Uvod u matematičku logiku — 4. čas

Predikatska logika

Predikatska logika

Proširenje iskazne logike; uvodimo nove simbole:

1. Kvantifikatori

a) **univerzalni** ($\forall$) — „za svaki", „za proizvoljni", „za bilo koji", ...
b) **egzistencijalni** ($\exists$) — „postoji", „za neki", ...
c) **jedinstveni egzistencijalni** ($\exists!$) — „postoji jedinstveni".

Ako je $P(x)$ neko svojstvo objekta x, tada:

1) $(\forall x)\, P(x)$ — svaki ima svojstvo P.
2) $(\exists x)\, P(x)$ — neki ima svojstvo P.
3) $(\exists! x)\, P(x)$ — tačno jedan ima svojstvo P.

Za jedinstveni egzistencijalni kvantifikator važi:

$$(\exists! x)\, P(x) \iff (\exists x)\Big(P(x) \wedge (\forall y)\big(P(y) \Rightarrow y = x\big)\Big).$$

Stoga, $\exists!$ je izveden iz $\exists$ i $\forall$.

2. De-Morganovi zakoni

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)\, P(x) &\iff (\exists x)\, \neg P(x), \\ \neg(\exists x)\, P(x) &\iff (\forall x)\, \neg P(x). \end{aligned}$$

3. Redosled kvantifikatora

Ukoliko je $P(x, y)$ neko svojstvo objekata x i y, tada:

$$\begin{aligned} (\forall x)(\forall y)\, P(x,y) &\iff (\forall y)(\forall x)\, P(x,y), \\ (\exists x)(\exists y)\, P(x,y) &\iff (\exists y)(\exists x)\, P(x,y), \\ (\exists x)(\forall y)\, P(x,y) &\implies (\forall y)(\exists x)\, P(x,y). \end{aligned}$$

4. Primeri zapisivanja iskaza

1) **Kvadrat svakog realnog broja je nenegativan.**

$$(\forall x)\big(x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0\big).$$

2) **Jednačina $5x + 7 = 0$ ima rešenja u skupu racionalnih brojeva.**

$$(\exists x)\big(x \in \mathbb{Q} \wedge 5x + 7 = 0\big).$$

3) **Postoji najveći realan broj.**

$$(\exists x)\Big(x \in \mathbb{R} \wedge (\forall y)\big(y \in \mathbb{R} \Rightarrow y \leq x\big)\Big).$$

Napomena. Ne može $y < x$, jer za $y = x$ dobijamo $x < x$, što je netačno ($\bot$).

4) **Negacija prethodnog iskaza.**

$$\neg(\exists x)\Big(x \in \mathbb{R} \wedge (\forall y)\big(y \in \mathbb{R} \Rightarrow y \leq x\big)\Big) \iff \cdots$$

Naveli smo ranije:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

$$\left.\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q, \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \end{aligned}\right\} \text{ De-Morganovi zakoni.}$$

Nastavak 4. zadatka.

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)\neg\Big(x \in \mathbb{R} \wedge (\forall y)(y \in \mathbb{R} \Rightarrow y \leq x)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)\Big(\neg(x \in \mathbb{R}) \vee \neg(\forall y)(y \in \mathbb{R} \Rightarrow y \leq x)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)\Big(\neg(x \in \mathbb{R}) \vee (\exists y)\neg(y \in \mathbb{R} \Rightarrow y \leq x)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)\Big(\neg(x \in \mathbb{R}) \vee (\exists y)\neg\big(\neg(y \in \mathbb{R}) \vee (y \leq x)\big)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)\Big(\neg(x \in \mathbb{R}) \vee (\exists y)\big(\neg\neg(y \in \mathbb{R}) \wedge \neg(y \leq x)\big)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)\Big(\neg(x \in \mathbb{R}) \vee (\exists y)(y \in \mathbb{R} \wedge y > x)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)\Big(x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\exists y)(y \in \mathbb{R} \wedge y > x)\Big).
\end{aligned}
$$

„Od svakog realnog broja postoji veći realni broj."

