# Uvod u matematičku logiku — 3. čas

Skupovi, skupovne operacije i karakteristične funkcije

## Skupovi i skupovne operacije

### 1. Osnovni pojmovi i oznake

**Skup** je kolekcija objekata koje nazivamo njegovim **elementima**. Oznaka $x \in A$ znači da je $x$ element skupa $A$, a $x \notin A$ da nije. Redosled navođenja elemenata nije bitan, a ponavljanje istog elementa ne menja skup. Na primer, $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\}$.

**Prazan skup**, označen sa $\varnothing$, nema nijedan element. Kada koristimo komplement, podrazumevamo da su svi posmatrani skupovi podskupovi istog **univerzalnog, odnosno ambijentalnog skupa** $U$. U zadacima u kojima je $X$ nepoznati skup, slovo $U$ ćemo koristiti za univerzalni skup da ne bismo mešali te dve uloge.

**Podskup i jednakost skupova.** Kažemo da je $A$ **podskup** skupa $B$ ako je svaki element skupa $A$ ujedno element skupa $B$:

$$A \subseteq B \quad \iff \quad \forall x \in U \ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ova oznaka dopušta i slučaj $A = B$. Ako dodatno važi $A \neq B$, onda je $A$ pravi podskup skupa $B$, što pišemo $A \subsetneq B$. Skupovi su jednaki ako imaju iste elemente:

$$\begin{aligned} A = B \quad &\iff \quad \forall x \in U \ (x \in A \iff x \in B) \\ &\iff \quad A \subseteq B \ \text{ i } \ B \subseteq A. \end{aligned}$$

Zato jednakost skupova možemo dokazati na dva načina: dokazivanjem obe inkluzije ili pokazivanjem da proizvoljan element pripada levoj strani ako i samo ako pripada desnoj strani.

Za svaki skup $A$ važi $\varnothing \subseteq A$ i $A \subseteq A$. Prva tvrdnja sledi iz toga što ne postoji element praznog skupa koji bi mogao da prekrši uslov za podskup. Logički, implikacija sa netačnom pretpostavkom je tačna.

**Osnovne skupovne operacije.** Za $A, B \subseteq U$ definišemo:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in U \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}, && \text{unija,} \\ A \cap B &= \{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}, && \text{presek,} \\ A \setminus B &= \{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}, && \text{razlika,} \\ A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A), && \text{simetrična razlika,} \\ A^c &= U \setminus A, && \text{komplement u skupu } U. \end{aligned}$$

U uniji je dovoljno da element pripada bar jednom skupu, a dozvoljeno je da pripada i oboma. U preseku mora pripadati oboma. U simetričnoj razlici mora pripadati *tačno jednom* od ta dva skupa. Zato takođe važi

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \qquad A \setminus B = A \cap B^c.$$

Skupovi $A$ i $B$ su **disjunktni** ako nemaju zajedničkih elemenata, odnosno ako je $A \cap B = \varnothing$.

**Osnovne osobine.** Sledeće jednakosti važe za proizvoljne skupove $A, B, C \subseteq U$:

| | |
|---|---|
| Idempotentnost: | $A \cup A = A, \qquad A \cap A = A.$ |
| Komutativnost: | $A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$ |
| Asocijativnost: | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ |
| Distributivnost: | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$<br>$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$ |
| De Morganovi zakoni: | $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$<br>$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$ |
| Prazan i univerzalni skup: | $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing,$<br>$A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$ |
| Komplement: | $A \cup A^c = U, \quad A \cap A^c = \varnothing,$<br>$(A^c)^c = A.$ |

Presek je sadržan u svakom od skupova, a svaki od skupova je sadržan u njihovoj uniji:

$$A \cap B \subseteq A, \qquad A \cap B \subseteq B, \qquad A \subseteq A \cup B, \qquad B \subseteq A \cup B.$$

Posebno su korisne ekvivalencije

$$A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B.$$

**Prevođenje na jezik iskazne logike.** Za jedan fiksiran, ali proizvoljan element $y \in U$ označimo iskaze

$$a : (y \in A), \qquad b : (y \in B), \qquad c : (y \in C).$$

Njihove istinitosne vrednosti su 1 za tačno i 0 za netačno. Oznake $\wedge$, $\vee$ i $\neg$ znače redom *i*, *ili* i *negaciju*. Oznaka $\iff$ znači *ako i samo ako*. **Isključivo ili**, označeno sa $\veebar$, definišemo ekvivalencijom:

$$a \veebar b \iff (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b).$$

Ona je tačna kada su vrednosti $a$ i $b$ različite. Tako članstvo u $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $A \triangle B$ odgovara redom formulama $a \vee b$, $a \wedge b$, $a \wedge \neg b$ i $a \veebar b$.

**Tablica istinitosti** proverava sve kombinacije istinitosnih vrednosti. Dve formule su ekvivalentne ako imaju istu vrednost u svakom redu. Kod skupovne jednačine dodatno uvodimo iskaz $\xi : (y \in X)$. Tražimo formulu $\xi = \xi(a, b)$, odnosno $\xi = \xi(a, b, c)$, koja članstvo u nepoznatom skupu izražava preko članstva u datim skupovima. Za svaki izbor ulaznih vrednosti tražimo vrednost $\xi$ za koju su leva i desna strana jednačine jednake.

