Uvod u matematičku logiku

6. čas Prirodna dedukcija

U prirodnoj dedukciji dokaz gradimo korak po korak. Svaki red je premisa, privremena pretpostavka ili formula izvedena primenom pravila.

U šemi pravila iznad crte pišu formule ili poddokazi koji su potrebni za primenu pravila, a ispod crte stoji zaključak. Slova A, B i C označavaju proizvoljne formule, a $\bot$ označava kontradikciju. Zapis $\Gamma \vdash C$ znači da se C može izvesti iz skupa premisa Γ. Zapis $\vdash C$ označava dokaz bez premisa.

U oznakama pravila E znači eliminaciju, a u uvođenje. Gornje oznake l i d odnose se na levi i desni član.

Konjunkcija i dvostruka negacija

(1) $\dfrac{A \wedge B}{A}$ $(\wedge^{\mathrm{l}}_{\mathrm{E}})$ Eliminacija konjunkcije, levi član

(2) $\dfrac{A \wedge B}{B}$ $(\wedge^{\mathrm{d}}_{\mathrm{E}})$ Eliminacija konjunkcije, desni član

(3) $\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}$ $(\wedge_{\mathrm{u}})$ Uvođenje konjunkcije

(4) $\dfrac{\neg\neg A}{A}$ $(\neg\neg_{\mathrm{E}})$ Eliminacija dvostruke negacije

(5) $\dfrac{A}{\neg\neg A}$ $(\neg\neg_{\mathrm{u}})$ Uvođenje dvostruke negacije

Implikacija i negacija

(6) $\dfrac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}$ $(\Rightarrow_{\mathrm{E}})$ Eliminacija implikacije (*modus ponens*, MP)

(7) $\dfrac{A \Rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$ (MT) *Modus tollens*

(8) $\dfrac{\begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}$ $(\Rightarrow_{\mathrm{u}})$ Uvođenje implikacije. Zatvaramo pretpostavku A.

(9) $\dfrac{A \qquad \neg A}{\bot}$ $(\neg_{\mathrm{E}})$ Eliminacija negacije (izvođenje kontradikcije)

(10) $\dfrac{\begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}$ $(\neg_{\mathrm{u}})$ Uvođenje negacije. Zatvaramo pretpostavku A.

Uspravna crta s leve strane označava poddokaz. Prvi red je privremena pretpostavka. U poddokazu možemo koristiti premise i ranije redove dostupne na mestu gde ga otvaramo. Posle zatvaranja koristimo rezultat odgovarajućeg pravila.

Disjunkcija, kontradikcija i ekvivalencija

(11) $\dfrac{A}{A \vee B}$ — $(\vee_{\mathrm{u}}^{\mathrm{l}})$ Uvođenje disjunkcije iz levog člana

(12) $\dfrac{B}{A \vee B}$ — $(\vee_{\mathrm{u}}^{\mathrm{d}})$ Uvođenje disjunkcije iz desnog člana

(13) $$\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \vdots & \vdots \\ C & C \\ \hline \end{array}}{C}$$ — $(\vee_{\mathrm{E}})$ Eliminacija disjunkcije. Isti zaključak C izvodimo u oba slučaja i zatvaramo obe pretpostavke.

(14) $\dfrac{\bot}{A}$ — $(\bot_{\mathrm{E}})$ Eliminacija kontradikcije (*ex falso quodlibet*, efq)

(15) $\dfrac{A \vee B \qquad \neg A}{B}$ — (DS) Disjunktivni silogizam

(16) $\dfrac{A \vee B \qquad \neg B}{A}$ — (DS) Disjunktivni silogizam

(17) $\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow A}{A \Leftrightarrow B}$ — $(\Leftrightarrow_{\mathrm{u}})$ Uvođenje ekvivalencije

Dodatna pravila prirodne dedukcije

(18) $\dfrac{A \Leftrightarrow B}{A \Rightarrow B}$ — $(\Leftrightarrow_{\mathrm{E}}^{\mathrm{ld}})$ Eliminacija ekvivalencije sleva nadesno

(19) $\dfrac{A \Leftrightarrow B}{B \Rightarrow A}$ — $(\Leftrightarrow_{\mathrm{E}}^{\mathrm{dl}})$ Eliminacija ekvivalencije zdesna nalevo

(20) $\dfrac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$ — $(\Rightarrow_{\mathrm{T}})$ Tranzitivnost implikacije

(21) $\dfrac{}{A \vee \neg A}$ — (tnd) Zakon isključenja trećeg (*tertium non datur*). Zaključak se izvodi bez premisa.