5) **Postoji najviše jedan objekat sa svojstvom P.**

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(\forall y)\Big(\big(P(x) \wedge P(y)\big) \Rightarrow x = y\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)\Big(\neg\big(P(x) \wedge P(y)\big) \vee (x = y)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)\Big(\neg\big(P(x) \wedge P(y)\big) \vee \neg\neg(x = y)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)(\forall y)\neg\Big(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\forall x)\neg(\exists y)\Big(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)\Big) \\
&\quad \Longleftrightarrow \neg(\exists x)(\exists y)\Big(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y\Big).
\end{aligned}
$$

„Ne postoje dva različita objekta sa svojstvom P."

6) **Postoje tačno dva realna broja čiji je kvadrat jednak 2.**

$$
\begin{aligned}
(\exists x)(\exists y)\Big(&x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 2 \wedge y^2 = 2 \wedge x \neq y \\
&\wedge (\forall z)\big((z \in \mathbb{R} \wedge z^2 = 2) \Rightarrow (z = x \vee z = y)\big)\Big).
\end{aligned}
$$

2° Promenljive

Promenljive označavamo simbolima $x, y, z, \ldots$

3° Predikatski simboli

Simboli za označavanje:

- **konstanti** (2 iz prethodne rečenice),
- **funkcija**,
- **operacija** (+ iz rečenice 2),
- **relacija** (= u prethodnoj rečenici).

Većina matematike se može iskazati jezikom predikatske logike.

Slobodne i vezane promenljive

Definicija. Ako je α neka formula predikatske logike, kažemo da je pojavljivanje promenljive x **slobodno** u α ukoliko nije pod dejstvom kvantifikatora koji vezuje x. Inače je to pojavljivanje **vezano**.

Primeri.

1)

$$(\forall x)\, P\big(\underbrace{x}_{\text{vezana}}, \underbrace{y}_{\text{slobodna}}\big).$$

2)

$$(\exists x)\, Q\big(\underbrace{x}_{\text{vezano}}\big) \wedge (\forall y)(\forall z)\, R\big(\underbrace{x}_{\text{slobodno}}, \underbrace{y,z}_{\text{vezani}}\big).$$

Formalni jezici

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

Komutativnost

$$\begin{aligned} &\text{a) sabiranja:} && (\forall x)(\forall y)\big(x + y = y + x\big),\\ &\text{b) množenja:} && (\forall x)(\forall y)\big(x \cdot y = y \cdot x\big). \end{aligned}$$

Asocijativnost

$$\begin{aligned} &\text{a) sabiranja:} && (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((x + y) + z = x + (y + z)\big),\\ &\text{b) množenja:} && (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\big). \end{aligned}$$

Distributivnost

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big).$$

Drugi način zapisivanja

Drugi način da se ovo odradi jeste uvođenjem **formalnog jezika** u kom uzimamo sve iz iskazne logike, kvantifikatore, promenljive i dva pomoćna predikatska simbola S i P, u značenju:

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &\quad \text{je tačno ako i samo ako je } x + y = z,\\ P(x,y,z) &\quad \text{je tačno ako i samo ako je } x \cdot y = z. \end{aligned}$$

Komutativnost

$$\begin{aligned} &(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(S(x,y,z) \Rightarrow S(y,x,z)\big),\\ &(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(P(x,y,z) \Rightarrow P(y,x,z)\big). \end{aligned}$$

Asocijativnost

$$\begin{aligned} &(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall s)(\forall t)(\forall u)\\ &\quad\Big(S(x,y,s) \wedge S(s,z,t) \wedge S(y,z,u) \Rightarrow S(x,u,t)\Big),\\ &(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall s)(\forall t)(\forall u)\\ &\quad\Big(P(x,y,s) \wedge P(s,z,t) \wedge P(y,z,u) \Rightarrow P(x,u,t)\Big). \end{aligned}$$

Distributivnost

$$\begin{aligned} &(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall s)(\forall t)(\forall u)(\forall v)\\ &\quad\Big(S(y,z,s) \wedge P(x,s,t) \wedge P(x,y,u) \wedge P(x,z,v) \Rightarrow S(u,v,t)\Big). \end{aligned}$$

Ovo je korisno jer sada za ove rečenice možemo tražiti druge **modele** u kojima važe (iz geometrije, analize, verovatnoće, ...).

