Uvod u matematičku logiku - 5. čas

Matematička indukcija

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Princip matematičke indukcije

Ako je $I(n)$ svojstvo nekog prirodnog broja, da bismo dokazali da to svojstvo važi za svaki prirodan broj, dokazujemo:

$$\text{osnovni princip matematičke indukcije} \quad \begin{cases} 1^\circ \text{ baza indukcije: } \quad I(1), \\ 2^\circ \text{ indukcijska hipoteza: pretpostavimo da važi } I(n), \\ 3^\circ \text{ indukcijski korak: dokažemo da važi } I(n+1). \end{cases}$$

Zadatak 1

Dokazati:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1° **Baza indukcije.** Dokazujemo za $n = 1$:

$$L = 1, \qquad D = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Dakle, leva i desna strana su jednake.

2° **Indukcijska hipoteza.** Neka važi

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3° **Indukcijski korak.** Treba dokazati:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Koristeći indukcijsku hipotezu, dobijamo:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipoteza}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, jednakost važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 2

Dokazati:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1° **Baza indukcije.** Za $n = 1$ proveravamo:

$$1^2 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Dobijamo

$$1 = 1. \qquad \checkmark$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Neka važi

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3° **Indukcijski korak.** Treba dokazati:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Koristeći indukcijsku hipotezu, levu stranu sređujemo:

$$\begin{aligned} L &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, jednakost važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Indukcija sa korakom k

Neka je $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{indukcija sa korakom } k \quad \begin{cases} 1° \text{ baza indukcije: } \quad I(1), I(2), \ldots, I(k), \\ 2° \text{ hipoteza: pretpostavimo da tvrđenje važi za} \\ \quad \underbrace{I(n), I(n+1), \ldots, I(n+k-1)}_{k \text{ uzastopnih}}, \\ 3° \text{ korak: dokažemo da važi } I(n+k). \end{cases}$$

Zadatak 3

Fibonačijev niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan je na sledeći način:

$$F_1 = F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Prvi članovi niza su

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Dokazati da je

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

1° **Baza indukcije.**

Za $n = 1$ proveravamo:

$$\begin{aligned}
1 = F_1 &\stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{2\cdot 5}{5\cdot 2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Analogno se proveri za F_2:

$$1 = F_2 \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \cdots = 1.$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavljamo da važe jednakosti:

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\
F_{n+1} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

3° **Indukcijski korak.** Koristeći definiciju niza i indukcijsku hipotezu, dobijamo:

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Koristimo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
\frac{3+\sqrt{5}}{2} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \checkmark \\
\frac{3-\sqrt{5}}{2} &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Zato nastavljamo:

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}. \end{aligned}$$

Time je dokazan indukcijski korak. Prema principu indukcije sa korakom 2, formula važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 4

Niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ definisan je sa

$$a_0 = 2, \qquad a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Dokazati da je

$$a_n = 2^n + 1.$$

1° **Baza indukcije.** Proveravamo za $n = 0$ i $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2 = a_0 &\overset{?}{=} 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2, \qquad \checkmark \\ 3 = a_1 &= 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da važi

$$a_{n-1} = 2^{n-1} + 1, \qquad a_n = 2^n + 1.$$

3° **Indukcijski korak.** Koristeći rekurentnu vezu i indukcijsku hipotezu, dobijamo:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 2a_{n-1} \\ &= 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) \\ &= 3 \cdot 2^n + 3 - 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \\ &= 3 \cdot 2^n + 3 - 2^n - 2 \\ &= 2 \cdot 2^n + 1 \\ &= 2^{n+1} + 1. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, formula $a_n = 2^n + 1$ važi za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zadatak 1 — Deljivost

Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$9 \mid \left(n \cdot 4^{n+1} - (n+1) \cdot 4^n + 1\right).$$

