Uvod u matematičku logiku — 2. čas

Tablice istinitosti, tautologije i normalne forme

Osnovni pojmovi

Dodela istinitosnih vrednosti svakom iskaznom slovu pridružuje jednu od vrednosti t (istinito) ili n (neistinito). Na osnovu tih vrednosti i pravila za logičke veznike određuje se istinitosna vrednost cele formule.

- Formula je **tautologija** ako je istinita za **svaku** dodelu istinitosnih vrednosti. U poslednjoj koloni njene tablice istinitosti nalaze se samo vrednosti t.
- Formula je **poreciva** ako je neistinita za **bar jednu** dodelu istinitosnih vrednosti. U poslednjoj koloni njene tablice postoji bar jedna vrednost n.
- Formula je **zadovoljiva** ako je istinita za **bar jednu** dodelu istinitosnih vrednosti. U poslednjoj koloni njene tablice postoji bar jedna vrednost t.
- Formula je **kontradikcija** ako je neistinita za **svaku** dodelu istinitosnih vrednosti. U poslednjoj koloni njene tablice nalaze se samo vrednosti n.

Primeri. Formula $p \vee \neg p$ je tautologija, a formula $p \wedge \neg p$ je kontradikcija. Formula p je istovremeno zadovoljiva i poreciva: istinita je za $p = \mathrm{t}$, a neistinita za $p = \mathrm{n}$.

Napomena. Svaka tautologija je zadovoljiva, a svaka kontradikcija je poreciva.

Kako se popunjava tablica. Za k različitih iskaznih slova postoji 2^k dodela istinitosnih vrednosti, pa tablica ima 2^k redova. U svakom redu najpre računamo vrednosti najmanjih podformula, a zatim složenijih, sve do cele formule. Poslednja kolona daje vrednost cele formule; kod implikacije ona je neistinita tačno kada je pretpostavka istinita, a posledica neistinita.

Zadatak 1.56, 1.

Formirati tablicu istinitosti formule:

$$F = \big((p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)\big) \to \big((p \vee q) \to r\big).$$

Utvrditi da li je formula tautologija.

Rešenje. Radi preglednosti tablice, označimo:

$$A = (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r),$$
$$B = (p \vee q) \to r.$$

Tada je $F = A \to B$. Izračunavanjem vrednosti podformula dobijamo:

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$q \wedge \neg r$	A	$p \vee q$	B	$\boldsymbol{F}$
t	t	t	n	n	n	n	t	t	**t**
t	t	n	t	t	t	t	t	n	**n**
t	n	t	n	n	n	n	t	t	**t**
t	n	n	t	t	n	t	t	n	**n**
n	t	t	n	n	n	n	t	t	**t**
n	t	n	t	n	t	t	t	n	**n**
n	n	t	n	n	n	n	n	t	**t**
n	n	n	t	n	n	n	n	t	**t**

Formula je **zadovoljiva**, jer postoji dodela istinitosnih vrednosti za koju je istinita. Na primer, za $p = q = r = \mathrm{t}$ dobijamo $F = \mathrm{t}$.

Formula je **poreciva**, jer postoji dodela istinitosnih vrednosti za koju je neistinita. Na primer, za $p = q = \mathrm{t}$ i $r = \mathrm{n}$ dobijamo $F = \mathrm{n}$.

Formula nije tautologija.

U poslednjoj koloni tablice postoje vrednosti n, pa formula nije istinita za svaku dodelu istinitosnih vrednosti.

Zadatak 1.58, 5.

Utvrditi da li je formula tautologija:

$$G = (p \to q) \to \big((p \vee r) \to (q \vee r)\big).$$

Rešenje pomoću tablice istinitosti. Radi preglednosti označimo:

$$H = (p \vee r) \to (q \vee r).$$

Tada je $G = (p \to q) \to H$. Dobijamo sledeću tablicu:

p	q	r	$p \to q$	$p \vee r$	$q \vee r$	H	$\boldsymbol{G}$
t	t	t	t	t	t	t	**t**
t	t	n	t	t	t	t	**t**
t	n	t	n	t	t	t	**t**
t	n	n	n	t	n	n	**t**
n	t	t	t	t	t	t	**t**
n	t	n	t	n	t	t	**t**
n	n	t	t	t	t	t	**t**
n	n	n	t	n	n	t	**t**

U poslednjoj koloni nalaze se samo vrednosti t. Dakle, formula je istinita za svaku dodelu istinitosnih vrednosti:

Formula G je tautologija.

Valuacija i interpretacija formule

Neka je $\mathcal{S}$ skup iskaznih slova, a $\mathcal{F}$ skup svih iskaznih formula nad tim slovima. **Valuacija iskaznih slova** je funkcija:

$$v\colon \mathcal{S} \longrightarrow \{\mathrm{t}, \mathrm{n}\},$$

koja svakom iskaznom slovu pridružuje jednu istinitosnu vrednost. Na primer, $v(p) = \mathrm{t}$ znači da je slovu p dodeljena istinita vrednost.