(22) $\dfrac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$ — De Morganov zakon za konjunkciju

(23) $\dfrac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B)}$ — De Morganov zakon za konjunkciju, obrnuti smer

(24) $\dfrac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$ — De Morganov zakon za disjunkciju

(25) $\dfrac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B)}$ — De Morganov zakon za disjunkciju, obrnuti smer

Teorema dedukcije

$$\Gamma, A \vdash B \quad \text{ako i samo ako} \quad \Gamma \vdash A \Rightarrow B.$$

Zapis Γ, A znači da premisama iz Γ dodajemo formulu A.

Primeri

1. Izvođenje konjunkcije

Dokažimo sekvent

$$(p \wedge q) \wedge s, \quad r \wedge t \vdash t \wedge q.$$

1.	$(p \wedge q) \wedge s$	premisa
2.	$r \wedge t$	premisa
3.	$p \wedge q$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{l}}$ iz reda 1
4.	q	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 3
5.	t	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 2
6.	$t \wedge q$	$\wedge_{\mathrm{u}}$ iz redova 5 i 4

2. Izvođenje implikacije

Dokažimo sekvent

$$p \Rightarrow q, \quad \neg r \Rightarrow \neg q, \quad r \Rightarrow s \vdash p \Rightarrow s.$$

Prvi način. Privremeno pretpostavimo p i izvedimo s.

1.	$p \Rightarrow q$	premisa
2.	$\neg r \Rightarrow \neg q$	premisa
3.	$r \Rightarrow s$	premisa
4.	p	privremena pretpostavka
5.	q	MP iz redova 1 i 4
6.	$\neg\neg q$	$\neg\neg_{\mathrm{u}}$ iz reda 5
7.	$\neg\neg r$	MT iz redova 2 i 6
8.	r	$\neg\neg_{\mathrm{E}}$ iz reda 7
9.	s	MP iz redova 3 i 8
10.	$p \Rightarrow s$	$\Rightarrow_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 4–9

Drugi način. Primenimo teoremu dedukcije. Dovoljno je dokazati sekvent

$$p \Rightarrow q, \quad \neg r \Rightarrow \neg q, \quad r \Rightarrow s, \quad p \vdash s.$$

Uzmemo p kao četvrtu premisu i koracima iz redova 5–9 izvedemo s. Po teoremi dedukcije, iz prve tri premise sledi $p \Rightarrow s$.

3. Dokaz po slučajevima

Dokažimo sekvent

$$\vdash ((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r)).$$

1.	$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	privremena pretpostavka
2.	$\quad p \Rightarrow q$	pretpostavka za prvi slučaj
3.	$\quad\quad p$	privremena pretpostavka
4.	$\quad\quad q$	MP iz redova 2 i 3
5.	$\quad\quad q \vee r$	$\vee^{\mathrm{l}}_{\mathrm{u}}$ iz reda 4
6.	$\quad p \Rightarrow (q \vee r)$	$\Rightarrow_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 3–5
7.	$\quad p \Rightarrow r$	pretpostavka za drugi slučaj
8.	$\quad\quad p$	privremena pretpostavka
9.	$\quad\quad r$	MP iz redova 7 i 8
10.	$\quad\quad q \vee r$	$\vee^{\mathrm{d}}_{\mathrm{u}}$ iz reda 9
11.	$\quad p \Rightarrow (q \vee r)$	$\Rightarrow_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 8–10
12.	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$\vee_{\mathrm{E}}$ iz reda 1 i poddokaza 2–6 i 7–11
13.	$((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$	$\Rightarrow_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 1–12