1° **Baza indukcije.** Za $n = 1$ dobijamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4^1 + 1 = 16 - 8 + 1 = 9, \\ 9 \mid 9. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbb{N}$ važi

$$9 \mid \left(n \cdot 4^{n+1} - (n+1) \cdot 4^n + 1\right).$$

3° **Indukcijski korak.** Dokazujemo tvrđenje za $n+1$:

$$\begin{aligned}
&(n+1)\cdot 4^{n+2} - (n+2)\cdot 4^{n+1} + 1 \\
&\quad = n\cdot 4^{n+2} + 4^{n+2} - (n+1)\cdot 4^{n+1} - 4^{n+1} + 1 \\
&\quad = \underline{4n\cdot 4^{n+1}} + 4^{n+2} - \underline{4(n+1)\cdot 4^{n}} - 4^{n+1} + \underline{4} - 3 \\
&\quad = 4\underbrace{\left(n\cdot 4^{n+1} - (n+1)\cdot 4^{n} + 1\right)}_{\substack{\text{deljivo sa 9}\\ \text{po hipotezi}}} + \underbrace{4^{n+2} - 4^{n+1} - 3}_{\substack{\text{u maloj indukciji}\\ \text{je dokazano}}}.
\end{aligned}$$

Dovoljno je još dokazati da je izraz

$$4^{n+2} - 4^{n+1} - 3$$

deljiv sa 9. To dokazujemo indukcijom.

1° **Baza pomoćne indukcije.** Za $n = 1$ važi

$$4^3 - 4^2 - 3 = 64 - 16 - 3 = 45,$$

što je deljivo sa 9.

2° **Hipoteza pomoćne indukcije.** Pretpostavimo da važi

$$9 \mid \left(4^{n+2} - 4^{n+1} - 3\right).$$

3° **Korak pomoćne indukcije.** Dokazujemo za $n+1$:

$$\begin{aligned}
4^{n+3} - 4^{n+2} - 3 &= 4\cdot 4^{n+2} - 4\cdot 4^{n+1} - 4\cdot 3 + 9 \\
&= 4\underbrace{\left(4^{n+2} - 4^{n+1} - 3\right)}_{\substack{\text{deljivo sa 9}\\ \text{po hipotezi}}} + \underbrace{9}_{\text{deljivo sa 9}}.
\end{aligned}$$

Oba sabirka su deljiva sa 9, pa važi

$$9 \mid \left(4^{n+3} - 4^{n+2} - 3\right).$$

Time je pomoćna indukcija završena.

Vraćajući se na glavni indukcijski korak, zaključujemo da su oba sabirka deljiva sa 9, pa je

$$9 \mid \left((n+1)\cdot 4^{n+2} - (n+2)\cdot 4^{n+1} + 1\right).$$

Prema principu matematičke indukcije, početno tvrđenje važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 2

Niz $(a_n)_{n\geq 0}$ zadat je sa

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 4,$$
$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n \qquad (n \geq 0).$$

Dokazati da je

$$a_n = n^2.$$

Koristimo indukciju sa korakom 3.

1° **Baza indukcije.** Proveravamo prva tri člana:

$$a_0 = 0^2, \qquad a_1 = 1^2, \qquad a_2 = 2^2. \qquad \checkmark$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da je

$$\begin{aligned}
a_n &= n^2, \\
a_{n+1} &= (n+1)^2, \\
a_{n+2} &= (n+2)^2.
\end{aligned}$$

3° **Indukcijski korak.** Koristeći rekurentnu vezu i indukcijsku hipotezu, dobijamo:

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n \\ &= 3(n+2)^2 - 3(n+1)^2 + n^2 \\ &= 3(n^2+4n+4) - 3(n^2+2n+1) + n^2 \\ &= 3n^2 + 12n + 12 - 3n^2 - 6n - 3 + n^2 \\ &= n^2 + 6n + 9 \\ &= (n+3)^2. \end{aligned}$$

Prema principu indukcije sa korakom 3, formula $a_n = n^2$ važi za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Napomena. Ponekad neko tvrđenje treba dokazati počev od nekog prirodnog broja n. U tom slučaju modifikujemo bazu indukcije.