**Oznake u tablicama.** Sa $w_i$ označavamo valuaciju iz $i$-tog reda. Za dva iskazna slova redosled ulaznih vrednosti biće:

$$(w_1(a), w_1(b)) = (0, 0), \quad (w_2(a), w_2(b)) = (0, 1),$$
$$(w_3(a), w_3(b)) = (1, 0), \quad (w_4(a), w_4(b)) = (1, 1).$$

Za tri slova koristimo redom trojke $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$, označene sa $w_1, \ldots, w_8$. Oznaka $\widehat{w_i}(G)$ predstavlja vrednost formule $G$ pri valuaciji $w_i$.

U zadacima sa nepoznatim skupom pišemo $v_i = \widehat{w_i}(\xi) \in \{0, 1\}$ za **nepoznatu vrednost** tražene formule u tom redu. Dakle, $w_i$ je valuacija, a $v_i$ njen izlaz na formuli $\xi$. Zapis $\neg v_i$ označava suprotnu vrednost: 1 ako je $v_i = 0$, odnosno 0 ako je $v_i = 1$. Najpre u tablici ostavljamo vrednosti $v_i$ nepoznatim, pa ih određujemo iz uslova zadatka. Konačna kolona daje zavisnost $\xi$ od ulaza $a, b$, odnosno $a, b, c$. Ako je u nekom redu dozvoljeno više izlaznih vrednosti, to predstavlja slobodu pri izboru rešenja.

**Disjunktivna normalna forma (DNF)** je disjunkcija konjunkcija iskaza i njihovih negacija. Iz potpune tablice može se dobiti tako što za svaki red u kome je rezultat 1 napišemo konjunkciju koja opisuje baš taj red, a zatim te konjunkcije spojimo sa $\vee$. Na primer, red $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ odgovara izrazu $\neg a \wedge b \wedge c$, odnosno skupu $A^c \cap B \cap C$.

## 2. Zadaci sa skupovnim operacijama

**Zadatak 1.** Dokazati da za sve skupove $A, B, C$ važi

$$\boxed{A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).}$$

**Rešenje.** Leva strana sadrži elemente koji pripadaju skupu $A$ i tačno jednom od skupova $B, C$. Desna strana sadrži elemente koji pripadaju tačno jednom od skupova $A \cap B$ i $A \cap C$. Ako element ne pripada skupu $A$, ne pripada nijednoj strani. Ako pripada skupu $A$, oba uslova svode se na to da pripada tačno jednom od skupova $B, C$. Ovim je već objašnjena suština dokaza.

Da bismo ga zapisali pomoću logičkih ekvivalencija, za proizvoljan $y \in U$ označimo $a : (y \in A)$, $b : (y \in B)$ i $c : (y \in C)$. Treba dokazati

$$a \wedge (b \veebar c) \quad \Longleftrightarrow \quad (a \wedge b) \veebar (a \wedge c).$$

Stavimo $L = a \wedge (b \veebar c)$ i $R = (a \wedge b) \veebar (a \wedge c)$, a $F = L \leftrightarrow R$. Za svaku valuaciju $w_i$ izračunavamo obe strane i vrednost $v_i = \widehat{w_i}(F)$. Potpuna tablica glasi:

| $w_i$ | $a$ | $b$ | $c$ | $b \veebar c$ | $a \wedge b$ | $a \wedge c$ | $L$ | $R$ | $v_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $w_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $w_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $w_4$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $w_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $w_6$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $w_7$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $w_8$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

U zaglavljima $a, b, c, L, R$ podrazumevamo vrednosti pri valuaciji navedenoj u prvom stupcu. Kolone $L$ i $R$ jednake su u svim redovima, pa je $v_1 = v_2 = \cdots = v_8 = 1$. Formula $F$ je, dakle, tautologija. Prema tome,

$$\begin{aligned} y \in A \cap (B \triangle C) &\Longleftrightarrow a \wedge (b \veebar c) \\ &\Longleftrightarrow (a \wedge b) \veebar (a \wedge c) \\ &\Longleftrightarrow y \in (A \cap B) \triangle (A \cap C). \end{aligned}$$

Pošto ovo važi za svaki $y$, posmatrani skupovi su jednaki.

**Zadatak 2.** Dokazati ekvivalenciju

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad \Longleftrightarrow \quad C \subseteq A.}$$

**Rešenje.** Dokazujemo oba smera.

*Prvi smer.* Pretpostavimo da je $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$. Za proizvoljan $y \in C$ važi $y \in (A \cap B) \cup C$. Zbog pretpostavljene jednakosti tada je $y \in A \cap (B \cup C)$, pa posebno $y \in A$. Dakle, svaki element skupa $C$ pripada skupu $A$, odnosno $C \subseteq A$. Isti argument kraće možemo zapisati:

$$C \subseteq (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \subseteq A.$$

*Drugi smer.* Pretpostavimo da je $C \subseteq A$. Tada je $A \cap C = C$, jer presecanjem sa $A$ ne gubimo nijedan element skupa $C$. Po distributivnosti dobijamo

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C.$$

Time je ekvivalencija dokazana. Uslov $C \subseteq A$ potreban je zato što leva strana sadrži samo elemente iz $A$, dok se na desnoj strani ceo skup $C$ neposredno dodaje uniji.

**Provera tablicom.** Za iskaze članstva $a, b, c$ stavimo $L = a \wedge (b \vee c)$, $D = (a \wedge b) \vee c$ i $F = L \leftrightarrow D$. U svakom redu označimo $v_i = \widehat{w_i}(F)$:

| $w_i$ | $a$ | $b$ | $c$ | $L$ | $D$ | $v_i$ | $c \to a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $w_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $w_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $w_4$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $w_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $w_6$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $w_7$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $w_8$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Dakle, $v_2 = v_4 = 0$, a ostale vrednosti $v_i$ jednake su 1. Kolone $v_i$ i $c \to a$ podudaraju se: jednakost članstava važi tačno kada važi implikacija $c \to a$. Da bi skupovi bili jednaki, ovaj uslov mora važiti za svaki element $y \in U$, što upravo znači $C \subseteq A$.