Interpretacija formula pri valuaciji v je jedinstveno proširenje te valuacije na funkciju:

$$\widehat{v}\colon \mathcal{F} \longrightarrow \{\mathrm{t}, \mathrm{n}\}.$$

Vrednost $\widehat{v}(A)$ jeste istinitosna vrednost formule A pri valuaciji v. Za iskazno slovo p važi $\widehat{v}(p) = v(p)$, a vrednosti složenih formula određuju se rekurzivno, prema pravilima za logičke veznike:

$$\begin{aligned}
\widehat{v}(\neg A) = \mathrm{t} &\iff \widehat{v}(A) = \mathrm{n},\\
\widehat{v}(A \wedge B) = \mathrm{t} &\iff \widehat{v}(A) = \mathrm{t} \text{ i } \widehat{v}(B) = \mathrm{t},\\
\widehat{v}(A \vee B) = \mathrm{t} &\iff \widehat{v}(A) = \mathrm{t} \text{ ili } \widehat{v}(B) = \mathrm{t},\\
\widehat{v}(A \to B) = \mathrm{t} &\iff \widehat{v}(A) = \mathrm{n} \text{ ili } \widehat{v}(B) = \mathrm{t},\\
\widehat{v}(A \leftrightarrow B) = \mathrm{t} &\iff \widehat{v}(A) = \widehat{v}(B),\\
\widehat{v}(A \veebar B) = \mathrm{t} &\iff \widehat{v}(A) \neq \widehat{v}(B).
\end{aligned}$$

U svim ostalim slučajevima vrednost odgovarajuće složene formule je n.

Primer. Ako je $v(p) = \mathrm{t}$ i $v(q) = \mathrm{n}$, onda je:

$$\widehat{v}(p \to q) = \mathrm{n}, \qquad \widehat{v}(\neg q) = \mathrm{t}.$$

Dakle, izbor vrednosti iskaznih slova potpuno određuje vrednosti svih formula pri toj valuaciji.

Zadatak 1.58, 6.

Utvrditi da li je formula tautologija:

$$K = \big((p \to q) \wedge (r \to s)\big) \to \big((p \vee r) \to (q \vee s)\big).$$

Rešenje svođenjem na protivrečnost. Za četiri iskazna slova tablica bi imala $2^4 = 16$ redova. Umesto tablice, pretpostavićemo da formula nije tautologija i pokazati da ta pretpostavka vodi u protivrečnost.

Pretpostavimo da postoji valuacija v za koju je $\widehat{v}(K) = \mathrm{n}$. Implikacija je neistinita samo kada je njena leva strana istinita, a desna neistinita. Zato mora važiti:

$$\begin{aligned}
\widehat{v}\big((p \to q) \wedge (r \to s)\big) &= \mathrm{t},\\
\widehat{v}\big((p \vee r) \to (q \vee s)\big) &= \mathrm{n}.
\end{aligned}$$

Iz prvog uslova dobijamo:

$$\widehat{v}(p \to q) = \mathrm{t}, \qquad \widehat{v}(r \to s) = \mathrm{t}.$$

Iz drugog uslova, ponovo po pravilu za neistinitu implikaciju, sledi:

$$\widehat{v}(p \vee r) = \mathrm{t}, \qquad \widehat{v}(q \vee s) = \mathrm{n}.$$

Disjunkcija je neistinita samo kada su oba njena člana neistinita, pa je:

$$v(q) = \mathrm{n}, \qquad v(s) = \mathrm{n}.$$

Pošto je $\widehat{v}(p \vee r) = \mathrm{t}$, bar jedno od iskaznih slova p i r ima vrednost t. Razmatramo oba moguća slučaja:

- Ako je $v(p) = \mathrm{t}$, pošto je $v(q) = \mathrm{n}$, dobijamo $\widehat{v}(p \to q) = \mathrm{n}$. To je protivrečno uslovu $\widehat{v}(p \to q) = \mathrm{t}$.
- Ako je $v(r) = \mathrm{t}$, pošto je $v(s) = \mathrm{n}$, dobijamo $\widehat{v}(r \to s) = \mathrm{n}$. To je protivrečno uslovu $\widehat{v}(r \to s) = \mathrm{t}$.

U svakom slučaju dobijamo protivrečnost. Zato ne postoji dodela za koju je K neistinita, pa zaključujemo:

$$\boxed{\text{Formula } K \text{ je tautologija.}}$$

Stav o zameni logički ekvivalentnih formula

Neka su $\varphi_1 = \varphi_1(p_1, \ldots, p_n)$, $\varphi_2 = \varphi_2(p_1, \ldots, p_n)$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ i $\theta_1, \ldots, \theta_n$ iskazne formule takve da važi:

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2, \qquad \psi_i \Leftrightarrow \theta_i \quad \text{za sve } i = 1, \ldots, n.$$

Tada važi:

$$\boxed{\varphi_1(\psi_1, \ldots, \psi_n) \Leftrightarrow \varphi_2(\theta_1, \ldots, \theta_n)}.$$

Ovde $\Leftrightarrow$ označava logičku ekvivalentnost formula, a $\varphi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ formulu dobijenu istovremenom zamenom svakog iskaznog slova p_i formulom ψ_i.

Zadatak 1.66: ekvivalentne formule

Dokazati da su sledeće formule ekvivalentne:

1. $(\neg p \vee q) \to (r \leftrightarrow s)$ i $\neg(p \to q) \vee (s \leftrightarrow r)$;
2. $(\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)$ i $p \to q$.

1) Rešenje

Uočimo formule:

$$\varphi_1(u, v) = u \to v, \qquad \varphi_2(u, v) = \neg u \vee v.$$

One su logički ekvivalentne, jer važi $(u \to v) \Leftrightarrow (\neg u \vee v)$. Formule iz prvog dela zadatka možemo zapisati kao:

$$\varphi_1(\neg p \vee q,\, r \leftrightarrow s) \qquad \text{i} \qquad \varphi_2(p \to q,\, s \leftrightarrow r).$$

Po istom zakonu za implikaciju i po komutativnosti ekvivalencije imamo:

$$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \to q), \qquad (r \leftrightarrow s) \Leftrightarrow (s \leftrightarrow r).$$

Primenom prethodnog stava o zameni logički ekvivalentnih formula zaključujemo:

$$\varphi_1(\neg p \vee q,\, r \leftrightarrow s) \Leftrightarrow \varphi_2(p \to q,\, s \leftrightarrow r).$$

