Uvod u matematičku logiku

7. čas vežbi – prirodna dedukcija u predikatskoj logici

Pravila prirodne dedukcije za čistu predikatsku logiku

Pravila prirodne dedukcije iz iskazne logike važe i u predikatskoj logici. Njima dodajemo pravila za jednakost i kvantifikatore.

Slobodna i vezana pojavljivanja promenljive

U formuli $(\forall x)\varphi$ kvantifikator $\forall x$ vezuje ona pojavljivanja promenljive x koja se nalaze u njegovom dosegu. Analogno važi za $\exists x$.

Na primer, u

$$P(x) \wedge (\forall x)Q(x, y)$$

prvo pojavljivanje x je slobodno, dok je x u $Q(x, y)$ vezano. Promenljiva y javlja se slobodno.

Smena promenljivih

Oznakom $\varphi[y/x]$ označavamo formulu koja se dobija kada se **slobodna** pojavljivanja promenljive x u φ zamene promenljivom y. Vezana pojavljivanja promenljive x se ne menjaju.

Na primer, ako je

$$\varphi = P(x) \wedge (\forall x)Q(x, z),$$

onda je

$$\varphi[y/x] = P(y) \wedge (\forall x)Q(x, z).$$

Regularna smena

Smena $\varphi[y/x]$ je **regularna** ako nijedno slobodno pojavljivanje promenljive x koje zamenjujemo promenljivom y ne postane vezano nekim kvantifikatorom koji se već nalazi u formuli. Drugim rečima, ne sme doći do **hvatanja promenljive**.

Na primer,

$$P(x, z)[y/x] = P(y, z)$$

je regularna smena. Međutim, ako je

$$\varphi = (\exists y)(x \neq y),$$

smena $x \mapsto y$ daje

$$(\exists y)(y \neq y),$$

pa nije regularna: novo pojavljivanje promenljive y postalo je vezano.

Sveža promenljiva i pomoćna pretpostavka

Sveža promenljiva je nova promenljiva uvedena u poddokazu tako da o njoj ne koristimo nikakvu posebnu informaciju osim one koja sledi iz pretpostavki tog poddokaza. Najčešće ćemo je označavati sa $a, b, u, v, \ldots$

Oznaka **pp** znači **pomoćna pretpostavka**. Ona važi samo unutar poddokaza u kome je uvedena. Kada zatvorimo poddokaz, više je ne možemo koristiti.

Eliminacija i uvođenje jednakosti

$$\frac{x = y \qquad \varphi[x/z]}{\varphi[y/z]}\ (= E) \qquad\qquad \frac{}{x = x}\ (= U/= R)$$

Kod $(= E)$ smene $\varphi[x/z]$ i $\varphi[y/z]$ moraju biti regularne.

Pravilo $(= E)$ kaže da jednake promenljive možemo zamenjivati jednu drugom, dok $(= U)$ izražava refleksivnost jednakosti.

Iz osnovnih pravila izvodimo i:

$$\frac{x = y}{y = x}\ (= S), \qquad\qquad \frac{x = y \qquad y = z}{x = z}\ (= T),$$

odnosno simetričnost i tranzitivnost jednakosti.

Eliminacija univerzalnog kvantifikatora

$$\frac{(\forall x)\varphi}{\varphi[y/x]}\quad (\forall E)$$

Smena $\varphi[y/x]$ mora biti regularna. Pravilo se naziva **instanciranje**: ako nešto važi za svako x, važi i za izabranu promenljivu y.

Na primer,

$$\frac{(\forall x)(P(x) \to Q(x))}{P(y) \to Q(y)}\quad (\forall E).$$

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora

$$\frac{\begin{array}{|l} \boxed{a} \quad a \text{ sveža promenljiva} \\ \vdots \\ \varphi[a/x] \end{array}}{(\forall x)\varphi}\quad (\forall U)$$

Ako smo $\varphi[a/x]$ dokazali za potpuno proizvoljnu svežu promenljivu a, možemo zaključiti $(\forall x)\varphi$. Ovo pravilo se naziva **generalizacija**.

Ne smemo generalizovati promenljivu koja zavisi od neke posebne pretpostavke o toj promenljivoj.