Od značaja je traženje rečenica koje uvek važe (u svakom modelu) — to su **valjane formule predikatske logike**.

2. $(\mathbb{R}^2, \in)$

Kreiramo opet formalni jezik u kom uzimamo sve iskazne simbole, kvantifikatore, promenljive i dodajemo tri predikatska simbola: M, V i D.

$M(x)$ je tačno ako i samo ako je x tačka,
$D(x)$ je tačno ako i samo ako je x prava,
$V(x, y)$ je tačno ako i samo ako tačka x pripada pravoj y ($x \in y$).

1) **Za svake dve različite tačke postoji prava koja ih sadrži.**

$$(\forall x)(\forall y)\Big(\big(M(x) \wedge M(y) \wedge \neg(x = y)\big) \Rightarrow (\exists z)\big(D(z) \wedge V(x, z) \wedge V(y, z)\big)\Big).$$

2) **Postoje paralelne međusobno različite prave.**
Napomena. U ravni smo, pa nemamo mogućnost da su dve prave mimoilazne. Stoga, prave su paralelne i različite ako i samo ako nemaju zajedničkih tačaka.

$$(\exists x)(\exists y)\Big(D(x) \wedge D(y) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(\exists z)\big(M(z) \wedge V(z, x) \wedge V(z, y)\big)\Big).$$

3) **Za svaku tačku i svaku pravu koja je ne sadrži postoji jedinstvena prava kroz zadatu tačku koja je paralelna sa zadatom pravom.**

3. $(\mathbb{N}, |, \leq)$

Formiramo formalni jezik uzimanjem logičkih veznika, kvantifikatora, promenljivih i dva predikatska simbola V i L, u značenju:

$V(x, y)$ je tačno ako i samo ako $x \mid y$,
$L(x, y)$ je tačno ako i samo ako $x \leq y$.

Ovde uzimamo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

1) **Zapisati formulu koja definiše broj 1.**

$\varphi(x)$: $(\forall y)\, V(x, y)$ (tačno ako i samo ako $x = 1$),
$\psi(x)$: $(\forall y)\, L(x, y)$ (tačno ako i samo ako $x = 1$).

Napomena. Formule φ i ψ su tu kako bismo izbegli korišćenje predikatskog simbola za konstantu 1.

2) **Napisati definiciju prostog broja.**

$$P(x): \quad \neg\varphi(x) \wedge (\forall y)\Big(V(y, x) \Rightarrow \big(\varphi(y) \vee (y = x)\big)\Big).$$

3) **Od svakog prirodnog broja postoji prost koji je od njega veći.**

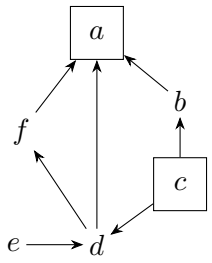
$$(\forall x)(\exists y)\big(P(y) \wedge L(x, y) \wedge \neg(x = y)\big).$$

Primena predikatske logike

1. Definisanje elemenata dijagrama

Neka $g(x, y)$ označava $x \to y$, a $r(x)$ da je x uokviren ($\boxed{x}$).

a) Za svaki element sledećeg dijagrama napisati formulu koja ga definiše.



$$
\begin{aligned}
\varphi_a(x):&\quad r(x)\wedge(\exists y)\,g(y,x),\\
\varphi_c(x):&\quad r(x)\wedge\neg\varphi_a(x),\\
\varphi_e(x):&\quad \neg(\exists y)\,g(y,x)\wedge\neg r(x),\\
\varphi_d(x):&\quad (\exists y)\big(g(y,x)\wedge\varphi_e(y)\big),\\
\varphi_f(x):&\quad (\exists y)\big(g(y,x)\wedge\varphi_d(y)\big)\wedge\neg r(x),\\
\varphi_b(x):&\quad \neg\varphi_a(x)\wedge\neg\varphi_c(x)\\
&\qquad\wedge\neg\varphi_e(x)\wedge\neg\varphi_d(x)\wedge\neg\varphi_f(x).
\end{aligned}
$$

b) Koji elementi zadovoljavaju formulu

$$(\forall y)\big(r(x)\Rightarrow\neg g(x,y)\big)?$$

Kada je $r(x)$ netačno, formula je tačna. Stoga, formulu zadovoljavaju b, d, f, e.