Dakle:

$$\boxed{\big((\neg p \vee q) \to (r \leftrightarrow s)\big) \Leftrightarrow \big(\neg(p \to q) \vee (s \leftrightarrow r)\big)}.$$

2) Rešenje

Koristeći zakon za implikaciju, De Morganov zakon i zakon dvostruke negacije, dobijamo:

$$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \to q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q).$$

Primenom prethodnog stava zato imamo:

$$(\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to q).$$

Po zakonu idempotencije $(u \wedge u) \Leftrightarrow u$ sledi:

$$\big((p \to q) \wedge (p \to q)\big) \Leftrightarrow (p \to q).$$

Dakle, polazna i krajnja formula su logički ekvivalentne:

$$\boxed{\big((\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)\big) \Leftrightarrow (p \to q)}.$$

Zadatak 1.67: dokazivanje tautologija ekvivalentnim transformacijama

Koristeći ekvivalentne transformacije dokazati da su sledeće formule tautologije:

1. $p \to (q \to p)$;
2. $(p \leftrightarrow q) \veebar (p \leftrightarrow \neg q)$.

Oznaka $\top$ predstavlja stalno istinitu formulu. Simbol $\veebar$ označava isključivu disjunkciju: formula je istinita samo kada je tačno jedan od njena dva člana je istinit.

1) Rešenje

Imamo:

$$\begin{aligned} p \to (q \to p) &\Leftrightarrow \neg p \vee (q \to p) \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow \top \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow \top. \end{aligned}$$

U prva dva koraka koristili smo zakon $(u \to v) \Leftrightarrow (\neg u \vee v)$. U trećem koraku koristili smo asocijativnost i komutativnost disjunkcije, u četvrtom zakon isključenja trećeg $(\neg p \vee p) \Leftrightarrow \top$, a u poslednjem zakon $(\top \vee u) \Leftrightarrow \top$. Kako je polazna formula ekvivalentna stalno istinitoj formuli, i sama je tautologija:

$$\boxed{p \to (q \to p) \Leftrightarrow \top}.$$

2) Rešenje

Koristimo zakone:

$$(u \leftrightarrow \neg v) \Leftrightarrow \neg(u \leftrightarrow v), \qquad (u \veebar \neg v) \Leftrightarrow (u \leftrightarrow v).$$

Primenom ovih zakona i prethodnog stava o zameni logički ekvivalentnih formula dobijamo:

$$\begin{aligned} (p \leftrightarrow q) \veebar (p \leftrightarrow \neg q) &\Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \veebar \neg(p \leftrightarrow q) \\ &\Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \\ &\Leftrightarrow \top. \end{aligned}$$

U poslednjem koraku koristili smo zakon $(u \leftrightarrow u) \Leftrightarrow \top$. Dakle, i ova formula je tautologija:

$$\boxed{\big((p \leftrightarrow q) \veebar (p \leftrightarrow \neg q)\big) \Leftrightarrow \top}.$$

Konjunktivna i disjunktivna normalna forma

Literal je iskazno slovo ili njegova negacija. Na primer, p, $\neg p$, q i $\neg r$ su literali.

Konjunktivna normalna forma (KNF) je konjunkcija disjunkcija literala, odnosno formula oblika:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} \ell_{ij} \right),$$

gde su ℓ_{ij} literali, a $m \geq 1$ i $k_i \geq 1$. Svaka disjunkcija literala u ovoj konjunkciji naziva se **klauzula**. Na primer, formula

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$$

je u KNF.

Disjunktivna normalna forma (DNF) je disjunkcija konjunkcija literala, odnosno formula oblika:

$$\bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} \ell_{ij} \right),$$

gde su ℓ_{ij} literali, a $m \geq 1$ i $k_i \geq 1$. Na primer, formula

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee q$$

je u DNF.

Dozvoljeni su i članovi koji sadrže samo jedan literal, kao i normalne forme sa samo jednim članom. Zato je svaki literal istovremeno i u KNF i u DNF. Kao granične slučajeve dopuštamo i stalne formule $\top$ i $\bot$.

KNF, odnosno DNF, date formule jeste formula odgovarajućeg oblika koja je **logički ekvivalentna** datoj formuli. Normalne forme nisu jedinstvene. Ne zahteva se da se svako iskazno slovo pojavi u svakoj klauzuli KNF ili u svakom članu DNF.

Algoritam transformacije u KNF i DNF

U sledećim zakonima A, B i C označavaju proizvoljne formule. Svaki korak postupka čuva logičku ekvivalentnost.

1. **Eliminisati implikaciju, ekvivalenciju i isključivu disjunkciju.** Koristiti zakone:

$$\begin{aligned}(A \to B) &\Leftrightarrow \neg A \vee B,\\ (A \leftrightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A),\\ (A \leftrightarrow B) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B),\\ (A \veebar B) &\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B).\end{aligned}$$

   Pri određivanju KNF pogodniji je prvi prikaz ekvivalencije, a pri određivanju DNF drugi.

2. **Spustiti negacije do iskaznih slova.** Ponavljati primenu De Morganovih zakona i zakona dvostruke negacije dok se negacije ne pojavljuju samo ispred iskaznih slova:

$$\begin{aligned}\neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B,\\ \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B,\\ \neg\neg A &\Leftrightarrow A.\end{aligned}$$

   Tada formula sadrži samo literale povezane veznicima $\wedge$ i $\vee$.

3. **Primeniti distributivnost u odgovarajućem smeru.** Za **KNF** distribuirati disjunkciju preko konjunkcije:

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

   Ponavljati dok se ne dobije konjunkcija disjunkcija literala. Za **DNF** distribuirati konjunkciju preko disjunkcije:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

   Ponavljati dok se ne dobije disjunkcija konjunkcija literala. Asocijativnost i komutativnost omogućavaju potrebno preuređivanje članova i zagrada.