**Zadatak 3.** Za date skupove $A, B$ rešiti jednačinu po nepoznatom skupu $X$:

$$A \cup X = (A \cap X) \triangle B.$$

**Rešenje.** Za proizvoljan $y \in U$ uvedimo iskaze $a : (y \in A)$, $b : (y \in B)$ i $\xi : (y \in X)$. Tražimo formulu $\xi = \xi(a, b)$: njena istinitosna vrednost treba da bude određena vrednostima $a$ i $b$. Skupovna jednačina zahteva da za svaki $y$ bude istinita formula

$$F = (a \vee \xi) \leftrightarrow \big((a \wedge \xi) \veebar b\big).$$

Za četiri valuacije ulaza $a, b$ označimo nepoznate izlaze sa

$$v_1 = \xi(0,0), \quad v_2 = \xi(0,1), \quad v_3 = \xi(1,0), \quad v_4 = \xi(1,1).$$

Ovde $\xi(0,1)$ znači vrednost tražene formule kada je $a = 0$ i $b = 1$; to je isto što i $\widehat{w_2}(\xi)$. Najpre popunjavamo tablicu pomoću nepoznatih vrednosti $v_i$:

| $w_i$ | $a$ | $b$ | $\xi(a,b)$ | $a \vee \xi$ | $a \wedge \xi$ | $(a \wedge \xi) \veebar b$ | $\widehat{w_i}(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | 0 | 0 | $v_1$ | $v_1$ | 0 | 0 | $\neg v_1$ |
| $w_2$ | 0 | 1 | $v_2$ | $v_2$ | 0 | 1 | $v_2$ |
| $w_3$ | 1 | 0 | $v_3$ | 1 | $v_3$ | $v_3$ | $v_3$ |
| $w_4$ | 1 | 1 | $v_4$ | 1 | $v_4$ | $\neg v_4$ | $\neg v_4$ |

Jednakost dveju strana zahteva vrednost 1 u poslednjoj koloni. Iz redova redom dobijamo uslove

$$\neg v_1 = 1, \qquad v_2 = 1, \qquad v_3 = 1, \qquad \neg v_4 = 1,$$

odnosno

$$\boxed{v_1 = v_4 = 0, \qquad v_2 = v_3 = 1.}$$

Sada izdvojimo konačnu tablicu tražene formule:

| $w_i$ | $a$ | $b$ | $\xi(a,b)=v_i$ |
|---|---|---|---|
| $w_1$ | 0 | 0 | 0 |
| $w_2$ | 0 | 1 | 1 |
| $w_3$ | 1 | 0 | 1 |
| $w_4$ | 1 | 1 | 0 |

Van oba skupa $A, B$ element ne sme biti u $X$; u $B \setminus A$ mora biti u $X$; u $A \setminus B$ takođe mora biti u $X$; u preseku $A \cap B$ ne sme biti u $X$. Dobijene vrednosti $0, 1, 1, 0$ upravo su vrednosti formule $a \veebar b$. Zato je $\xi(a,b) \Leftrightarrow a \veebar b$. Zato je jedino moguće rešenje

$$\boxed{X = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).}$$

*Provera.* Za $X = A \triangle B$ važi

$$A \cup X = A \cup B, \qquad A \cap X = A \setminus B.$$

Skupovi $A \setminus B$ i $B$ su disjunktni, pa je njihova simetrična razlika jednaka uniji. Stoga

$$(A \cap X) \triangle B = (A \setminus B) \triangle B = (A \setminus B) \cup B = A \cup B = A \cup X.$$

Dakle, pronađeni skup zaista zadovoljava jednačinu. Jedinstvenost sledi iz toga što je u svakom redu tablice vrednost $\xi$ određena.

**Zadatak 4.** Za date skupove $A, B, C$ rešiti jednačinu

$$(A \cap B) \cup X = (A \cap B \cap X) \cup C,$$

uz dodatni uslov

$$A \cap B \cap C \subseteq X.$$

**Rešenje pomoću tablice istinitosti.** Za proizvoljan $y \in U$ označimo članstva u $A, B, C, X$ sa $a, b, c, \xi$. Ovde tražimo formulu $\xi = \xi(a,b,c)$. Stavimo

$$L = (a \wedge b) \vee \xi, \qquad D = (a \wedge b \wedge \xi) \vee c.$$

Jednačina zahteva da je $F = L \leftrightarrow D$ istinita, a dodatni uslov zahteva da je istinita i formula $H = (a \wedge b \wedge c) \to \xi$. Nepoznate vrednosti po redovima označimo sa

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi(0,0,0), \quad v_2 = \xi(0,0,1), \\ v_3 &= \xi(0,1,0), \quad v_4 = \xi(0,1,1), \\ v_5 &= \xi(1,0,0), \quad v_6 = \xi(1,0,1), \\ v_7 &= \xi(1,1,0), \quad v_8 = \xi(1,1,1). \end{aligned}$$