Eliminacija egzistencijalnog kvantifikatora

Jedan oblik pravila je

$$\frac{(\exists x)\varphi \qquad (\forall x)(\varphi \to \psi)}{\psi} \quad (\exists E),$$

pri čemu se x ne pojavljuje slobodno u ψ.

U dokazima ćemo uglavnom koristiti oblik sa poddokazom:

$$\begin{array}{l|ll} & \boxed{a} & \varphi[a/x] \quad \text{pp} \\ (\exists x)\varphi & \vdots & \\ & \psi & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\psi} \end{array} \quad (\exists E),$$

gde je a sveža promenljiva.

Dakle, iz $(\exists x)\varphi$ uzimamo proizvoljnog svedoka a i **u istom redu** uvodimo $\varphi[a/x]$ kao pomoćnu pretpostavku. Ako iz nje izvedemo ψ, pri čemu konačni zaključak ne zavisi od izbora a, zatvaramo poddokaz i zaključujemo ψ.

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora

$$\frac{\varphi[y/x]}{(\exists x)\varphi} \quad (\exists U)$$

Smena mora biti regularna. Ako smo pokazali da formula važi za neku promenljivu y, možemo zaključiti da postoji promenljiva za koju ona važi.

Za razliku od $(\forall U)$, promenljiva y ne mora biti sveža.

Promena vezane promenljive

$$\frac{(\forall x)\varphi}{(\forall y)\varphi[y/x]} \quad (PVP), \qquad \frac{(\exists x)\varphi}{(\exists y)\varphi[y/x]} \quad (PVP).$$

Smena mora biti regularna, a y se ne sme pojavljivati slobodno u φ. Menja se samo ime vezane promenljive, na primer

$$(\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y).$$

De Morganovi zakoni za kvantifikatore

$$\frac{\neg(\forall x)\varphi}{(\exists x)\neg\varphi}\ (DM), \qquad \frac{\neg(\exists x)\varphi}{(\forall x)\neg\varphi}\ (DM),$$

$$\frac{(\forall x)\neg\varphi}{\neg(\exists x)\varphi}\ (DM), \qquad \frac{(\exists x)\neg\varphi}{\neg(\forall x)\varphi}\ (DM).$$

Dakle,

$$\neg(\forall x)\varphi \equiv (\exists x)\neg\varphi, \qquad \neg(\exists x)\varphi \equiv (\forall x)\neg\varphi.$$

Primeri

Primer 1

Dokazati:

$$(\forall x)(A(x) \to B(x)), \qquad (\forall x)(B(x) \to C(x)) \vdash (\forall x)(A(x) \to C(x)).$$

1.	$(\forall x)(A(x) \to B(x))$	premisa
2.	$(\forall x)(B(x) \to C(x))$	premisa
3.	a	sveža promenljiva
4.	$A(a) \to B(a)$	$(\forall E)$ iz reda 1
5.	$B(a) \to C(a)$	$(\forall E)$ iz reda 2
6.	$A(a) \to C(a)$	tranzitivnost implikacije, 4 i 5
7.	$(\forall x)(A(x) \to C(x))$	$(\forall U)$ iz poddokaza 3–6

Primer 2

Dokazati:

$$(\exists x)\Big(D(x) \wedge (\forall y)(M(y) \to V(y,x))\Big), \qquad M(c) \vdash (\exists z)V(c,z).$$

Iz egzistencijalne premise uvodimo svežu promenljivu a i odgovarajuću pomoćnu pretpostavku u istom redu.

1.	$(\exists x)\Big(D(x) \wedge (\forall y)(M(y) \to V(y,x))\Big)$	premisa
2.	$M(c)$	premisa
3.	$a, \quad D(a) \wedge (\forall y)(M(y) \to V(y,a))$	a sveža promenljiva, pp za $(\exists E)$
4.	$(\forall y)(M(y) \to V(y,a))$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 3
5.	$M(c) \to V(c,a)$	$(\forall E)$ iz reda 4
6.	$V(c,a)$	MP iz redova 2 i 5
7.	$(\exists z)V(c,z)$	$(\exists U)$ iz reda 6
8.	$(\exists z)V(c,z)$	$(\exists E)$ iz reda 1 i poddokaza 3–7

Teoreme predikatskog računa

1. Zamena mesta susednih kvantifikatora

Dva susedna kvantifikatora iste vrste mogu zameniti mesta:

$$\vdash (\forall x)(\forall y)\alpha \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\alpha, \qquad \vdash (\exists x)(\exists y)\alpha \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\alpha.$$

Za kvantifikatore različitih vrsta u opštem slučaju ne važi ekvivalencija. Važi

$$\vdash (\exists x)(\forall y)\alpha \to (\forall y)(\exists x)\alpha,$$

ali obrnuti smer ne mora važiti.