4. **Po potrebi pojednostaviti rezultat.** Koristiti idempotenciju, apsorpciju i zakone $(A \vee \neg A) \Leftrightarrow \top$ i $(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow \bot$. U KNF može se ukloniti cela klauzula koja sadrži literal i njegovu negaciju, a u DNF ceo konjunktivni član koji ih sadrži. Oznaka $\bot$ predstavlja stalno neistinitu formulu.

Primer: KNF i DNF iz tablice za $\alpha(p, q, r)$

Normalne forme možemo dobiti i neposredno iz tablice istinitosti. Ovim postupkom dobijamo **kanonsku DNF (KDNF)** i **kanonsku KNF (KKNF)**: svaki konjunktivni član KDNF, odnosno svaka klauzula KKNF, sadrži sva iskazna slova formule, svako tačno jednom, pozitivno ili negirano. Kanonske forme su poseban slučaj DNF i KNF; obične normalne forme ne moraju sadržati sva slova u svakom članu.

Pravilo izbora literala. U DNF biramo redove u kojima je formula istinita i za svaki gradimo konjunkciju čiji su svi literali u tom redu istiniti. U KNF biramo redove u kojima je formula neistinita i za svaki gradimo disjunkciju čiji su svi literali u tom redu neistiniti. Zato su pravila za izbor znaka različita:

Vrednost slova p	Literal u članu DNF	Literal u klauzuli KNF
t	p	$\neg p$
n	$\neg p$	p

Isto pravilo primenjujemo na svako iskazno slovo.

Neka formula $\alpha = \alpha(p, q, r)$ ima sledeću tablicu:

Red	p	q	r	$\boldsymbol{\alpha}$
1	t	t	t	t
2	t	t	n	n
3	t	n	t	n
4	t	n	n	t
5	n	t	t	n
6	n	t	n	t
7	n	n	t	n
8	n	n	n	n

Izgradnja DNF. Formula je istinita u redovima 1, 4 i 6. Za svaki od tih redova zapisujemo konjunkciju svih slova: slovo ostaje bez negacije ako ima vrednost t, a negira se ako ima vrednost n.

$$(\mathrm{t}, \mathrm{t}, \mathrm{t}) \longmapsto p \wedge q \wedge r,$$
$$(\mathrm{t}, \mathrm{n}, \mathrm{n}) \longmapsto p \wedge \neg q \wedge \neg r,$$
$$(\mathrm{n}, \mathrm{t}, \mathrm{n}) \longmapsto \neg p \wedge q \wedge \neg r.$$

Na primer, konjunkcija $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ istinita je tačno u četvrtom redu: tada su sva tri literala istinita. U svakom drugom redu bar jedan od njih je neistinit.

Dobijene konjunkcije povezujemo disjunkcijom:

$$\boxed{\begin{aligned} D_\alpha = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r). \end{aligned}}$$

Svaki član prepoznaje jedan izabrani red, pa je cela disjunkcija istinita tačno u redovima 1, 4 i 6. Zato je $\alpha \Leftrightarrow D_\alpha$ i D_α je KDNF formule α.

Izgradnja KNF. Formula je neistinita u redovima 2, 3, 5, 7 i 8. Za svaki od tih redova zapisujemo disjunkciju svih slova: slovo negiramo ako ima vrednost t, a ostavljamo bez negacije ako ima vrednost

n.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{t},\mathrm{t},\mathrm{n}) &\longmapsto \neg p \vee \neg q \vee r,\\
(\mathrm{t},\mathrm{n},\mathrm{t}) &\longmapsto \neg p \vee q \vee \neg r,\\
(\mathrm{n},\mathrm{t},\mathrm{t}) &\longmapsto p \vee \neg q \vee \neg r,\\
(\mathrm{n},\mathrm{n},\mathrm{t}) &\longmapsto p \vee q \vee \neg r,\\
(\mathrm{n},\mathrm{n},\mathrm{n}) &\longmapsto p \vee q \vee r.
\end{aligned}$$

Na primer, klauzula $\neg p \vee \neg q \vee r$ neistinita je tačno u drugom redu: tada su sva tri literala neistinita. U svakom drugom redu bar jedan od njih je istinit.

Dobijene klauzule povezujemo konjunkcijom:

$$\boxed{\begin{aligned}K_\alpha = {} & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)\\ & \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)\\ & \wedge (p \vee q \vee r).\end{aligned}}$$

U svakom neistinitom redu formule α jedna od klauzula je neistinita, pa je cela konjunkcija neistinita. U redovima 1, 4 i 6 sve klauzule su istinite. Zato je $\alpha \Leftrightarrow K_\alpha$ i K_α je KKNF formule α.

Ovaj postupak pokazuje da se svaka kolona istinitosnih vrednosti može predstaviti formulom. Dobijene forme mogu se dalje pojednostavljivati; pri tome ostaju ekvivalentne formuli α, ali ne moraju ostati kanonske.

Posebni slučajevi. Ako nema istinitih redova, DNF zapisujemo kao $\bot$; ako nema neistinitih redova, KNF zapisujemo kao $\top$. To odgovara konvencijama da je prazna disjunkcija $\bot$, a prazna konjunkcija $\top$.