Zadatak 3

Dokazati da za svako $n \geq 5$ važi

$$2^n > n^2.$$

1° **Baza indukcije.** Za $n = 5$ proveravamo:

$$2^5 > 5^2, \qquad 32 > 25. \qquad \checkmark$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da za neko $n \geq 5$ važi

$$2^n > n^2.$$

3° **Indukcijski korak.** Dokazujemo tvrđenje za $n+1$:

$$\begin{aligned} L = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n &\underset{\text{hipoteza}}{\overset{\uparrow}{>}} 2n^2, \\ D = (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1. \end{aligned}$$

Dovoljno je još dokazati da za $n \geq 5$ važi

$$\begin{aligned} 2n^2 > n^2 + 2n + 1 &\iff n^2 - 2n - 1 > 0 \\ &\iff n^2 > 2n + 1. \end{aligned}$$

Ovo ponovo dokazujemo indukcijom.

1° **Baza pomoćne indukcije.** Za $n = 5$ važi

$$5^2 > 2 \cdot 5 + 1, \qquad 25 > 11. \qquad \checkmark$$

2° **Hipoteza pomoćne indukcije.** Neka je

$$n^2 > 2n + 1.$$

3° **Korak pomoćne indukcije.** Dokazujemo:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 > 2(n+1) + 1 &\iff n^2 + 2n + 1 > 2n + 3 \\ &\iff n^2 + 1 > 3 \\ &\iff n^2 > 2. \end{aligned}$$

Poslednja nejednakost jeste ispunjena, jer je za $n \geq 5$

$$n^2 \geq 25 > 2.$$

Time je pomoćna indukcija završena.

Vraćajući se na glavni indukcijski korak, dobijamo

$$2^{n+1} > 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Prema principu matematičke indukcije, nejednakost $2^n > n^2$ važi za svako $n \geq 5$.

Zadatak 4

Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ važi

$$\frac{n}{2} < \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}}_{a_n} < n.$$

1° **Baza indukcije.** Za $n = 2$ proveravamo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^2 - 1} < 2 \qquad ? \\ 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2 \qquad ? \\ 1 < \frac{11}{6} < 2 \qquad ? \\ 6 < 11 < 12. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da za neko $n \geq 2$ važi

$$\frac{n}{2} < a_n < n.$$

3° **Indukcijski korak.** Dokazujemo za $n + 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} \\ &= \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}}_{a_n} + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1}}_{2^n \text{ sabiraka}}. \end{aligned}$$

Označimo novi blok sabiraka sa S_n:

$$a_{n+1} = a_n + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1}}_{S_n}.$$

Svaki sabirak u S_n strogo je veći od $\frac{1}{2^{n+1}}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &> \frac{1}{2^{n+1}}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2^{n+1} - 1} &> \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad S_n > \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Koristeći indukcijsku hipotezu i dobijenu procenu, sledi

$$a_{n+1} = a_n + S_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{po hipotezi}}}{>} \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Za gornju granicu važe procene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &\leq \frac{1}{2^n}, \\ \frac{1}{2^n + 1} &< \frac{1}{2^n}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2^{n+1} - 1} &< \frac{1}{2^n} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad S_n < \underbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ sabiraka}} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1.$$

Nejednakost za zbir je stroga jer su sve procene osim prve stroge.

Stoga, koristeći indukcijsku hipotezu, dobijamo

$$a_{n+1} = a_n + S_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{po hipotezi}}}{<} n+1.$$

Zajedno sa prethodno dokazanom donjom granicom sledi

$$\frac{n+1}{2} < a_{n+1} < n+1.$$

Time je indukcijski korak završen. Prema principu matematičke indukcije, zadate nejednakosti važe za svaki prirodan broj $n \geq 2$.

Princip transfinitne indukcije (potpune)

Ako je $I(n)$ neko tvrđenje koje treba dokazati za svaki $n \in \mathbb{N}$, radimo sledeće:

1° **Baza:** proveravamo $I(1)$.
2° **Hipoteza:** pretpostavimo da tvrđenje važi za

$$I(1), \ldots, I(n).$$

3° **Korak:** dokažemo $I(n+1)$.