Za c: $r(x)$ je tačno, pa mora za svako y biti i $\neg g(x,y)$ tačno, tj. $g(x,y)$ netačno. Međutim, za $y=d$ je $g(x,y)$ tačno, pa c ne zadovoljava formulu.

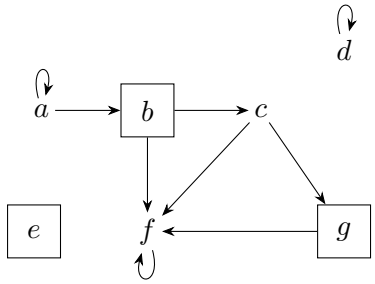
Za a: Mora $g(x,y)$ biti netačno za svako y, što jeste ispunjeno. Dakle, a zadovoljava formulu.

2. Opisivanje elemenata dijagrama

Sa $g(x,y)$ označavamo $x\to y$, a sa $r(x)$ da je x uokviren ($\boxed{x}$).

sve elemente.

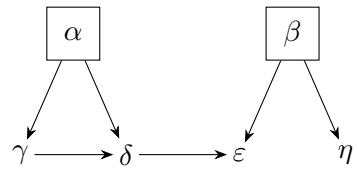
sve elemente.



$$
\begin{aligned}
\varphi_c(x):&\quad \neg r(x)\wedge\neg g(x,x),\\
\varphi_b(x):&\quad (\exists y)\big(g(x,y)\wedge\varphi_c(y)\big),\\
\varphi_a(x):&\quad (\exists y)\big(g(x,y)\wedge\varphi_b(y)\big),\\
\varphi_f(x):&\quad (\exists y)\big(g(y,x)\wedge\varphi_b(y)\big)\wedge\neg\varphi_c(x),\\
\varphi_d(x):&\quad g(x,x)\wedge\neg\varphi_a(x)\wedge\neg\varphi_f(x),\\
\varphi_e(x):&\quad r(x)\wedge\neg(\exists y)\,g(y,x),\\
\varphi_g(x):&\quad \neg\varphi_c(x)\wedge\neg\varphi_b(x)\wedge\neg\varphi_a(x)\\
&\qquad\wedge\neg\varphi_f(x)\wedge\neg\varphi_d(x)\wedge\neg\varphi_e(x).
\end{aligned}
$$

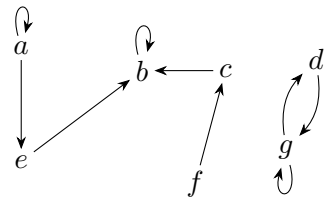
3. Opisivanje elemenata dijagrama

Sa $g(x,y)$ označavamo $x\to y$, a sa $r(x)$ da je x uokviren ($\boxed{x}$).
Opisati sve elemente.



$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha(x):&\quad r(x)\wedge(\exists y)(\exists z)\big(g(x,y)\wedge g(y,z)\big),\\
\varphi_\beta(x):&\quad r(x)\wedge\neg\varphi_\alpha(x),\\
\varphi_\gamma(x):&\quad \neg r(x)\wedge(\exists y)(\exists z)\big(g(x,y)\wedge g(y,z)\big),\\
\varphi_\delta(x):&\quad (\exists y)\big(g(y,x)\wedge\varphi_\gamma(y)\big),\\
\varphi_\varepsilon(x):&\quad (\exists y)\big(g(y,x)\wedge\varphi_\delta(y)\big),\\
\varphi_\eta(x):&\quad \neg\varphi_\alpha(x)\wedge\neg\varphi_\beta(x)\wedge\neg\varphi_\gamma(x)\\
&\qquad\wedge\neg\varphi_\delta(x)\wedge\neg\varphi_\varepsilon(x).
\end{aligned}
$$