Dakle, $v_i = \widehat{w_i}(\xi)$. Popunjavamo simboličku tablicu:

| $w_i$ | $a$ | $b$ | $c$ | $\xi(a,b,c)$ | $L$ | $D$ | $\widehat{w_i}(F)$ | $\widehat{w_i}(H)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | 0 | 0 | 0 | $v_1$ | $v_1$ | 0 | $\neg v_1$ | 1 |
| $w_2$ | 0 | 0 | 1 | $v_2$ | $v_2$ | 1 | $v_2$ | 1 |
| $w_3$ | 0 | 1 | 0 | $v_3$ | $v_3$ | 0 | $\neg v_3$ | 1 |
| $w_4$ | 0 | 1 | 1 | $v_4$ | $v_4$ | 1 | $v_4$ | 1 |
| $w_5$ | 1 | 0 | 0 | $v_5$ | $v_5$ | 0 | $\neg v_5$ | 1 |
| $w_6$ | 1 | 0 | 1 | $v_6$ | $v_6$ | 1 | $v_6$ | 1 |
| $w_7$ | 1 | 1 | 0 | $v_7$ | 1 | $v_7$ | $v_7$ | 1 |
| $w_8$ | 1 | 1 | 1 | $v_8$ | 1 | 1 | 1 | $v_8$ |

Obe poslednje kolone moraju imati samo vrednost 1. Jednačina u prvih sedam redova daje

$$v_1 = v_3 = v_5 = 0, \qquad v_2 = v_4 = v_6 = v_7 = 1.$$

U osmom redu sama jednačina važi za obe vrednosti $v_8$, jer je $\widehat{w_8}(F) = 1$ nezavisno od izbora. To su elementi iz $A \cap B \cap C$. Međutim, $\widehat{w_8}(H) = v_8$, pa dodatni uslov daje $v_8 = 1$. Konačna tablica zato glasi:

| $w_i$ | $a$ | $b$ | $c$ | $\xi(a,b,c) = v_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $w_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $w_4$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $w_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $w_6$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $w_7$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $w_8$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tako je članstvo u $X$ potpuno određeno vrednostima $a, b, c$.

Prema redovima u kojima je $\xi = 1$, potpuna DNF glasi

$$\begin{aligned}\xi \iff & (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \\ & \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c).\end{aligned}$$

Prevođenjem nazad na skupove dobijamo oblik iz priloga:

$$\begin{aligned}X = & (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \\ & \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Prvi, drugi, treći i peti član zajedno pokrivaju ceo skup $C$: za svaki element skupa $C$ postoje upravo četiri mogućnosti članstva u $A, B$. Četvrti član je $(A \cap B) \setminus C$. Zato se rezultat pojednostavljuje na

$$X = C \cup ((A \cap B) \setminus C) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{X = (A \cap B) \cup C.}$$

## 3. Dekartov proizvod, partitivni skup i broj elemenata

**Uređeni par i Dekartov proizvod.** U **uređenom paru** $(a, b)$ bitan je redosled koordinata:

$$(a, b) = (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \ \text{ i } \ b = d.$$

**Dekartov proizvod** skupova $A$ i $B$ je skup svih uređenih parova čija je prva koordinata iz $A$, a druga iz $B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Dakle, $(x, y) \in A \times B \iff (x \in A \wedge y \in B)$. U opštem slučaju $A \times B$ i $B \times A$ nisu isti skup. Ako jedan faktor nema elemenata, ne možemo formirati nijedan par:

$$\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing.$$

Obrnuto, ako su oba faktora neprazna, možemo izabrati po jedan element iz svakog, pa je njihov proizvod neprazan. Zato

$$A \times B \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad A \neq \varnothing \ \text{ i } \ B \neq \varnothing.$$

**Broj elemenata i princip proizvoda.** Za konačan skup $A$, oznaka $|A|$ predstavlja njegov broj elemenata. Ako je $|A| = m$ i $|B| = n$, onda

$$\boxed{|A \times B| = mn.}$$

Za svaku od $m$ mogućih prvih koordinata imamo $n$ mogućih drugih koordinata. Time dobijamo $m$ disjunktnih grupa po $n$ parova, odnosno ukupno $mn$ parova. Ovo je **princip proizvoda**.

**Partitivni skup.** **Partitivni skup** (ili skup svih podskupova) skupa $A$ je

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Važno je razlikovati $a \in A$ i $B \in \mathcal{P}(A)$: elementi partitivnog skupa su *skupovi*, konkretno podskupovi skupa $A$. Prazan skup i ceo skup $A$ uvek su među tim podskupovima:

$$\varnothing \in \mathcal{P}(A), \qquad A \in \mathcal{P}(A).$$

Ako je $|A| = n$, tada

$$\boxed{|\mathcal{P}(A)| = 2^n.}$$

*Dokaz.* Za svaki od $n$ elemenata odlučujemo da li će pripadati izabranom podskupu. Postoje tačno dve mogućnosti: uključujemo ga ili ga ne uključujemo. Svaki niz tih odluka određuje tačno jedan podskup, a svaki podskup daje tačno jedan takav niz. Prema principu proizvoda ukupan broj izbora je $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ faktora}} = 2^n$. Za $n = 0$ postoji samo jedan podskup, sam prazan skup, pa je i tada formula tačna: $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ i $|\mathcal{P}(\varnothing)| = 1 = 2^0$.

## 4. Zadaci sa partitivnim skupom i Dekartovim proizvodom

**Zadatak 5.** Naći $\mathcal{P}(S)$ u sledećim slučajevima:

$$\text{a) } S = \{\varnothing\}, \qquad \text{b) } S = \{\{\varnothing\}\}, \qquad \text{c) } S = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

**Objašnjenje oznaka.** Skup $\varnothing$ nema elemenata. Skup $\{\varnothing\}$ ima jedan element, a taj element je prazan skup. Skup $\{\{\varnothing\}\}$ takođe ima jedan element, ali njegov jedini element je skup $\{\varnothing\}$. Zato su ovi skupovi različiti; dodatne zagrade menjaju koji objekat je element skupa.