Zadatak: određivanje KNF i DNF

Odrediti KNF i DNF formule:

$$F = (p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee s).$$

1) Određivanje KNF

Ekvivalenciju zapisujemo kao konjunkciju dve implikacije, zatim eliminišemo implikacije i primenjujemo De Morganove zakone:

$$\begin{aligned}
F &\Leftrightarrow \big((p \wedge q) \to (r \vee s)\big) \wedge \big((r \vee s) \to (p \wedge q)\big)\\
&\Leftrightarrow \big(\neg(p \wedge q) \vee (r \vee s)\big) \wedge \big(\neg(r \vee s) \vee (p \wedge q)\big)\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge \big((\neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q)\big).
\end{aligned}$$

Prvi član je već disjunkcija literala. Na drugi član primenjujemo distributivnost:

$$\begin{aligned}
(\neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q) &\Leftrightarrow \big((\neg r \wedge \neg s) \vee p\big) \wedge \big((\neg r \wedge \neg s) \vee q\big)\\
&\Leftrightarrow (p \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg s).
\end{aligned}$$

Zato je jedna KNF date formule:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{KNF}(F) = {} & (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s)\\ & \wedge (p \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg s)\\ & \wedge (q \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg s).\end{aligned}}$$

Dobijeni izraz je konjunkcija pet disjunkcija literala.

2) Određivanje DNF

Ekvivalencija je istinita kada su oba njena člana istinita ili kada su oba neistinita. Zato:

$$\begin{aligned} F &\Leftrightarrow \big((p \wedge q) \wedge (r \vee s)\big) \vee \big(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(r \vee s)\big) \\ &\Leftrightarrow \big(p \wedge q \wedge (r \vee s)\big) \vee \big((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge \neg s\big). \end{aligned}$$

Primenom distributivnosti konjunkcije preko disjunkcije dobijamo:

$$\begin{gathered} p \wedge q \wedge (r \vee s) \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge s), \\ (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \wedge \neg s \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg q \wedge \neg r \wedge \neg s). \end{gathered}$$

Zato je jedna DNF date formule:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{DNF}(F) = {} & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge s) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg q \wedge \neg r \wedge \neg s). \end{aligned}}$$

Dobijeni izraz je disjunkcija četiri konjunkcije literala. Obe normalne forme su logički ekvivalentne polaznoj formuli.

Zadatak 1.73

Odrediti sve međusobno neekvivalentne formule $\varphi = \varphi(p, q, r)$ takve da je formula:

$$\theta = \big((p \wedge q) \leftrightarrow \varphi\big) \to (q \wedge r)$$

tautologija.

Rešenje. Odredimo moguće tablice formule φ. Sa v_i označimo valuaciju iz i-tog reda tablice, a sa $x_i = \widehat{v_i}(\varphi)$ vrednost formule φ pri toj valuaciji, za $i = 1, \ldots, 8$. Svako x_i pripada skupu $\{\mathrm{t}, \mathrm{n}\}$; $\neg x_i$ označava suprotnu istinitosnu vrednost.

Pri računanju koristimo pravila za istinitosne vrednosti:

$$\mathrm{t} \leftrightarrow x = x, \qquad \mathrm{n} \leftrightarrow x = \neg x, \qquad x \to \mathrm{n} = \neg x, \qquad x \to \mathrm{t} = \mathrm{t}.$$

Dobijamo:

p	q	r	φ	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \varphi$	$q \wedge r$	$\boldsymbol{\theta}$
t	t	t	x_1	t	x_1	t	t
t	t	n	x_2	t	x_2	n	$\neg x_2$
t	n	t	x_3	n	$\neg x_3$	n	x_3
t	n	n	x_4	n	$\neg x_4$	n	x_4
n	t	t	x_5	n	$\neg x_5$	t	t
n	t	n	x_6	n	$\neg x_6$	n	x_6
n	n	t	x_7	n	$\neg x_7$	n	x_7
n	n	n	x_8	n	$\neg x_8$	n	x_8

Da bi θ bila tautologija, sve vrednosti u poslednjoj koloni moraju biti t. Zato:

$$x_2 = \mathrm{n}, \qquad x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = \mathrm{t},$$

dok su x_1 i x_5 proizvoljni. U prvom i petom redu konsekvens $q \wedge r$ već je istinit, pa je implikacija θ istinita bez obzira na vrednost φ. Zato x_1 i x_5 možemo birati nezavisno. Imamo $2^2 = 4$ moguće tablice:

p	q	r	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
t	t	t	t	t	n	n
t	t	n	n	n	n	n
t	n	t	t	t	t	t
t	n	n	t	t	t	t
n	t	t	t	n	t	n
n	t	n	t	t	t	t
n	n	t	t	t	t	t
n	n	n	t	t	t	t

Predstavnike konstruišemo pomoću prethodnog postupka za KNF: biramo redove u kojima je odgovarajuća formula neistinita. Na primer, φ_2 je neistinita u redovima $(\mathrm{t},\mathrm{t},\mathrm{n})$ i $(\mathrm{n},\mathrm{t},\mathrm{t})$. Njima odgovaraju klauzule $\neg p \vee \neg q \vee r$ i $p \vee \neg q \vee \neg r$; njihova konjunkcija ima upravo tablicu formule φ_2. Na isti način dobijamo:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \neg p \vee \neg q \vee r,\\
\varphi_2 &= (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r),\\
\varphi_3 &= (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r),\\
\varphi_4 &= (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)\\
&\quad \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r).
\end{aligned}$$

Dve formule su logički ekvivalentne tačno kada imaju iste vrednosti u svim redovima tablice. Zato ove četiri različite kolone određuju tačno četiri klase ekvivalentnih formula:

Postoje četiri međusobno neekvivalentna predstavnika.

Zadatak 1.74

Odrediti sve međusobno neekvivalentne formule $\varphi = \varphi(p,q,r)$ takve da je formula:

$$\theta = \big((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \varphi\big) \wedge (r \to \varphi)$$

kontradikcija.