Leme o implikaciji

Lema 1

Prvi smer

$$\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta.$$

1.	$\neg\alpha \vee \beta$	premisa
2.	$\quad \alpha$	privremena pretpostavka
3.	$\quad \neg\neg\alpha$	$\neg\neg_{\mathrm{u}}$ iz reda 2
4.	$\quad \beta$	DS iz redova 1 i 3
5.	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\Rightarrow_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 2–4

Drugi smer

$$\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta.$$

1.	$\alpha \Rightarrow \beta$	premisa
2.	$\alpha \vee \neg\alpha$	tnd
3.	$\quad \alpha$	pretpostavka za prvi slučaj
4.	$\quad \beta$	MP iz redova 1 i 3
5.	$\quad \neg\alpha \vee \beta$	$\vee^{\mathrm{d}}_{\mathrm{u}}$ iz reda 4
6.	$\quad \neg\alpha$	pretpostavka za drugi slučaj
7.	$\quad \neg\alpha \vee \beta$	$\vee^{\mathrm{l}}_{\mathrm{u}}$ iz reda 6
8.	$\neg\alpha \vee \beta$	$\vee_{\mathrm{E}}$ iz reda 2 i poddokaza 3–5 i 6–7

Lema 2

$$\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \alpha.$$

1.	$\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$	premisa
2.	$\vert\ \neg\alpha$	privremena pretpostavka
3.	$\vert\ \neg\alpha \vee \beta$	$\vee^{\mathrm{l}}_{\mathrm{u}}$ iz reda 2
4.	$\vert\ \alpha \Rightarrow \beta$	prvi smer Leme 1, primenjen na red 3
5.	$\vert\ \bot$	$\neg_{\mathrm{E}}$ iz redova 4 i 1
6.	$\neg\neg\alpha$	$\neg_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 2–5
7.	α	$\neg\neg_{\mathrm{E}}$ iz reda 6

Domaći zadatak. Analogno dokazati sekvent

$$\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \neg\beta.$$

4. Primena lema u dokazu po slučajevima

Dokažimo sekvent

$$\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r))\big) \Rightarrow t, \quad (s \wedge t) \Rightarrow (q \wedge r), \quad \neg t \vee s \vdash q.$$

1.	$\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r))\big) \Rightarrow t$	premisa
2.	$(s \wedge t) \Rightarrow (q \wedge r)$	premisa
3.	$\neg t \vee s$	premisa
4.	$t \Rightarrow s$	prvi smer Leme 1, iz reda 3
5.	$t \vee \neg t$	tnd
6.	$\vert\ t$	pretpostavka za prvi slučaj
7.	$\vert\ s$	MP iz redova 4 i 6
8.	$\vert\ s \wedge t$	$\wedge_{\mathrm{u}}$ iz redova 7 i 6
9.	$\vert\ q \wedge r$	MP iz redova 2 i 8
10.	$\vert\ q$	$\wedge^{\mathrm{l}}_{\mathrm{E}}$ iz reda 9
11.	$\vert\ \neg t$	pretpostavka za drugi slučaj
12.	$\vert\ \neg\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r))\big)$	MT iz redova 1 i 11
13.	$\vert\ \neg\big(q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)\big)$	drugi deo Leme 2, iz reda 12
14.	$\vert\ q$	prvi deo Leme 2, iz reda 13
15.	q	$\vee_{\mathrm{E}}$ iz reda 5 i poddokaza 6–10 i 11–14

5. Dokaz ekvivalencije

Dokažimo sekvent

$$(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r), \quad (p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r) \vdash p \Leftrightarrow q.$$

Prvi smer. Izvedimo $p \Rightarrow q$.

