Ostrva — primena iskazne logike
I nedelja

Oznake. Osoba A govori osobi B. Promenljiva p označava istinitosnu vrednost iskaza koji A kaže osobi B: $p = 1$ ako je iskaz istinit, a $p = 0$ ako je neistinit. Promenljive a i b označavaju pripadnost osoba A i B izabranom plemenu; njihovo značenje se navodi za svako ostrvo. Vrednost 1 znači da osoba pripada tom plemenu, a 0 da ne pripada.

Osnovna plemena:

- **Vernici (istinozborci)** uvek govore istinu.
- **Nevernici (lažovi)** uvek lažu.
- **Špijuni** govore istinu špijunima, a ostale lažu.
- **Dupli agenti** lažu pripadnike svog plemena, a ostalima govore istinu.

Pravila za pojedina ostrva

1. **Vernici i nevernici.** Neka a znači da je A vernik, a b da je B vernik. Istinitost iskaza zavisi samo od govornika:
$$\boxed{p \leftrightarrow a}.$$

2. **Špijuni i nevernici.** Neka a znači da je A špijun, a b da je B špijun. Iskaz je istinit samo onda kada su obe osobe špijuni:
$$\boxed{p \leftrightarrow (a \wedge b)}.$$

3. **Vernici i dupli agenti.** Neka a znači da je A vernik, a b da je B vernik. Iskaz je neistinit samo kada su obe osobe dupli agenti:
$$\boxed{p \leftrightarrow (a \vee b)}.$$

4. **Vernici i špijuni.** Neka a znači da je A špijun, a b da je B špijun. Iskaz je neistinit samo kada špijun govori verniku:
$$\boxed{p \leftrightarrow (a \rightarrow b)}.$$

5. **Severni i južni špijuni.** Neka a znači da je A severni špijun, a b da je B severni špijun. Špijuni govore istinu pripadnicima svog plemena, a pripadnike drugog plemena lažu:
$$\boxed{p \leftrightarrow (a \leftrightarrow b)}.$$

6. **Severni i južni dupli agenti.** Neka a znači da je A severni dupli agent, a b da je B severni dupli agent. Dupli agenti lažu pripadnike svog plemena, a pripadnicima drugog plemena govore istinu. Iskaz je istinit samo onda kada su osobe A i B iz različitih plemena:
$$\boxed{p \leftrightarrow \neg(a \leftrightarrow b)}.$$[1]

Zajednička tabela istinitosti. Kolona p_i daje vrednost p za ostrvo pod brojem i, uz značenje promenljivih a i b navedeno za to ostrvo.

a	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0

[1] Negacija ekvivalencije ekvivalentna je ekskluzivnoj disjunkciji: $\neg(a \leftrightarrow b) \equiv (a \veebar b)$.

Zadatak 1: ostrvo vernika i nevernika, slučaj $a = 1$

Na ostrvu vernika i nevernika osobe daju sledeće iskaze:

1. A: *C je vernik, a D je nevernik.*
2. B: *Tačno jedan od F i A je vernik.*
3. C: *H i E nisu iz istog plemena.*
4. D: *G i A su iz istog plemena.*
5. E: *F i C nisu iz istog plemena.*
6. F: *Bar jedan od B i H je nevernik.*

Treba odrediti ko je vernik, a ko nevernik, uz pretpostavku da je A vernik.

Domaći zadatak. Samostalno rešite izostavljeni slučaj $a = 0$.