Rešenje. Ponovo označimo sa $x_i = \widehat{v_i}(\varphi)$ vrednosti formule φ u odgovarajućim redovima tablice:

p	q	r	φ	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \varphi$	$r \to \varphi$	$\boldsymbol{\theta}$
t	t	t	x_1	t	x_1	x_1	x_1
t	t	n	x_2	t	x_2	t	x_2
t	n	t	x_3	n	$\neg x_3$	x_3	n
t	n	n	x_4	n	$\neg x_4$	t	$\neg x_4$
n	t	t	x_5	n	$\neg x_5$	x_5	n
n	t	n	x_6	n	$\neg x_6$	t	$\neg x_6$
n	n	t	x_7	t	x_7	x_7	x_7
n	n	n	x_8	t	x_8	t	x_8

U trećem i petom redu koristili smo $\neg x_i \wedge x_i = \mathrm{n}$, a u prvom i sedmom $x_i \wedge x_i = x_i$.

Da bi θ bila kontradikcija, sve vrednosti u poslednjoj koloni moraju biti n. Zato:

$$x_1 = x_2 = x_7 = x_8 = \mathrm{n}, \qquad x_4 = x_6 = \mathrm{t},$$

dok su x_3 i x_5 proizvoljni. U trećem i petom redu θ je neistinita za obe moguće vrednosti x_i, jer se javlja konjunkcija $\neg x_i \wedge x_i$. Zato ti redovi ne postavljaju dodatne uslove na φ. Imamo četiri mogućnosti:

p	q	r	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
t	t	t	n	n	n	n
t	t	n	n	n	n	n
t	n	t	t	t	n	n
t	n	n	t	t	t	t
n	t	t	t	n	t	n
n	t	n	t	t	t	t
n	n	t	n	n	n	n
n	n	n	n	n	n	n

Za prvu formulu možemo uzeti $\varphi_1 = p \veebar q$. Njena vrednost zavisi samo od toga da li se p i q razlikuju, pa promena vrednosti slova r ne menja rezultat. Za ostale biramo DNF dobijene iz redova u kojima je vrednost odgovarajuće formule t:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= p \veebar q,\\
\varphi_2 &= (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r),\\
\varphi_3 &= (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r),\\
\varphi_4 &= (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r).
\end{aligned}$$

Na primer, φ_4 je istinita samo u redovima $(\mathrm{t}, \mathrm{n}, \mathrm{n})$ i $(\mathrm{n}, \mathrm{t}, \mathrm{n})$. Prvi red daje konjunkciju $p \wedge \neg q \wedge \neg r$, a drugi $\neg p \wedge q \wedge \neg r$. Njihova disjunkcija zato ima tačno željene istinite redove. Ove formule imaju različite tablice i iscrpljuju sve mogućnosti:

Postoje četiri međusobno neekvivalentna predstavnika.

Zadatak 1.75

Koliko ima neekvivalentnih parova formula $\varphi = \varphi(p, q)$ i $\psi = \psi(p, q)$ takvih da je formula:

$$\theta = (\varphi \to p) \veebar (\psi \wedge q)$$

tautologija? Ako je ψ kontradikcija, odrediti sve formule φ takve da je θ tautologija.

1) Broj neekvivalentnih parova

Označimo sa $x_i = \widehat{v_i}(\varphi)$ i $y_i = \widehat{v_i}(\psi)$ vrednosti formula u odgovarajućim valuacijama. Moguće tablice imaju oblik:

p	q	φ	ψ	$\varphi \to p$	$\psi \wedge q$	$\boldsymbol{\theta}$
t	t	x_1	y_1	t	y_1	$\neg y_1$
t	n	x_2	y_2	t	n	t
n	t	x_3	y_3	$\neg x_3$	y_3	$\neg x_3 \veebar y_3$
n	n	x_4	y_4	$\neg x_4$	n	$\neg x_4$

Da bi θ bila tautologija, mora biti:

$$y_1 = \mathrm{n}, \qquad x_4 = \mathrm{n}, \qquad x_3 = y_3.$$

Poslednji uslov sledi iz toga što je $\neg x_3 \veebar y_3 = \mathrm{t}$ tačno kada je $x_3 = y_3$. Zajedničku vrednost $x_3 = y_3$ možemo izabrati na dva načina, a x_1, x_2, y_2 i y_4 potpuno su proizvoljni. Uslov $x_3 = y_3$ predstavlja jedan slobodan izbor: dozvoljeni su samo parovi (t, t) i (n, n). Ne biramo x_3 i y_3 nezavisno. Dakle, imamo pet nezavisnih izbora između dve vrednosti:

$$\boxed{2^5 = 32}.$$

Isti broj dobijamo brojanjem po redovima tablice: redom imamo 2, 4, 2 i 2 mogućnosti za par (x_i, y_i), pa je $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

2) Slučaj kada je ψ kontradikcija

Tada je $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = \mathrm{n}$. Prethodni uslovi daju:

$$x_3 = x_4 = \mathrm{n},$$

dok su x_1 i x_2 proizvoljni. Imamo četiri moguće tablice formule φ:

p	q	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
t	t	t	t	n	n
t	n	t	n	t	n
n	t	n	n	n	n
n	n	n	n	n	n

Možemo uzeti predstavnike:

$$\boxed{\varphi_1 = p, \qquad \varphi_2 = p \wedge q, \qquad \varphi_3 = p \wedge \neg q, \qquad \varphi_4 = \bot}.$$

Sve tražene formule φ logički su ekvivalentne jednoj od ove četiri formule.