*a)* Skup $S = \{\varnothing\}$ ima jedan element. Njegovi podskupovi dobijaju se tako što taj element izostavimo ili uključimo:

$$\boxed{\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.}$$

Prvi navedeni podskup je prazan, a drugi je ceo skup $S$. Provera broja: $|S| = 1$, pa je $|\mathcal{P}(S)| = 2^1 = 2$.

*b)* Sada je jedini element skupa $S$ objekat $\{\varnothing\}$. Njegovim izostavljanjem dobijamo $\varnothing$, a uključivanjem ceo skup $\{\{\varnothing\}\}$. Zato

$$\boxed{\mathcal{P}(\{\{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}.}$$

Ponovo je $|S| = 1$ i $|\mathcal{P}(S)| = 2$. Skup $\{\varnothing\}$ nije podskup ovog $S$: za to bi bilo potrebno $\varnothing \in S$, a jedini element skupa $S$ je $\{\varnothing\}$, koji nije jednak praznom skupu.

*c)* Skup $S = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ ima dva različita elementa. Možemo izabrati nijedan, samo prvi, samo drugi ili oba. Dobijamo

$$\boxed{\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.}$$

Četiri navedena podskupa imaju redom $0, 1, 1, 2$ elementa. Provera broja: $|S| = 2$, pa je $|\mathcal{P}(S)| = 2^2 = 4$.

**Zadatak 6.** Dokazati da za sve skupove $A, B, C, D$ važi

$$\boxed{(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).}$$

**Rešenje.** Neka je $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$. Tada postoje dve mogućnosti. Ako je $(x, y) \in A \times B$, imamo $x \in A \subseteq A \cup C$ i $y \in B \subseteq B \cup D$. Ako je $(x, y) \in C \times D$, imamo $x \in C \subseteq A \cup C$ i $y \in D \subseteq B \cup D$. U oba slučaja $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$. Pošto smo krenuli od proizvoljnog para sa leve strane, inkluzija je dokazana.

Isti dokaz možemo zapisati u logičkom obliku:

$$\begin{aligned}
&(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D) \\
&\quad \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D) \\
&\quad \implies x \in A \cup C \wedge y \in B \cup D \\
&\quad \iff (x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D).
\end{aligned}$$

U sredini stoji implikacija, jer prelaskom na veći skup mogu nastati dodatni parovi.

**Zašto obrnuta inkluzija ne važi u opštem slučaju?** Na desnoj strani dozvoljeno je nezavisno birati prvu koordinatu iz $A$ ili $C$, a drugu iz $B$ ili $D$. Zato važi

$$\begin{aligned}
(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) &\cup (A \times D) \\
&\cup (C \times B) \cup (C \times D).
\end{aligned}$$

Leva strana zadate inkluzije sadrži samo prvi i poslednji član ove unije; parovi iz preostala dva člana mogu biti novi. Na primer, uzmimo

$$A = B = \{0\}, \qquad C = D = \{1\}.$$

Tada je

$$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(0, 0), (1, 1)\},$$

dok je

$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Par $(0, 1)$ pripada desnoj strani, ali ne pripada levoj. Time je data konkretna potvrda da obrnuta inkluzija nije opšte pravilo.

**Zadatak 7.** Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi i neka važi

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D.$$

Dokazati da je

$$\boxed{A = B = C = D.}$$

**Rešenje.** Najpre ćemo pokazati $C = D = A \cup B$, a zatim $A = B$. Označimo $T = A \cup B$.

*Prvi korak: $C$ i $D$ su neprazni.* Pošto su $A$ i $B$ neprazni, njihov proizvod $A \times B$ je neprazan. Zato je i njegova unija sa $B \times A$ neprazna. Iz zadate jednakosti sledi $C \times D \neq \varnothing$, pa su i $C$ i $D$ neprazni.

*Drugi korak: $C \subseteq T$ i $D \subseteq T$.* Na osnovu prethodnog zadatka,

$$C \times D = (A \times B) \cup (B \times A) \subseteq (A \cup B) \times (B \cup A) = T \times T.$$

Izaberimo $d_0 \in D$. Za svaki $c \in C$ važi $(c, d_0) \in C \times D \subseteq T \times T$, pa je $c \in T$. Dakle, $C \subseteq T$. Slično, izaberimo $c_0 \in C$. Za svaki $d \in D$ važi $(c_0, d) \in T \times T$, pa je $d \in T$. Zato je $D \subseteq T$. Nepraznost faktora ovde je potrebna da bismo mogli izabrati drugu koordinatu za svaki element koji posmatramo.

*Treći korak: $T \subseteq C$ i $T \subseteq D$.* Oba proizvoda na levoj strani sadržana su u $C \times D$:

$$A \times B \subseteq C \times D, \qquad B \times A \subseteq C \times D.$$

Za proizvoljan $a \in A$ izaberimo $b_0 \in B$. Iz $(a, b_0) \in C \times D$ dobijamo $a \in C$, a iz $(b_0, a) \in C \times D$ dobijamo $a \in D$. Prema tome, $A \subseteq C$ i $A \subseteq D$. Za proizvoljan $b \in B$ izaberimo $a_0 \in A$. Iz $(b, a_0) \in C \times D$ dobijamo $b \in C$, a iz $(a_0, b) \in C \times D$ dobijamo $b \in D$. Dakle, $B \subseteq C$ i $B \subseteq D$. Unijom tih inkluzija sledi