4. Opisivanje elemenata dijagrama



$$
\begin{aligned}
\varphi_b(x): &\quad (\exists y)(\exists z)(\exists \omega)\big(g(y,x)\wedge g(z,x)\\
&\quad \wedge g(\omega,x)\wedge\neg(y=z)\wedge\neg(z=\omega)\wedge\neg(\omega=y)\big),\\
\varphi_g(x): &\quad g(x,x)\wedge(\exists y)\big(g(x,y)\wedge g(y,x)\wedge\neg(x=y)\big),\\
\varphi_d(x): &\quad (\exists y)\big(g(x,y)\wedge\varphi_g(y)\wedge\neg(x=y)\big),\\
\varphi_a(x): &\quad g(x,x)\wedge\neg\varphi_b(x)\wedge\neg\varphi_g(x),\\
\varphi_e(x): &\quad (\exists y)\big(g(y,x)\wedge\varphi_a(y)\big)\wedge\neg\varphi_a(x),\\
\varphi_c(x): &\quad (\exists y)\big(g(x,y)\wedge\varphi_b(y)\big)\\
&\quad \wedge\neg\varphi_e(x)\wedge\neg\varphi_b(x),\\
\varphi_f(x): &\quad \neg\varphi_b(x)\wedge\neg\varphi_g(x)\wedge\neg\varphi_d(x)\\
&\quad \wedge\neg\varphi_a(x)\wedge\neg\varphi_e(x)\wedge\neg\varphi_c(x).
\end{aligned}
$$

b) Koji elementi zadovoljavaju sledeće formule?

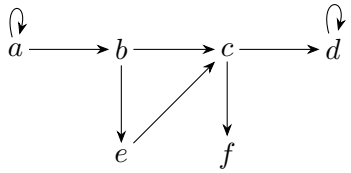
1) $(\forall y)\,\neg g(x,y)$.

2) $(\exists y)(\exists z)\big(g(y,x)\wedge g(x,z)\big)$.

3) $(\exists y)(\exists z)(\exists\omega)\big(g(y,x)\wedge g(z,x)\wedge g(\omega,x)\wedge y\neq z\wedge y\neq\omega\wedge z\neq\omega\big)$.

4) $(\forall y)\big(g(x,y)\iff g(y,x)\big)$.

5. Opisivanje elemenata dijagrama



$$
\begin{aligned}
\varphi_a(x): &\quad g(x,x)\wedge(\exists y)\big(g(x,y)\wedge\neg(x=y)\big),\\
\varphi_d(x): &\quad g(x,x)\wedge\neg\varphi_a(x),\\
\varphi_b(x): &\quad (\exists y)\big(g(y,x)\wedge\varphi_a(y)\big)\wedge\neg\varphi_a(x),\\
\varphi_c(x): &\quad (\exists y)\big(g(x,y)\wedge\varphi_d(y)\wedge\neg(x=y)\big),\\
\varphi_e(x): &\quad (\exists y)(\exists z)\big(g(y,x)\wedge\varphi_b(y)\\
&\quad \wedge g(x,z)\wedge\varphi_c(z)\big),\\
\varphi_f(x): &\quad \neg\varphi_a(x)\wedge\neg\varphi_d(x)\wedge\neg\varphi_b(x)\\
&\quad \wedge\neg\varphi_c(x)\wedge\neg\varphi_e(x).
\end{aligned}
$$

b) Koji elementi zadovoljavaju formule?

1)

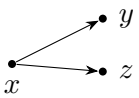
$$(\forall y)\big(g(x,x)\Rightarrow g(y,x)\big).$$

Kad god je $g(x,x)$ netačno, formula je tačna, pa je formula tačna za b,c,e,f.
Za a: $g(x,x)$ je tačno, pa za svako y mora $g(y,x)$ biti tačno. To nije ispunjeno (recimo $y=e$).
Za d: Nije ispunjeno (recimo $y=e$).