Potpuni sistemi veznika

Definicija. Skup veznika S je **potpun sistem veznika** ako se svaka iskazna formula može izraziti korišćenjem isključivo veznika iz skupa S. Preciznije, za svaku formulu $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$, gde je $n \geq 1$, postoji formula $\psi(p_1, \ldots, p_n)$ koja koristi samo veznike iz S i za koju važi:

$$\varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Dakle, tražimo formulu sa istom tablicom istinitosti. Zapis formule može se promeniti, ali vrednost pri svakoj valuaciji mora ostati ista.

Pri ispitivanju potpunosti formule gradimo od dostupnih iskaznih slova i veznika iz posmatranog skupa. Oznake $\top$ i $\bot$ nisu nezavisno dopuštene konstante: mogu se koristiti kao skraćenice tek kada odgovarajuću tautologiju i kontradikciju izrazimo pomoću dozvoljenih veznika. Pretpostavljamo da imamo bar jedno dostupno iskazno slovo.

Oznake. U ovom odeljku koristimo 1 za istinitu vrednost t, a 0 za neistinitu vrednost n. I dalje razlikujemo valuaciju v na slovima i njeno proširenje $\widehat{v}$ na formulama.

Primeri potpunih sistema veznika

Posledica 1. Skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je potpun sistem veznika.

Objašnjenje. Svaka iskazna formula ima ekvivalentnu KNF i DNF, a u tim normalnim formama koriste se samo negacija, konjunkcija i disjunkcija. Zato se svi ostali veznici mogu eliminisati. Stalno istinitu i stalno neistinitu vrednost možemo izraziti formulama $p \vee \neg p$ i $p \wedge \neg p$.

Posledica 2. Skup $\{\neg, \wedge\}$ je potpun sistem veznika.

Dokaz. Pošto je prethodni sistem potpun, dovoljno je pokazati da disjunkciju možemo izraziti pomoću negacije i konjunkcije. Po De Morganovom zakonu i dvostrukoj negaciji:

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B).$$

U normalnoj formi zamenimo svako pojavljivanje disjunkcije ovim izrazom. Dobijena formula koristi samo $\neg$ i $\wedge$, a ostaje ekvivalentna polaznoj formuli.

Posledica 3. Skup $\{\neg, \vee\}$ je potpun sistem veznika.

Dokaz. Dovoljno je izraziti konjunkciju pomoću negacije i disjunkcije:

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B).$$

Zamenom svih pojavljivanja konjunkcije dobijamo ekvivalentnu formulu koja koristi samo $\neg$ i $\vee$.

Ovi dokazi daju i postupak prevođenja: najpre formulu zapišemo pomoću poznatog potpunog sistema, a zatim svaki nedozvoljeni veznik zamenimo odgovarajućom ekvivalentnom formulom. Zamene vršimo i unutar podformula, dok ne ostanu samo dozvoljeni veznici.

Zadatak 1: primer nepotpunog sistema

Dokazati da $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ nije potpun sistem veznika.

Ideja dokaza. Dovoljno je pronaći jednu formulu koja se ne može izraziti pomoću navedenih veznika. Pokazaćemo da je takva formula $\neg p$. Posmatramo valuaciju v_1 koja svakom iskaznom slovu dodeljuje vrednost 1.

Dokazaćemo da za svaku formulu F izgrađenu korišćenjem samo $\wedge$ i $\leftrightarrow$ važi:

$$\widehat{v_1}(F) = 1.$$

Koristimo **indukciju po složenosti formule**, gde je složenost broj pojavljivanja veznika.

Baza indukcije. Formula složenosti 0 jeste iskazno slovo, recimo q. Po izboru valuacije:

$$\widehat{v_1}(q) = v_1(q) = 1.$$

Indukcijska pretpostavka. Pretpostavimo da tvrdnja važi za sve formule složenosti manje od n.

Indukcijski korak. Neka je F formula složenosti n. Pošto su dozvoljena samo dva veznika, ona je oblika $A \wedge B$ ili $A \leftrightarrow B$, gde su A i B manje složenosti. Po indukcijskoj pretpostavci:

$$\widehat{v_1}(A) = \widehat{v_1}(B) = 1.$$

U oba moguća slučaja dobijamo:

$$\widehat{v_1}(A \wedge B) = \widehat{v_1}(A) \wedge \widehat{v_1}(B) = 1 \wedge 1 = 1,$$
$$\widehat{v_1}(A \leftrightarrow B) = \widehat{v_1}(A) \leftrightarrow \widehat{v_1}(B) = (1 \leftrightarrow 1) = 1.$$

Time je indukcija završena.

Međutim, pri istoj valuaciji:

$$\widehat{v_1}(\neg p) = \neg v_1(p) = \neg 1 = 0.$$

Zato nijedna formula izgrađena samo pomoću $\wedge$ i $\leftrightarrow$ nije ekvivalentna formuli $\neg p$: već pri valuaciji v_1 njihove vrednosti se razlikuju. Prema tome:

$$\boxed{\{\wedge, \leftrightarrow\} \text{ nije potpun sistem veznika.}}$$

Jednočlani potpuni sistemi binarnih veznika

Da li je dovoljan samo jedan veznik? Posmatraćemo **binarni** veznik $*$, čija se tablica sastoji od četiri vrednosti.

Stav. Ako je $\{*\}$ potpun sistem veznika, onda važi:

$$\boxed{0 * 0 = 1, \qquad 1 * 1 = 0}.$$

Dokaz prvog uslova. Pretpostavimo suprotno, da je $0 * 0 = 0$. Neka v_0 svakom iskaznom slovu dodeljuje vrednost 0. Indukcijom po složenosti pokazaćemo da za svaku formulu F izgrađenu korišćenjem samo $*$ važi $\widehat{v_0}(F) = 0$.