Zadatak 5

Niz $(a_n)_{n\geq 0}$ zadat je sa

$$a_0 = 1, \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + 2a_0 \quad (n \geq 1),$$

odnosno, u razvijenom zapisu,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + 2a_0.$$

Za $n = 1$ suma je prazna, pa je $a_1 = 2a_0$.
Dokazati da je

$$a_n = 2^n \qquad \text{za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Koristimo potpunu indukciju, počev od $n = 0$.
1° **Baza indukcije.** Važi

$$a_0 = 1 = 2^0. \qquad \checkmark$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve prethodne članove:

$$a_0 = 2^0, \qquad a_1 = 2^1, \qquad \ldots, \qquad a_{n-1} = 2^{n-1}.$$

3° **Indukcijski korak.** Koristeći rekurentnu vezu i indukcijsku hipotezu, dobijamo:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \cdots + a_1 + 2a_0 \\ &= 2^{n-1} + \cdots + 2^1 + 2 \cdot 1 \\ &= \underbrace{2^{n-1} + \cdots + 2^1 + 1}_{\text{geometrijska suma}} + 1 \\ &= 2^n - 1 + 1 \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Korišćenu geometrijsku sumu računamo na sledeći način:

$$S = 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1.$$

Množenjem sa 2 dobijamo

$$2S = 2^n + \cdots + 2^2 + 2.$$

Oduzimanjem sledi

$$S = 2S - S = 2^n - 1,$$

odnosno

$$\boxed{S = 2^n - 1}.$$

Prema principu potpune indukcije, formula $a_n = 2^n$ važi za svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zadatak 6 — Bernulijeva nejednakost

Dokazati da za svako $x \geq -1$ važi

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{za svako } n \in \mathbb{N}.$$

1° **Baza indukcije.** Za $n = 1$ proveravamo:

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x, \qquad 1 + x \geq 1 + x. \qquad \checkmark$$

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da važi

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

3° **Indukcijski korak.** Dokazujemo za $n+1$. Pošto je $1 + x \geq 0$, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\underbrace{(1+x)^{n+1}} &= \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipoteza}}}{\geq} (1+nx)(1+x) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \\
&= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\
&\geq \underbrace{1 + (n+1)x}.
\end{aligned}$$

Time je indukcijski korak završen. Prema principu matematičke indukcije, Bernulijeva nejednakost važi za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \geq -1$.

Zadatak 7

Nad alfabetom $\{a, b, c\}$ data su pravila:

$$c \xrightarrow{(1)} ac, \qquad c \xrightarrow{(2)} b.$$

(a) Naći jedno izvođenje reči $aaab$ iz reči c.
(b) Dokazati da su reči izvodive iz reči c baš reči iz skupa

$$\{a^n c \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b \mid n \geq 0\}.$$

Rešenje.

(a) Jedno traženo izvođenje je

$$c \xrightarrow{(1)} ac \xrightarrow{(1)} aac \xrightarrow{(1)} aaac \xrightarrow{(2)} aaab.$$

Ovo je izvođenje dužine 4.

(b) Dokaz razdvajamo na dva dela:

(1) Dokazujemo da su sve reči $a^n c$ i $a^n b$, za $n \geq 0$, izvodive iz reči c.
(2) Dokazujemo da ništa osim ovih reči ne možemo dobiti.

(1) Indukcijom po n.

1° **Baza indukcije.** Za $n = 0$ važi

$$a^0 c = c.$$

Ova reč je izvodiva iz reči c izvođenjem dužine 0.

Takođe je $a^0 b = b$, a izvođenje

$$c \xrightarrow{(2)} b$$

ima dužinu 1.

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da su reči $a^n c$ i $a^n b$ izvodive iz reči c, odnosno da postoje izvođenja

$$\underbrace{c \longrightarrow \cdots \longrightarrow a^n c}_{T_1}, \qquad \underbrace{c \longrightarrow \cdots \longrightarrow a^n b}_{T_2}.$$

3° **Indukcijski korak.** Dokazujemo da su reči $a^{n+1}c$ i $a^{n+1}b$ izvodive iz reči c:

$$\underbrace{c \longrightarrow \cdots \longrightarrow a^n c}_{T_1} \xrightarrow{(1)} \underbrace{a^n ac = a^{n+1}c}_{\substack{\text{dobili smo} \\ a^{n+1}c}} \xrightarrow{(2)} \underbrace{a^{n+1}b}_{\substack{\text{dobili smo} \\ a^{n+1}b}}.$$

Time je dokazan prvi deo tvrđenja.

(2) Dokazujemo indukcijom po dužini izvođenja.

1° **Baza indukcije.** Izvođenje dužine 0 daje reč

$$c = a^0 c,$$

što jeste u traženom skupu.