1.	$(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$	premisa
2.	$(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)$	premisa
3.	$(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow^{\text{ld}}_{\text{E}}$ iz reda 1
4.	$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$	$\Leftrightarrow^{\text{ld}}_{\text{E}}$ iz reda 2
5.	$\quad p$	privremena pretpostavka
6.	$\quad p \vee r$	$\vee^{\text{l}}_{\text{u}}$ iz reda 5
7.	$\quad q \vee r$	MP iz redova 4 i 6
8.	$\quad\quad q$	pretpostavka i zaključak prvog slučaja
9.	$\quad\quad r$	pretpostavka za drugi slučaj
10.	$\quad\quad p \wedge r$	$\wedge_{\text{u}}$ iz redova 5 i 9
11.	$\quad\quad q \wedge r$	MP iz redova 3 i 10
12.	$\quad\quad q$	$\wedge^{\text{l}}_{\text{E}}$ iz reda 11
13.	$\quad q$	$\vee_{\text{E}}$ iz reda 7 i poddokaza 8 i 9–12
14.	$p \Rightarrow q$	$\Rightarrow_{\text{u}}$ iz poddokaza 5–13

Drugi smer. Izvedimo $q \Rightarrow p$, pa uvedimo ekvivalenciju.

15.	$(q \wedge r) \Rightarrow (p \wedge r)$	$\Leftrightarrow^{\text{dl}}_{\text{E}}$ iz reda 1
16.	$(q \vee r) \Rightarrow (p \vee r)$	$\Leftrightarrow^{\text{dl}}_{\text{E}}$ iz reda 2
17.	$\quad q$	privremena pretpostavka
18.	$\quad q \vee r$	$\vee^{\text{l}}_{\text{u}}$ iz reda 17
19.	$\quad p \vee r$	MP iz redova 16 i 18
20.	$\quad\quad p$	pretpostavka i zaključak prvog slučaja
21.	$\quad\quad r$	pretpostavka za drugi slučaj
22.	$\quad\quad q \wedge r$	$\wedge_{\text{u}}$ iz redova 17 i 21
23.	$\quad\quad p \wedge r$	MP iz redova 15 i 22
24.	$\quad\quad p$	$\wedge^{\text{l}}_{\text{E}}$ iz reda 23
25.	$\quad p$	$\vee_{\text{E}}$ iz reda 19 i poddokaza 20 i 21–24
26.	$q \Rightarrow p$	$\Rightarrow_{\text{u}}$ iz poddokaza 17–25
27.	$p \Leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow_{\text{u}}$ iz redova 14 i 26

6. Uvođenje implikacije

Dokažimo sekvent

$$p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q), \quad \neg p \vee q \vdash p \Rightarrow r.$$

1.	$p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)$	premisa
2.	$\neg p \vee q$	premisa
3.	$\quad p$	privremena pretpostavka
4.	$\quad \neg\neg p$	$\neg\neg_{\text{u}}$ iz reda 3
5.	$\quad q$	DS iz redova 2 i 4
6.	$\quad \neg r \Rightarrow \neg q$	MP iz redova 1 i 3
7.	$\quad \neg\neg q$	$\neg\neg_{\text{u}}$ iz reda 5
8.	$\quad \neg\neg r$	MT iz redova 6 i 7
9.	$\quad r$	$\neg\neg_{\text{E}}$ iz reda 8
10.	$p \Rightarrow r$	$\Rightarrow_{\text{u}}$ iz poddokaza 3–9

7. Dokaz kontradikcijom

Dokažimo sekvent

$$b \Leftrightarrow (e \vee f), \quad f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b) \vdash b.$$

1.	$b \Leftrightarrow (e \vee f)$	premisa
2.	$f \Leftrightarrow (a \Rightarrow \neg b)$	premisa
3.	$\quad \neg b$	privremena pretpostavka
4.	$\quad (e \vee f) \Rightarrow b$	$\Leftrightarrow_{\mathrm{E}}^{\mathrm{dl}}$ iz reda 1
5.	$\quad \neg(e \vee f)$	MT iz redova 4 i 3
6.	$\quad \neg e \wedge \neg f$	De Morganov zakon (24) iz reda 5
7.	$\quad \neg f$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 6
8.	$\quad (a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow f$	$\Leftrightarrow_{\mathrm{E}}^{\mathrm{dl}}$ iz reda 2
9.	$\quad \neg(a \Rightarrow \neg b)$	MT iz redova 8 i 7
10.	$\quad \neg\neg b$	drugi deo Leme 2, iz reda 9
11.	$\quad \bot$	$\neg_{\mathrm{E}}$ iz redova 3 i 10
12.	$\neg\neg b$	$\neg_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 3–11
13.	b	$\neg\neg_{\mathrm{E}}$ iz reda 12