2. Kvantifikatori i konjunkcija/disjunkcija

Važe:

$$\vdash (\forall x)(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \Big((\forall x)\alpha \wedge (\forall x)\beta\Big),$$

$$\vdash (\exists x)(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \Big((\exists x)\alpha \vee (\exists x)\beta\Big).$$

Za druge dve kombinacije u opštem slučaju imamo samo:

$$\vdash (\forall x)\alpha \vee (\forall x)\beta \rightarrow (\forall x)(\alpha \vee \beta),$$

$$\vdash (\exists x)(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Big((\exists x)\alpha \wedge (\exists x)\beta\Big).$$

Zadaci

1. zadatak

Dokazati:

$$(\forall x)(H(x) \to D(x)), \qquad H(c) \vdash (\exists x)D(x).$$

Rešenje. Iz prve premise dobijamo $H(c) \to D(c)$, pa iz $H(c)$ sledi $D(c)$. Zatim uvodimo egzistencijalni kvantifikator.

1.	$(\forall x)(H(x) \to D(x))$	premisa
2.	$H(c)$	premisa
3.	$H(c) \to D(c)$	$(\forall E)$ iz reda 1
4.	$D(c)$	MP iz redova 2 i 3
5.	$(\exists x)D(x)$	$(\exists U)$ iz reda 4

2. zadatak

Dokazati:

$$(\forall x)\neg A(x) \vdash (\forall x)(A(x) \to B(x)).$$

Rešenje. Za svežu promenljivu a pretpostavimo $A(a)$. Iz premise sledi $\neg A(a)$, pa dobijamo kontradikciju i iz nje $B(a)$. Zato važi $A(a) \to B(a)$, a zatim generalizujemo.

1.	$(\forall x)\neg A(x)$	premisa
2.	$\vert\ a$	sveža promenljiva
3.	$\vert\ \vert\ A(a)$	pomoćna pretpostavka
4.	$\vert\ \vert\ \neg A(a)$	$(\forall E)$ iz reda 1
5.	$\vert\ \vert\ \bot$	$(\neg E)$ iz redova 3 i 4
6.	$\vert\ \vert\ B(a)$	$(\bot E)$ iz reda 5
7.	$\vert\ A(a) \to B(a)$	$(\to U)$ iz poddokaza 3–6
8.	$(\forall x)(A(x) \to B(x))$	$(\forall U)$ iz poddokaza 2–7

3. zadatak

Dokazati:

$$(\exists x)\Big(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \to R(y,x))\Big), \qquad Q(c) \vdash (\exists z)R(c,z).$$

Rešenje. Iz egzistencijalne premise uzimamo svežu promenljivu a. Iz $(\forall y)(Q(y) \to R(y,a))$ dobijamo $Q(c) \to R(c,a)$, pa $R(c,a)$ i konačno $(\exists z)R(c,z)$.

1.	$(\exists x)\Big(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \to R(y,x))\Big)$	premisa
2.	$Q(c)$	premisa
3.	$\vert\ a, \quad P(a) \wedge (\forall y)(Q(y) \to R(y,a))$	a sveža promenljiva, pp za $(\exists E)$
4.	$\vert\ (\forall y)(Q(y) \to R(y,a))$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 3
5.	$\vert\ Q(c) \to R(c,a)$	$(\forall E)$ iz reda 4
6.	$\vert\ R(c,a)$	MP iz redova 2 i 5
7.	$\vert\ (\exists z)R(c,z)$	$(\exists U)$ iz reda 6
8.	$(\exists z)R(c,z)$	$(\exists E)$ iz reda 1 i poddokaza 3–7

4. zadatak

Dokazati:

$(\forall x)(\exists y)(P(x) \to \neg Q(x,y)), \qquad (\forall x)(\forall y)(R(x) \to Q(x,y)) \vdash (\exists x)R(x) \to (\exists x)(R(x) \wedge \neg P(x)).$

Rešenje. Koristimo ranije dokazanu teoremu dedukcije

$$\Gamma, A \vdash B \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash A \to B.$$

Dovoljno je dokazati

$(\forall x)(\exists y)(P(x) \to \neg Q(x,y)), \quad (\forall x)(\forall y)(R(x) \to Q(x,y)), \quad (\exists x)R(x) \vdash (\exists x)(R(x) \wedge \neg P(x)).$

1.	$(\forall x)(\exists y)(P(x) \to \neg Q(x,y))$	premisa
2.	$(\forall x)(\forall y)(R(x) \to Q(x,y))$	premisa
3.	$(\exists x)R(x)$	premisa
4.	$\vert\ a, \quad R(a)$	a sveža promenljiva, pp za $(\exists E)$
5.	$\vert\ (\exists y)(P(a) \to \neg Q(a,y))$	$(\forall E)$ iz reda 1
6.	$\vert\ \vert\ b, \quad P(a) \to \neg Q(a,b)$	b sveža promenljiva, pp za $(\exists E)$
7.	$\vert\ \vert\ (\forall y)(R(a) \to Q(a,y))$	$(\forall E)$ iz reda 2
8.	$\vert\ \vert\ R(a) \to Q(a,b)$	$(\forall E)$ iz reda 7
9.	$\vert\ \vert\ Q(a,b)$	MP iz redova 4 i 8
10.	$\vert\ \vert\ \vert\ P(a)$	pomoćna pretpostavka
11.	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg Q(a,b)$	MP iz redova 6 i 10
12.	$\vert\ \vert\ \vert\ \bot$	$(\neg E)$ iz redova 9 i 11
13.	$\vert\ \vert\ \neg P(a)$	$(\neg U)$ iz poddokaza 10–12
14.	$\vert\ \vert\ R(a) \wedge \neg P(a)$	$(\wedge U)$ iz redova 4 i 13
15.	$\vert\ \vert\ (\exists x)(R(x) \wedge \neg P(x))$	$(\exists U)$ iz reda 14
16.	$\vert\ (\exists x)(R(x) \wedge \neg P(x))$	$(\exists E)$ iz reda 5 i poddokaza 6–15
17.	$(\exists x)(R(x) \wedge \neg P(x))$	$(\exists E)$ iz reda 3 i poddokaza 4–16

Po teoremi dedukcije sledi željeni sekvent.

5. zadatak

Dokazati:

$$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)R(x,y)), \qquad \neg(\exists x)(\exists y)R(x,y) \vdash (\forall x)\neg P(x).$$

Rešenje. Za svežu promenljivu a pretpostavimo $P(a)$. Tada sledi $(\exists y)R(a,y)$, pa $(\exists x)(\exists y)R(x,y)$, što protivreči drugoj premisi.

1.	$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)R(x,y))$	premisa
2.	$\neg(\exists x)(\exists y)R(x,y)$	premisa
3.	$\vert\ a$	sveža promenljiva
4.	$\vert\ \vert\ P(a)$	pomoćna pretpostavka
5.	$\vert\ \vert\ P(a) \to (\exists y)R(a,y)$	$(\forall E)$ iz reda 1
6.	$\vert\ \vert\ (\exists y)R(a,y)$	MP iz redova 4 i 5
7.	$\vert\ \vert\ (\exists x)(\exists y)R(x,y)$	$(\exists U)$ iz reda 6
8.	$\vert\ \vert\ \bot$	$(\neg E)$ iz redova 2 i 7
9.	$\vert\ \neg P(a)$	$(\neg U)$ iz poddokaza 4–8
10.	$(\forall x)\neg P(x)$	$(\forall U)$ iz poddokaza 3–9

6. zadatak

Dokazati:

$$\neg(\forall x)\neg(P(x) \to Q(x)), \qquad (\forall x)(Q(x) \leftrightarrow R(x)), \qquad (\forall x)(P(x) \vee R(x)) \vdash (\exists x)R(x).$$

Rešenje. De Morganovim pravilom iz prve premise dobijamo $(\exists x)\neg\neg(P(x) \to Q(x))$. Zatim primenjujemo $(\exists E)$ i razmatramo dva slučaja iz $P(a) \vee R(a)$.