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da kad god je izvođenje dužine n, dobijamo reč oblika

$$a^k c \quad \text{ili} \quad a^k b, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

3° **Indukcijski korak.** Posmatrajmo neko izvođenje dužine $n+1$, kojim dobijamo reč w:

$$\underbrace{c \longrightarrow \cdots \longrightarrow (*)}_{n \text{ koraka}} \longrightarrow w.$$

Po indukcijskoj hipotezi, reč $(*)$ može biti samo $a^k c$ ili $a^k b$.

Ako je $(*) = a^k c$, moguće su sledeće transformacije:

$$a^k c \xrightarrow{(1)} a^k ac = a^{k+1}c,$$
$$a^k c \xrightarrow{(2)} a^k b.$$

U oba slučaja dobijena reč pripada traženom skupu.

Ako je $(*) = a^k b$, ne možemo primeniti nikakvu transformaciju, jer reč ne sadrži slovo c. Ovaj slučaj zato ne dolazi u obzir kao pretposlednja reč posmatranog izvođenja, jer smo krenuli od izvođenja dužine $n+1$.

Prema tome, iz reči c izvodive su baš reči iz skupa

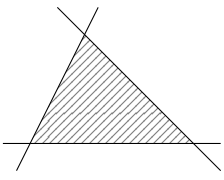
$$\{a^n c \mid n \geq 0\} \cup \{a^n b \mid n \geq 0\}.$$

Zadatak 8

Dokazati da $n \geq 3$ pravih u ravni koje se nalaze u opštem položaju (nikoje dve nisu paralelne i nikoje tri se ne seku u istoj tački) dele ravan na oblasti od kojih je bar jedna oblast trougao.

1° **Baza indukcije.**

Za $n = 3$ tvrđenje je trivijalno ispunjeno: tri prave u opštem položaju obrazuju trougaonu oblast.



2° **Indukcijska hipoteza.** Neka tvrđenje važi za neki $n \geq 3$.

3° **Indukcijski korak.** Proveravamo za $n+1$.

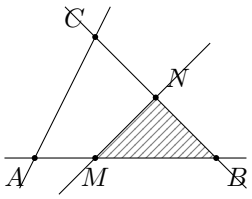
Raspored od $n+1$ pravih posmatramo kao n pravih kojima dodajemo još jednu pravu. Po indukcijskoj

hipotezi, n pravih određuje oblast koja je trougao.

Razlikujemo dva slučaja:

1° **Dodata prava ne seče dati trougao.**
Tada trougao ostaje jedna od oblasti, pa tvrđenje i dalje važi.

2° **Dodata prava seče dati trougao.**
Dodata prava ne prolazi kroz temena datog trougla, jer su prave u opštem položaju. Stoga ona seče unutrašnjost neke dve stranice trougla.
Bez umanjenja opštosti (BUO), neka seče AB i BC u tačkama M i N. Tada je MBN trougao, odnosno jedna od oblasti novog rasporeda.



U oba slučaja postoji trougaona oblast. Prema principu matematičke indukcije, tvrđenje važi za svako $n \geq 3$.

Zadatak 9

Dokazati da n pravih u ravni koje su u opštem položaju deli ravan na

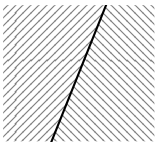
$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

oblasti.

1° **Baza indukcije.**

Za $n = 1$ jedna prava deli ravan na dve oblasti. Zaista,

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2.$$



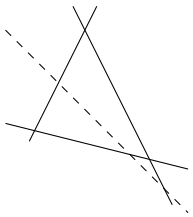
2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da n pravih u opštem položaju deli ravan na

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

oblasti.

3° **Indukcijski korak.** Dokazujemo tvrđenje za $n + 1$ pravih.

Imamo n pravih i dodajemo još jednu pravu.



Dodata prava seče sve ostale prave u n različitih tačaka, jer su prave u opštem položaju.
Te tačke dele dodatu pravu na $n + 1$ delova. Ona zato prolazi kroz $n + 1$ postojećih oblasti i svaku od tih oblasti deli na dva dela. Dakle, dobili smo još $n + 1$ novih oblasti.