U bazi, za svako slovo p važi $\widehat{v_0}(p) = v_0(p) = 0$. U indukcijskom koraku formula ima oblik $F = A * B$. Ako za podformule važi $\widehat{v_0}(A) = \widehat{v_0}(B) = 0$, onda:

$$\widehat{v_0}(F) = \widehat{v_0}(A) * \widehat{v_0}(B) = 0 * 0 = 0.$$

Dakle, sve tako izgrađene formule imaju vrednost 0 pri v_0. Ali $\widehat{v_0}(\neg p) = \neg 0 = 1$, pa se $\neg p$ ne može izraziti pomoću $*$. To protivreči potpunosti. Zato mora biti $0 * 0 = 1$.

Dokaz drugog uslova. Ako bi bilo $1 * 1 = 1$, posmatrali bismo valuaciju v_1 koja svim slovima dodeljuje vrednost 1. Baza indukcije daje $\widehat{v_1}(p) = 1$, a indukcijski korak:

$$\widehat{v_1}(A * B) = \widehat{v_1}(A) * \widehat{v_1}(B) = 1 * 1 = 1.$$

Zato bi svaka formula nad $*$ imala vrednost 1 pri v_1, dok je $\widehat{v_1}(\neg p) = 0$. Ponovo ne bismo mogli izraziti negaciju, pa mora biti $1 * 1 = 0$.

Četiri kandidata. Dokazani uslovi su nužni. Prvi i poslednji red tablice su određeni, a dve preostale vrednosti mogu se birati proizvoljno. Zato postoje samo $2^2 = 4$ kandidata:

p	q	$p \downarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \uparrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Prva kolona kandidata daje veznik **„niti" (NOR)**:

$$A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \vee B).$$

Poslednja daje **Šeferov veznik „ni" (NAND)**:

$$A \uparrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B).$$

NOR je istinit samo kada su oba argumenta neistinita, a NAND je neistinit samo kada su oba argumenta istinita.

Dva kandidata u sredini **nisu potpuni**. Jedan veznik samo negira prvi argument i zanemaruje drugi, a drugi samo negira drugi argument i zanemaruje prvi. Svaka formula izgrađena korišćenjem samo jednog takvog veznika ekvivalentna je nekom iskaznom slovu ili njegovoj negaciji. Zaista, u svakom koraku samo negiramo vrednost izabranog argumenta; ponavljanjem ovog postupka dolazimo do jednog iskaznog slova. Zato ne možemo izraziti $p \wedge q$, čija vrednost zavisi od oba slova. Ovo pokazuje i da dva nužna uslova iz stava sama po sebi nisu dovoljna za potpunost.

Zadatak 2: potpunost veznika NOR i NAND

Dokazati da su $\{\downarrow\}$ i $\{\uparrow\}$ jednočlani potpuni sistemi veznika.

Ideja dokaza. Već znamo da su $\{\neg, \vee\}$ i $\{\neg, \wedge\}$ potpuni sistemi. Dovoljno je pomoću NOR izraziti negaciju i disjunkciju, a pomoću NAND negaciju i konjunkciju.

1) Sistem $\{\downarrow\}$. Najpre dobijamo negaciju:

$$A \downarrow A \Leftrightarrow \neg(A \vee A) \Leftrightarrow \neg A.$$

Pošto je $A \vee A$ ekvivalentno A, rezultat je negacija A.

Disjunkciju dobijamo tako što negiramo rezultat $A \downarrow B$, ponovo koristeći samo NOR:

$$\begin{aligned}(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) &\Leftrightarrow \neg(A \downarrow B)\\ &\Leftrightarrow \neg\neg(A \vee B)\\ &\Leftrightarrow A \vee B.\end{aligned}$$

Dakle, imamo zamene koje koriste samo NOR:

$$\boxed{\neg A \Leftrightarrow A \downarrow A}, \qquad \boxed{A \vee B \Leftrightarrow (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)}.$$

Svaku formulu možemo prvo zapisati pomoću $\neg$ i $\vee$, a zatim primeniti ove zamene. Zato je $\{\downarrow\}$ potpun sistem.

2) Sistem $\{\uparrow\}$. Negaciju dobijamo analogno:

$$A \uparrow A \Leftrightarrow \neg(A \wedge A) \Leftrightarrow \neg A.$$

Konjunkciju dobijamo negiranjem rezultata $A \uparrow B$:

$$\begin{aligned}(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B) &\Leftrightarrow \neg(A \uparrow B)\\ &\Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B)\\ &\Leftrightarrow A \wedge B.\end{aligned}$$

Zato važe zamene:

$$\boxed{\neg A \Leftrightarrow A \uparrow A}, \qquad \boxed{A \wedge B \Leftrightarrow (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)}.$$

Pošto se pomoću NAND mogu izraziti oba veznika poznatog potpunog sistema $\{\neg, \wedge\}$, sistem $\{\uparrow\}$ je potpun.

Provera negacije tablicom. Oba izraza sa ponovljenim argumentom imaju istu tablicu kao negacija:

p	$p \downarrow p$	$p \uparrow p$	$\neg p$
0	1	1	1
1	0	0	0

Primer prevođenja formule. Implikaciju možemo zapisati koristeći samo NAND:

$$\begin{aligned}p \to q &\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)\\ &\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q).\end{aligned}$$

Unutrašnji izraz $q \uparrow q$ daje $\neg q$, a spoljašnji NAND negira konjunkciju $p \wedge \neg q$. U završnom izrazu nema ni negacije ni implikacije kao zasebnih veznika: obe su izražene pomoću NAND.

Prema tome, među binarnim veznicima postoje tačno dva koja sama čine potpune sisteme:

$$\boxed{\{\downarrow\} \text{ i } \{\uparrow\}}.$$