1.	$\neg(\forall x)\neg(P(x) \to Q(x))$	premisa
2.	$(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow R(x))$	premisa
3.	$(\forall x)(P(x) \vee R(x))$	premisa
4.	$(\exists x)\neg\neg(P(x) \to Q(x))$	DM iz reda 1
5.	$a, \quad \neg\neg(P(a) \to Q(a))$	a sveža promenljiva, pp za $(\exists E)$
6.	$P(a) \to Q(a)$	$\neg\neg_{\mathrm{E}}$ iz reda 5
7.	$Q(a) \leftrightarrow R(a)$	$(\forall E)$ iz reda 2
8.	$P(a) \vee R(a)$	$(\forall E)$ iz reda 3
9.	$P(a)$	pretpostavka za prvi slučaj
10.	$Q(a)$	MP iz redova 6 i 9
11.	$Q(a) \to R(a)$	$(\leftrightarrow E)$ iz reda 7
12.	$R(a)$	MP iz redova 10 i 11
13.	$(\exists x)R(x)$	$(\exists U)$ iz reda 12
14.	$R(a)$	pretpostavka za drugi slučaj
15.	$(\exists x)R(x)$	$(\exists U)$ iz reda 14
16.	$(\exists x)R(x)$	$(\vee E)$ iz reda 8 i poddokaza 9–13 i 14–15
17.	$(\exists x)R(x)$	$(\exists E)$ iz reda 4 i poddokaza 5–16

7. zadatak

Dokazati:

$$(\forall x)(P(x)\vee Q(x)), \qquad (\exists x)\neg P(x), \qquad (\forall x)(\neg Q(x)\vee R(x)), \qquad (\forall x)(S(x) \to \neg R(x)) \vdash \neg(\forall x)S(x).$$

Rešenje. Iz $(\exists x)\neg P(x)$ uzimamo svežu promenljivu a. Tada iz prvih premisa dobijamo $Q(a)$ i $R(a)$. Pretpostavka $(\forall x)S(x)$ daje $S(a)$, pa $\neg R(a)$, što je kontradikcija.

1.	$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	premisa
2.	$(\exists x)\neg P(x)$	premisa
3.	$(\forall x)(\neg Q(x) \vee R(x))$	premisa
4.	$(\forall x)(S(x) \to \neg R(x))$	premisa
5.	$a, \quad \neg P(a)$	a sveža promenljiva, pp za $(\exists E)$
6.	$P(a) \vee Q(a)$	$(\forall E)$ iz reda 1
7.	$Q(a)$	DS iz redova 6 i 5
8.	$\neg\neg Q(a)$	$\neg\neg_{\mathrm{u}}$ iz reda 7
9.	$\neg Q(a) \vee R(a)$	$(\forall E)$ iz reda 3
10.	$R(a)$	DS iz redova 9 i 8
11.	$(\forall x)S(x)$	pomoćna pretpostavka
12.	$S(a)$	$(\forall E)$ iz reda 11
13.	$S(a) \to \neg R(a)$	$(\forall E)$ iz reda 4
14.	$\neg R(a)$	MP iz redova 12 i 13
15.	$\bot$	$(\neg E)$ iz redova 10 i 14
16.	$\neg(\forall x)S(x)$	$(\neg U)$ iz poddokaza 11–15
17.	$\neg(\forall x)S(x)$	$(\exists E)$ iz reda 2 i poddokaza 5–16

8. zadatak

Dokazati:

$$\vdash \Big((\forall x)(s(x) \to \neg q(x)) \wedge (\forall x)((\neg p(x) \wedge q(x)) \to s(x))\Big) \to \Big((\exists x)(p(x) \vee q(x)) \to (\exists x)p(x)\Big).$$

Rešenje. Teoremu dedukcije

$$\Gamma, A \vdash B \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash A \to B$$

primenjujemo dva puta. Dovoljno je dokazati

$$(\forall x)(s(x) \to \neg q(x)) \wedge (\forall x)((\neg p(x) \wedge q(x)) \to s(x)), \quad (\exists x)(p(x) \vee q(x)) \vdash (\exists x)p(x).$$