Stoga, po indukcijskoj hipotezi, sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1\end{aligned}$$

oblasti.

Time je indukcijski korak završen. Prema principu matematičke indukcije, tvrđenje važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5.28

Niz formula $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ definisan je induktivno:

$$\alpha_1 = (p \to p_1), \qquad \alpha_{n+1} = \alpha_n \wedge (p_n \to p_{n+1}), \quad n \geq 1.$$

Dokazati da je za svako $n \geq 1$ formula

$$(\neg p_n \wedge \alpha_n) \Rightarrow \neg p$$

tautologija.

Rešenje. Dokazujemo indukcijom po n.

1° **Baza indukcije.** Za $n = 1$ posmatramo formulu

$$\big(\neg p_1 \wedge (p \to p_1)\big) \Rightarrow \neg p.$$

Ako je pretpostavka implikacije tačna, onda je p_1 netačno, a $p \to p_1$ tačno. Zato p mora biti netačno, odnosno $\neg p$ je tačno. Ako je pretpostavka netačna, implikacija je svakako tačna. Dakle, formula je tautologija.

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da je formula

$$(\neg p_n \wedge \alpha_n) \Rightarrow \neg p$$

tautologija.

3° **Indukcijski korak.** Treba dokazati da je

$$(\neg p_{n+1} \wedge \alpha_{n+1}) \Rightarrow \neg p$$

tautologija.

Posmatrajmo proizvoljnu valuaciju u kojoj je $\neg p_{n+1} \wedge \alpha_{n+1}$ tačno. Kako je

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \wedge (p_n \to p_{n+1}),$$

u toj valuaciji tačne su formule

$$\neg p_{n+1}, \qquad \alpha_n, \qquad p_n \to p_{n+1}.$$

Pošto je p_{n+1} netačno, a $p_n \to p_{n+1}$ tačno, sledi da je p_n netačno. Prema tome, $\neg p_n \wedge \alpha_n$ je tačno.

Po indukcijskoj hipotezi tada je i $\neg p$ tačno. Zato je tražena implikacija tautologija za $n + 1$.

Prema principu matematičke indukcije, tvrđenje važi za svako $n \geq 1$.

Zadatak 5.29

Niz formula $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ definisan je induktivno:

$$\alpha_1 = p, \qquad \alpha_{n+1} = (\alpha_n \leftrightarrow p), \quad n \geq 1.$$

Dokazati da je α_n tautologija ako i samo ako je n paran broj.

Rešenje. Dokazaćemo jače tvrđenje:

$$\alpha_{2k-1} \equiv p, \qquad \alpha_{2k} \equiv \top, \qquad k \geq 1.$$

Ovde $\equiv$ označava logičku ekvivalentnost, a $\top$ tautologiju, odnosno formulu koja je uvek tačna.

1° **Baza indukcije.** Za $k = 1$ važi

$$\alpha_1 = p, \qquad \alpha_2 = (\alpha_1 \leftrightarrow p) = (p \leftrightarrow p) \equiv \top.$$

Dakle, oba tvrđenja važe.

2° **Indukcijska hipoteza.** Pretpostavimo da za neko $k \geq 1$ važi

$$\alpha_{2k-1} \equiv p, \qquad \alpha_{2k} \equiv \top.$$

3° **Indukcijski korak.** Prema definiciji niza i indukcijskoj hipotezi:

$$\begin{aligned} \alpha_{2k+1} &= (\alpha_{2k} \leftrightarrow p) \\ &\equiv (\top \leftrightarrow p) \\ &\equiv p. \end{aligned}$$

Zatim dobijamo

$$\begin{aligned}\alpha_{2k+2} &= (\alpha_{2k+1} \leftrightarrow p)\\ &\equiv (p \leftrightarrow p)\\ &\equiv \top.\end{aligned}$$

Time su oba tvrđenja dokazana za $k+1$.

Prema principu matematičke indukcije, svi parni članovi niza su tautologije, dok su svi neparni članovi logički ekvivalentni formuli p.

Ako je n neparan, za netačno p i formula α_n je netačna, pa nije tautologija. Prema tome,

$$\boxed{\alpha_n \text{ je tautologija} \iff n \text{ je paran.}}$$