:

$\mathbb{R}P^n := \overline{D^n}/\sim$, где је $x \sim x$ за $x \in D^n$ и $x \sim -x$ за $x \in \partial D^n$.