8. Dokaz ekvivalencije uz premisu

Prirodnom dedukcijom dokažimo sekvent

$$r \Rightarrow p \vdash \big((p \wedge q) \vee r\big) \Leftrightarrow \big(p \wedge (q \vee r)\big).$$

Prvi smer

1.	$r \Rightarrow p$	premisa
2.	$\quad (p \wedge q) \vee r$	privremena pretpostavka
3.	$\quad\quad p \wedge q$	pretpostavka za prvi slučaj
4.	$\quad\quad p$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{l}}$ iz reda 3
5.	$\quad\quad q$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 3
6.	$\quad\quad q \vee r$	$\vee_{\mathrm{u}}^{\mathrm{l}}$ iz reda 5
7.	$\quad\quad p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_{\mathrm{u}}$ iz redova 4 i 6
8.	$\quad\quad r$	pretpostavka za drugi slučaj
9.	$\quad\quad q \vee r$	$\vee_{\mathrm{u}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 8
10.	$\quad\quad p$	$\Rightarrow_{\mathrm{E}}$ iz redova 1 i 8
11.	$\quad\quad p \wedge (q \vee r)$	$\wedge_{\mathrm{u}}$ iz redova 10 i 9
12.	$\quad p \wedge (q \vee r)$	$\vee_{\mathrm{E}}$ iz reda 2 i poddokaza 3–7 i 8–11
13.	$\big((p \wedge q) \vee r\big) \Rightarrow \big(p \wedge (q \vee r)\big)$	$\Rightarrow_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 2–12

Drugi smer

14.	$p \wedge (q \vee r)$	privremena pretpostavka
15.	p	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{l}}$ iz reda 14
16.	$q \vee r$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 14
17.	$\quad q$	pretpostavka za prvi slučaj
18.	$\quad p \wedge q$	$\wedge_{\mathrm{u}}$ iz redova 15 i 17
19.	$\quad (p \wedge q) \vee r$	$\vee_{\mathrm{u}}^{\mathrm{l}}$ iz reda 18
20.	$\quad r$	pretpostavka za drugi slučaj
21.	$\quad (p \wedge q) \vee r$	$\vee_{\mathrm{u}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 20
22.	$(p \wedge q) \vee r$	$\vee_{\mathrm{E}}$ iz reda 16 i poddokaza 17–19 i 20–21
23.	$\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Rightarrow \big((p \wedge q) \vee r\big)$	$\Rightarrow_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 14–22
24.	$\big((p \wedge q) \vee r\big) \Leftrightarrow \big(p \wedge (q \vee r)\big)$	$\Leftrightarrow_{\mathrm{u}}$ iz redova 13 i 23

9. Zadatak

a) Iskazni račun

Dokažimo sekvent

$$(p \wedge q) \Rightarrow \neg s, \quad q \wedge \neg r, \quad \neg p \Rightarrow (s \Rightarrow r) \vdash \neg s.$$

1.	$(p \wedge q) \Rightarrow \neg s$	premisa
2.	$q \wedge \neg r$	premisa
3.	$\neg p \Rightarrow (s \Rightarrow r)$	premisa
4.	$\neg\neg s$	privremena pretpostavka
5.	$\neg(p \wedge q)$	MT iz redova 1 i 4
6.	$\neg p \vee \neg q$	De Morganov zakon (22) iz reda 5
7.	q	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{l}}$ iz reda 2
8.	$\neg\neg q$	$\neg\neg_{\mathrm{u}}$ iz reda 7
9.	$\neg p$	DS iz redova 6 i 8
10.	$s \Rightarrow r$	MP iz redova 3 i 9
11.	s	$\neg\neg_{\mathrm{E}}$ iz reda 4
12.	r	MP iz redova 10 i 11
13.	$\neg r$	$\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}}$ iz reda 2
14.	$\bot$	$\neg_{\mathrm{E}}$ iz redova 12 i 13
15.	$\neg\neg\neg s$	$\neg_{\mathrm{u}}$ iz poddokaza 4–14
16.	$\neg s$	$\neg\neg_{\mathrm{E}}$ iz reda 15