

Задаци за домаћи из Алгебарске топологије 2024/25

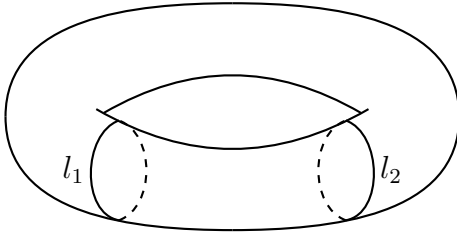
Задатак 1. Нека је $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ тачан низ. Тада постоји природан изоморфизам $A \cong \text{Ker}(f)$.

Задатак 2. Дат је морфизам ланчастих комплекса $\varphi_* : C_* \rightarrow D_*$, где су $d_*^C : C_* \rightarrow C_{*-1}$, $d_*^D : D_* \rightarrow D_{*-1}$, редом диференцијали од C_* и D_* . Нека је $E_n = C_{n-1} \oplus D_n$ и $d_n^E : E_n \rightarrow E_{n-1}$ дато са $d_n^E(a, b) = (-d_{n-1}^C(a), \varphi_{n-1}(a) + d_n^D(b))$ за свако $n \in \mathbb{Z}$. Доказати да је (E_*, d_*^E) ланчасти комплекс.

Задатак 3. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека су $f, g : S^n \rightarrow S^n$ непрекидне функције такве да је $|\deg(f)| \neq |\deg(g)|$. Тада постоји тачка $x_0 \in S^n$ таква да је $\angle(\overline{Of(x_0)}, \overline{Og(x_0)}) = \frac{7\pi}{25}$. Доказати.

Задатак 4. Доказати да на S^{2n} за $n \in \mathbb{N}$ не постоји непрекидно поље тангентних правих.

Задатак 5. Нека су l_1 и l_2 кружнице на торусу T^2 као на слици:



Одредити хомологију простора:

1. $X = T^2/(l_1 \cup l_2)$;
2. $Y = (T^2/l_1)/l_2$.

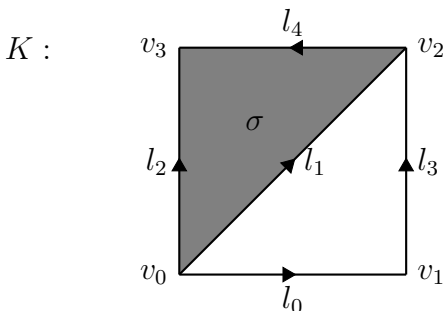
Задатак 6. Простор X добијен је од кружнице S^1 лепљењем две 2-ћелије помоћу пресликавања степена 2 и 3.

1. Одредити хомологију простора X .
2. Да ли је S^1 ретракт од X ?

Задатак 7. Нађи тополошки простор X такав да је $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ за } n = 0 \\ \mathbb{Z}_5 & , \text{ за } n = 11 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & , \text{ за } n = 22 \\ 0 & , \text{ иначе} \end{cases}$.

Напомена: За наредна два задатка прочитати (нпр. у Хечеру) о симплицијалној хомологији.

Задатак 8. Израчунати симплицијалну хомологију наредног симплицијалног комплекса:



Задатак 9. Нека је σ n -симплекс, $K = K(\sigma)$ и $K^{(m)} = \{\tau \in K \mid \dim \tau \leq m\}$ m -скелет од K . Наћи хомологију симплицијалног комплекса $K^{(m)}$.

Задатак 10. Нека је Абелова група и природни бројеви. Доказати:

1. $G \otimes \mathbb{Z} \cong G$;
2. $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$, $d = NZD(n, m)$;
3. $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Q} \cong 0$.

Задатак 11. Израчунај $H_n(X; \mathbb{Z}_3)$, где је X тополошки простор из задатка 7.

Задатак 12. Израчунај $H_n(\mathbb{R}P^3 \times N_4)$.

Задатак 13. Доказати да не постоје $n, m, l \in \mathbb{N}_0$ такви да је $S^l \simeq S^n \times S^m$.