1.	$(\forall x)(s(x) \to \neg q(x)) \land (\forall x)((\neg p(x) \land q(x)) \to s(x))$	premisa
2.	$(\exists x)(p(x) \lor q(x))$	premisa
3.	$(\forall x)(s(x) \to \neg q(x))$	$\land^{\mathrm{l}}_{\mathrm{E}}$ iz reda 1
4.	$(\forall x)((\neg p(x) \land q(x)) \to s(x))$	$\land^{\mathrm{d}}_{\mathrm{E}}$ iz reda 1
5.	$a, \quad p(a) \lor q(a)$	a sveža promenljiva, pp za $(\exists E)$
6.	$p(a)$	pretpostavka za prvi slučaj
7.	$(\exists x)p(x)$	$(\exists U)$ iz reda 6
8.	$q(a)$	pretpostavka za drugi slučaj
9.	$s(a) \to \neg q(a)$	$(\forall E)$ iz reda 3
10.	$(\neg p(a) \land q(a)) \to s(a)$	$(\forall E)$ iz reda 4
11.	$\neg p(a)$	pomoćna pretpostavka
12.	$\neg p(a) \land q(a)$	$(\land U)$ iz redova 11 i 8
13.	$s(a)$	MP iz redova 10 i 12
14.	$\neg q(a)$	MP iz redova 9 i 13
15.	$\bot$	$(\neg E)$ iz redova 8 i 14
16.	$\neg\neg p(a)$	$(\neg U)$ iz poddokaza 11–15
17.	$p(a)$	$\neg\neg_{\mathrm{E}}$ iz reda 16
18.	$(\exists x)p(x)$	$(\exists U)$ iz reda 17
19.	$(\exists x)p(x)$	$(\lor E)$ iz reda 5 i poddokaza 6–7 i 8–18
20.	$(\exists x)p(x)$	$(\exists E)$ iz reda 2 i poddokaza 5–19

Dvostrukom primenom teoreme dedukcije dobijamo traženu formulu.

9. zadatak

Dokazati:

$$(\forall x)(p(x) \to (q(x) \lor r(x))), \qquad (\forall x)(q(x) \to t(x)), \qquad (\forall x)(r(x) \to s(x)),$$

$$(\forall x)\neg s(x), \qquad (\exists x)p(x) \vdash (\exists x)t(x).$$

Rešenje. Iz $(\exists x)p(x)$ uzimamo svežu promenljivu a. Iz $p(a)$ dobijamo $q(a) \lor r(a)$ i razmatramo dva slučaja. U prvom direktno dobijamo $t(a)$; u drugom dobijamo kontradikciju iz $s(a)$ i $\neg s(a)$.

1.	$(\forall x)(p(x) \to (q(x) \vee r(x)))$	premisa
2.	$(\forall x)(q(x) \to t(x))$	premisa
3.	$(\forall x)(r(x) \to s(x))$	premisa
4.	$(\forall x)\neg s(x)$	premisa
5.	$(\exists x)p(x)$	premisa
6.	$a, \quad p(a)$	a sveža promenljiva, pp za $(\exists E)$
7.	$p(a) \to (q(a) \vee r(a))$	$(\forall E)$ iz reda 1
8.	$q(a) \vee r(a)$	MP iz redova 6 i 7
9.	$q(a)$	pretpostavka za prvi slučaj
10.	$q(a) \to t(a)$	$(\forall E)$ iz reda 2
11.	$t(a)$	MP iz redova 9 i 10
12.	$(\exists x)t(x)$	$(\exists U)$ iz reda 11
13.	$r(a)$	pretpostavka za drugi slučaj
14.	$r(a) \to s(a)$	$(\forall E)$ iz reda 3
15.	$s(a)$	MP iz redova 13 i 14
16.	$\neg s(a)$	$(\forall E)$ iz reda 4
17.	$\bot$	$(\neg E)$ iz redova 15 i 16
18.	$(\exists x)t(x)$	$(\bot E)$ iz reda 17
19.	$(\exists x)t(x)$	$(\vee E)$ iz reda 8 i poddokaza 9–12 i 13–18
20.	$(\exists x)t(x)$	$(\exists E)$ iz reda 5 i poddokaza 6–19