$$T = A \cup B \subseteq C, \qquad T = A \cup B \subseteq D.$$

Zajedno sa drugim korakom zaključujemo

$$C = D = T = A \cup B.$$

*Četvrti korak:* $A = B$. Sada zadatu jednakost možemo zapisati kao

$$(A \times B) \cup (B \times A) = T \times T.$$

Neka je $t \in T$ proizvoljan. Tada je $(t, t) \in T \times T$, pa $(t, t)$ mora pripadati $A \times B$ ili $B \times A$. U prvom slučaju imamo $t \in A$ i $t \in B$; u drugom takođe imamo $t \in B$ i $t \in A$. Zato u oba slučaja $t \in A \cap B$. Prema tome,

$$A \cup B = T \subseteq A \cap B.$$

Kako uvek važi $A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B$, sledi $A = B = T$. Uz već dobijeno $C = D = T$ konačno dobijamo $A = B = C = D$.

Pretpostavka da su $A$ i $B$ neprazni je bitna. Ako je, na primer, $A = C = \varnothing$, $B = \{1\}$ i $D = \{2\}$, zadati proizvodi su svi prazni i jednakost važi, ali skupovi nisu svi jednaki.

## Karakteristične funkcije skupova

### Definicija i primer

Neka je $U$ fiksirani **univerzum**, odnosno skup svih elemenata koje posmatramo. Svaki skup u ovom delu je podskup skupa $U$. Ako je $A \subseteq U$, njegova **karakteristična funkcija**, koja se naziva i **indikator skupa**, jeste funkcija

$$\chi_A : U \longrightarrow \{0, 1\}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dakle, $\chi_A(x)$ odgovara na pitanje da li $x$ pripada skupu $A$: vrednost 1 znači da pripada, a vrednost 0 da ne pripada. Komplement $A^c$ uvek se uzima u odnosu na izabrani univerzum, pa je $A^c = U \setminus A$.

**Primer.** Za $U = \{0, 1, 2\}$ i $A = \{0, 2\}$ dobijamo

$$\chi_A(0) = 1, \qquad \chi_A(1) = 0, \qquad \chi_A(2) = 1.$$

Broj 0 jeste element skupa $A$, pa je vrednost funkcije u toj tački 1. Treba razlikovati sam element univerzuma od vrednosti njegove karakteristične funkcije.

### Skupovne operacije kao računske formule

Sabiranje i množenje funkcija obavlja se **tačka po tačka**: za svako $x \in U$ računamo sa vrednostima funkcija u istoj tački $x$. U ovom pododeljku računamo u običnoj aritmetici realnih brojeva. Radi kraćeg zapisa, za fiksirano $x \in U$ stavimo

$$a = \chi_A(x), \qquad b = \chi_B(x).$$

Pošto su $a, b \in \{0, 1\}$, važi $a^2 = a$ i $b^2 = b$. Osnovne formule su

$$\begin{aligned}
\chi_{\varnothing}(x) &= 0, & \chi_U(x) &= 1,\\
\chi_{A\cap B}(x) &= \chi_A(x)\chi_B(x),\\
\chi_{A^c}(x) &= 1 - \chi_A(x),\\
\chi_{A\setminus B}(x) &= \chi_A(x)(1 - \chi_B(x)) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x),\\
\chi_{A\cup B}(x) &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x),\\
\chi_{A\triangle B}(x) &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x).
\end{aligned}$$

Ovde je $A\triangle B = (A \setminus B)\cup(B \setminus A)$ simetrična razlika: ona sadrži elemente koji pripadaju tačno jednom od skupova $A$ i $B$.

**Zašto formule važe?** Za prazan skup nijedan element nije član, dok univerzumu pripada svaki posmatrani element. Proizvod $ab$ jednak je 1 upravo kada je $a = b = 1$, što je uslov za pripadnost preseku. Izraz $1-a$ menja 0 u 1 i 1 u 0, pa predstavlja komplement. Razlika skupova je $A\setminus B = A\cap B^c$, otuda

$$\chi_{A\setminus B}(x) = a(1 - b) = a - ab.$$

De Morganov zakon $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ daje

$$\chi_{A\cup B}(x) = 1 - (1 - a)(1 - b) = a + b - ab.$$

Skupovi $A \setminus B$ i $B \setminus A$ su disjunktni: element ne može istovremeno pripadati skupu $A$ i ne pripadati mu. Zato se njihovi indikatori pri uniji samo sabiraju, pa

$$\chi_{A\triangle B}(x) = (a - ab) + (b - ab) = a + b - 2ab.$$

Na primer, kada $x \in A \cap B$, u poslednjoj formuli dobijamo $1 + 1 - 2 = 0$, kao što zahteva definicija simetrične razlike.

Sve navedene operacije mogu se izraziti pomoću preseka i komplementa: razlika je presek sa komplementom, uniju daje De Morganov zakon, a simetrična razlika je unija dve razlike. To odgovara činjenici iz logike da su konjunkcija $\wedge$ i negacija $\neg$ potpuni sistem veznika: pomoću njih mogu se izraziti svi ostali logički veznici.