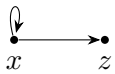
2)

$$(\exists y)(\exists z)\big(g(x,y)\wedge g(x,z)\wedge y\neq z\big).$$

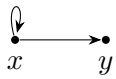
1° $x\neq y\neq z\neq x$ — b **i** c



2° $x=y\neq z$ — a

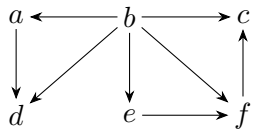


3° $x=z\neq y$ — a



Odgovor: a,b,c.

6. Opisivanje elemenata dijagrama



$$
\begin{aligned}
\varphi_b(x): \quad & (\forall y)\big(x \neq y \Rightarrow g(x,y)\big), \\
& \cancel{(\forall y)\big(g(x,y) \wedge x \neq y\big)} \\
\varphi_e(x): \quad & \neg\varphi_b(x) \wedge (\exists y)(\exists z)\big(g(x,y) \wedge g(y,z)\big), \\
\varphi_f(x): \quad & (\exists y)\big(g(y,x) \wedge \varphi_e(y)\big), \\
\varphi_c(x): \quad & (\exists y)\big(g(y,x) \wedge \varphi_f(y)\big), \\
\varphi_d(x): \quad & \neg(\exists y)\, g(x,y) \\
& \wedge \neg(\exists y)(\exists z)(\exists \omega)\big(\varphi_b(y) \wedge g(y,z) \\
& \qquad \wedge g(z,\omega) \wedge g(\omega,x)\big), \\
\varphi_a(x): \quad & \neg\varphi_b(x) \wedge \neg\varphi_e(x) \wedge \neg\varphi_f(x) \\
& \wedge \neg\varphi_c(x) \wedge \neg\varphi_d(x).
\end{aligned}
$$

b) Koji elementi zadovoljavaju formule?

1)

$$(\forall y)\, g(x,y).$$

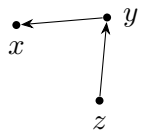
Nijedan, jer za $y = x$ formula zahteva petlju u x, a u dijagramu nema petlji.

2)

$$(\exists y)(\exists z)\big(g(y,x) \wedge g(z,y)\big).$$

$1^\circ \quad x \neq y \neq z \neq x$

c, d, f



$2^\circ \quad x = y = z$

Nijedan element.



$3^\circ \quad y = x \neq z$**.**

$g(y,x)$ **postaje** $g(x,x)$**. Nijedan element.**

$4^\circ \quad y = z \neq x$**.**

$g(z,y)$ **postaje** $g(y,y)$**. Nijedan element.**

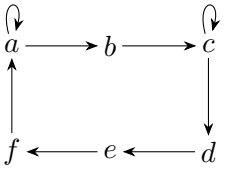
$5^\circ \quad x = z \neq y$**.**



Nijedan element.

Odgovor: c, d, f**.**

7. Opisivanje elemenata dijagrama



$$
\begin{aligned}
\varphi_b(x): \quad & (\exists y)(\exists z)\big(g(y,y) \wedge g(y,x) \\
& \qquad \wedge g(x,z) \wedge g(z,z) \wedge \neg(y = z)\big), \\
\varphi_a(x): \quad & g(x,x) \wedge (\exists y)\big(g(x,y) \wedge \varphi_b(y)\big), \\
\varphi_c(x): \quad & g(x,x) \wedge (\exists y)\big(g(y,x) \wedge \varphi_b(y)\big), \\
\varphi_d(x): \quad & (\exists y)\big(g(y,x) \wedge \varphi_c(y)\big) \wedge \neg\varphi_c(x), \\
\varphi_e(x): \quad & (\exists y)\big(\varphi_d(y) \wedge g(y,x)\big), \\
\varphi_f(x): \quad & (\exists y)\big(\varphi_a(y) \wedge g(x,y) \wedge \neg(x = y)\big).
\end{aligned}
$$

b) Koji elementi zadovoljavaju formulu

$$(\exists y)\big(g(x,y) \wedge g(y,y)\big)?$$