## Računanje u $\mathbb{Z}_2$

Skup $\{0, 1\}$ možemo posmatrati kao $\mathbb{Z}_2$, skup ostataka pri deljenju sa 2. Rezultat sabiranja i množenja uzimamo po modulu 2:

| $w_i$ | $a$ | $b$ | $a + b$ u $\mathbb{Z}_2$ | $ab$ u $\mathbb{Z}_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $w_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $w_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $w_4$ | 1 | 1 | 0 | 1 |

Označavanje redova sa $w_i$ prati prethodne tablice: svaki red predstavlja jedan izbor ulaznih vrednosti $a$ i $b$. Sabiranje i množenje su komutativni i asocijativni, a množenje je distributivno prema sabiranju. Pritom za svaki $a \in \mathbb{Z}_2$ važi

$$a^2 = a, \qquad a + a = 0, \qquad -a = a.$$

Zato su oduzimanje i sabiranje u $\mathbb{Z}_2$ ista operacija: $a - b = a + b$. Posebno, $1 + 1 = 0$ u $\mathbb{Z}_2$, dok je u običnoj aritmetici $1 + 1 = 2$. Ta dva načina računanja ne treba mešati.

**Formule u $\mathbb{Z}_2$.** Ako karakteristične funkcije posmatramo kao funkcije $U \to \mathbb{Z}_2$, prethodne formule dobijaju oblik

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap B} &= \chi_A\chi_B,\\
\chi_{A^c} &= 1+\chi_A,\\
\chi_{A\setminus B} &= \chi_A+\chi_A\chi_B,\\
\chi_{A\cup B} &= \chi_A+\chi_B+\chi_A\chi_B,\\
\chi_{A\triangle B} &= \chi_A+\chi_B.
\end{aligned}$$

Jednakosti su jednakosti funkcija, odnosno važe za svako $x \in U$. Oznake 0 i 1 ovde predstavljaju odgovarajuće konstantne funkcije. Član $2\chi_A\chi_B$ iz realne formule za simetričnu razliku nestaje jer je $2 = 0$ u $\mathbb{Z}_2$.

**U svim rešenjima koja slede računske operacije nad karakterističnim funkcijama obavljaju se u $\mathbb{Z}_2$.** Zato se dva jednaka sabirka poništavaju, a $\chi_A^2 = \chi_A$.

## Kako se dokazuje jednakost skupova?

**Stav.** Za $A, B \subseteq U$ važi

$$A = B \quad\Longleftrightarrow\quad \chi_A = \chi_B.$$

**Dokaz.** Ako je $A = B$, za svaki $x \in U$ važi da element $x$ pripada skupu $A$ ako i samo ako pripada skupu $B$. Zato su njihove karakteristične funkcije jednake. Obrnuto, ako je $\chi_A = \chi_B$, onda za svaki $x \in U$ važi

$$x \in A \quad\Longleftrightarrow\quad \chi_A(x) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \chi_B(x) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x \in B.$$

Prema definiciji jednakosti skupova, $A = B$.

**Metod rada.** Skupovni izraz zamenimo njegovom karakterističnom funkcijom, primenimo formule za operacije i sredimo dobijeni račun. Ako dobijemo jednake funkcije, prethodni stav omogućava da zaključimo da su i skupovi jednaki. Skraćeno ćemo pisati $a = \chi_A$, $b = \chi_B$ i $c = \chi_C$; svi računi i dalje se obavljaju tačka po tačka.

## Zadatak 1: razlika sa razlikom

**Zadatak.** Dokazati identitet

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

**Rešenje.** Označimo levu stranu sa $L$, a desnu sa $D$. Pošto je $\chi_{B\setminus C} = b + bc$, dobijamo

$$\chi_L = a + a(b + bc) = a + ab + abc.$$

Za desnu stranu koristimo formulu za uniju:

$$\begin{aligned}
\chi_D &= (a+ab) + ac + (a+ab)ac\\
&= a + ab + ac + a^2c + a^2bc\\
&= a + ab + ac + ac + abc\\
&= a + ab + abc.
\end{aligned}$$

Koristili smo $a^2 = a$ i $ac + ac = 0$. Dakle, $\chi_L = \chi_D$, pa je $L = D$. Smisao identiteta je da iz skupa $A$ uklanjamo samo one elemente skupa $B$ koji nisu u $C$; zadržavaju se elementi izvan $B$ i elementi koji pripadaju istovremeno skupovima $A$ i $C$.

### Zadatak 2: kada se zagrade u razlici mogu promeniti?

**Zadatak.** Naći potreban i dovoljan uslov za jednakost

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C).$$

**Rešenje.** Karakteristične funkcije dveju strana su

$$\chi_{(A\setminus B)\setminus C} = (a + ab) + (a + ab)c = a + ab + ac + abc,$$
$$\chi_{A\setminus(B\setminus C)} = a + a(b + bc) = a + ab + abc.$$

Zato važi lanac ekvivalencija

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C) \quad &\iff \quad ac = 0 \\ &\iff \quad \chi_{A\cap C} = \chi_{\varnothing} \\ &\iff \quad A \cap C = \varnothing. \end{aligned}$$

Traženi uslov je, dakle, da su $A$ i $C$ disjunktni. Uslov ne zavisi od skupa $B$. Razlika skupova uopšte nije asocijativna: zagrade se u ovom izrazu mogu promeniti upravo pod navedenim uslovom.

### Zadatak 3: jednakost preseka i unije određuje skup

**Zadatak.** Neka su $A, X, Y \subseteq U$ takvi da

$$A \cap X = A \cap Y, \qquad A \cup X = A \cup Y.$$

Dokazati da je $X = Y$.

**Rešenje.** Stavimo $a = \chi_A$, $p = \chi_X$ i $q = \chi_Y$. Prva pretpostavka daje

$$ap = aq.$$

Iz druge pretpostavke sledi

$$a + p + ap = a + q + aq.$$

Sabiranjem sa $a$ na obe strane poništavamo član $a$. Zatim, zbog $ap = aq$, poništavamo i te jednake članove. Dobijamo $p = q$, odnosno $\chi_X = \chi_Y$, pa je $X = Y$. Prva jednakost određuje deo skupova $X$ i $Y$ unutar $A$, a druga određuje njihov deo izvan $A$; zajedno određuju ceo skup.

### Zadatak 4: unija i simetrična razlika

**Zadatak.** Dokazati da je

$$A = B \cup C \quad \iff \quad A \triangle B = C \setminus B.$$

**Rešenje.** Koristeći karakteristične funkcije, dobijamo

$$\begin{aligned} A \triangle B = C \setminus B \quad &\iff \quad a + b = c + cb \\ &\iff \quad a = b + c + bc \\ &\iff \quad \chi_A = \chi_{B\cup C} \\ &\iff \quad A = B \cup C. \end{aligned}$$

U drugom koraku sabrali smo obe strane sa $b$ i primenili $b + b = 0$. Svaki korak je ekvivalencija, pa račun istovremeno dokazuje oba smera.

## Zadatak 5: poređenje unije i simetrične razlike

**Zadatak.** Za $A, B, C \subseteq U$ neka je

$$L = A \cap (B \cup C), \qquad D = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

(a) Dokazati da je $L = D$ ako i samo ako je $A \cap B \cap C = \varnothing$.

(b) Ispitati koje od inkluzija $L \subseteq D$ i $D \subseteq L$ važe u opštem slučaju.

**Rešenje (a).** U $\mathbb{Z}_2$ važi

$$\chi_L = a(b + c + bc) = ab + ac + abc, \qquad \chi_D = ab + ac.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} L = D \quad &\iff \quad ab + ac + abc = ab + ac \\ &\iff \quad abc = 0 \\ &\iff \quad \chi_{A\cap B\cap C} = \chi_{\varnothing} \\ &\iff \quad A \cap B \cap C = \varnothing. \end{aligned}$$

Elementi trostrukog preseka pripadaju skupu $L$, ali ne pripadaju skupu $D$: u skupu $D$ isključuju se elementi koji su u oba preseka $A \cap B$ i $A \cap C$.

**Lema za inkluziju.** Za bilo koja dva skupa $E, F \subseteq U$ važi

$$E \subseteq F \quad \iff \quad E \cap F = E.$$

Ako je $E \subseteq F$, svaki element $E$ već je u $F$, pa presek ne uklanja nijedan element $E$. Obrnuto, iz $E \cap F = E$ sledi da svaki element $E$ pripada skupu $F$.

**Rešenje (b).** Izračunajmo indikator preseka $L \cap D$:

$$\begin{aligned} \chi_{L\cap D} &= (ab + ac + abc)(ab + ac) \\ &= a^2b^2 + a^2bc + a^2bc + a^2c^2 + a^2b^2c + a^2bc^2 \\ &= ab + abc + abc + ac + abc + abc \\ &= ab + ac = \chi_D. \end{aligned}$$

Svaki indikator je idempotentan, pa je $a^2 = a$, $b^2 = b$ i $c^2 = c$; četiri sabirka $abc$ poništavaju se u parovima. Dakle, $L \cap D = D$, pa po lemi **uvek važi** $D \subseteq L$.

Inkluzija $L \subseteq D$ ne važi za proizvoljne skupove. Na primer, za $A = B = C = \{u\}$ imamo $L = \{u\}$, a $D = \varnothing$.

## Zadatak 6: kada presek sa simetričnom razlikom daje $B$?

**Zadatak.** Dokazati ekvivalenciju

$$A \cap (B \triangle C) = B \quad \iff \quad \big(A \cap C = \varnothing \ \text{ i } \ B \subseteq A\big).$$

**Dovoljan uslov: dokaz smera $\Longleftarrow$.** Pretpostavimo da je $A \cap C = \varnothing$ i $B \subseteq A$. Tada je $ac = 0$, a iz $A \cap B = B$ sledi $ab = b$. Zato

$$\chi_{A\cap(B\triangle C)} = a(b + c) = ab + ac = b + 0 = b = \chi_B.$$

Otuda $A \cap (B \triangle C) = B$. Isti zaključak daje distributivnost preseka prema simetričnoj razlici:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C) = B \triangle \varnothing = B.$$

Korišćeni distributivni zakon sledi iz $a(b+c) = ab+ac$, a prazan skup je neutralni element za simetričnu razliku.

**Potreban uslov: dokaz smera $\Longrightarrow$.** Pretpostavimo sada da je $A \cap (B \triangle C) = B$. Za svako $x \in U$ važi

$$\chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_A(x)\chi_C(x) = \chi_B(x). \qquad (*)$$

Najpre pokažimo da je $A \cap C = \varnothing$. Kada bi postojao $y \in A \cap C$, imali bismo $\chi_A(y) = \chi_C(y) = 1$. Jednakost $(*)$ u tački $y$ tada bi dala

$$\chi_B(y) + 1 = \chi_B(y).$$

Sabiranjem sa $\chi_B(y)$ na obe strane dobili bismo $1 = 0$ u $\mathbb{Z}_2$, što nije tačno. Takav element $y$ zato ne postoji, pa je $A \cap C = \varnothing$.

Zatim pokažimo da je $B \subseteq A$. Kada to ne bi važilo, postojao bi $z \in B \setminus A$, pa bi bilo $\chi_B(z) = 1$ i $\chi_A(z) = 0$. Iz $(*)$ u tački $z$ sledilo bi

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot \chi_C(z) = 1, \qquad \text{odnosno } 0 = 1,$$

što je opet nemoguće. Prema tome, $B \subseteq A$. Dokazana su oba potrebna uslova i time cela ekvivalencija.