Oznake i logički zapis. Promenljive a, b, c, d, e, f, g, h redom označavaju da su osobe A, B, C, D, E, F, G, H vernici. Vrednost 1 znači vernik, a 0 nevernik. Simbol $\veebar$ označava isključivu disjunkciju: tačno jedan od dva iskaza je istinit. Pošto vernik govori istinu, a nevernik laže, svaka od sledećih ekvivalencija mora biti istinita:

$$a \leftrightarrow (c \wedge \neg d), \tag{1}$$
$$b \leftrightarrow (f \veebar a), \tag{2}$$
$$c \leftrightarrow (h \veebar e), \tag{3}$$
$$d \leftrightarrow (g \leftrightarrow a), \tag{4}$$
$$e \leftrightarrow (f \veebar c), \tag{5}$$
$$f \leftrightarrow (\neg b \vee \neg h). \tag{6}$$

Postupak za $a = 1$. Iz (1), pošto je A vernik, njegov iskaz mora biti istinit:

$$c \wedge \neg d = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = 1, \qquad d = 0.$$

Dakle, C je vernik, a D nevernik. Iz (4), za $a = 1$ dobijamo $d \leftrightarrow g$.[2] Pošto je $d = 0$, sledi $g = 0$, pa je G nevernik.

Iz (2), uz $a = 1$, i iz (5), uz $c = 1$, dobijamo:

$$b \leftrightarrow f \veebar 1 \leftrightarrow \neg f, \qquad e \leftrightarrow f \veebar 1 \leftrightarrow \neg f.$$

Iz (3), pošto je $c = 1$, osobe H i E moraju biti iz različitih plemena:

$$h \veebar e \leftrightarrow 1 \quad \Longrightarrow \quad h = \neg e = f.$$

Sada u (6) zamenjujemo $b = \neg f$ i $h = f$:

$$f \leftrightarrow (\neg b \vee \neg h) \quad \Longleftrightarrow \quad f \leftrightarrow (f \vee \neg f) \quad \Longleftrightarrow \quad f \leftrightarrow 1.$$

Zato je $f = 1$, a zatim $b = 0$, $e = 0$ i $h = 1$.

Rešenje. Jedina raspodela uz pretpostavku $a = 1$ jeste:

$$\boxed{(a, b, c, d, e, f, g, h) = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)}.$$

Vernici	$A,\ C,\ F,\ H$
Nevernici	$B,\ D,\ E,\ G$

[2] Ekvivalencija sa istinitim iskazom svodi se na sam iskaz: $(g \leftrightarrow 1) \equiv g$.

Zadatak 2: ostrvo špijuna i nevernika

Na ostrvu špijuna i nevernika dati su sledeći razgovori:

1. $A \to B$: *Ako je C nevernik, onda je H špijun.*
2. $B \to C$: *Ako je F špijun, onda je A nevernik.*
3. $C \to D$: *Ako je A nevernik, onda je i B nevernik.*
4. $E \to F$: *Ako je B nevernik, onda je C špijun.*
5. $F \to G$: *Ili je D špijun, ili je A nevernik.*

U petom iskazu koristi se isključiva disjunkcija $\veebar$. Treba odrediti pripadnost svih osoba plemenima.

Oznake i logički zapis. Promenljive a, b, c, d, e, f, g, h označavaju da su osobe A, B, C, D, E, F, G, H špijuni. Vrednost 0 označava nevernika. Špijun govori istinu samo špijunu, a nevernik uvek laže. Zato je iskaz istinit tačno kada su i govornik i slušalac špijuni. Za razgovor $A \to B$ važi $p \leftrightarrow (a \wedge b)$, a na isti način zapisujemo i ostale razgovore:

$$(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg c \to h), \tag{2.1}$$
$$(b \wedge c) \leftrightarrow (f \to \neg a), \tag{2.2}$$
$$(c \wedge d) \leftrightarrow (\neg a \to \neg b), \tag{2.3}$$
$$(e \wedge f) \leftrightarrow (\neg b \to c), \tag{2.4}$$
$$(f \wedge g) \leftrightarrow (d \veebar \neg a). \tag{2.5}$$

Sve ove ekvivalencije moraju biti istinite.

Slučaj $a = 1$

Iz (2.3), pošto je $\neg a = 0$, dobijamo:

$$(c \wedge d) \leftrightarrow (0 \to \neg b) \quad \Longrightarrow \quad c \wedge d = 1,$$

pa je $c = d = 1$. Sada (2.1) postaje $b \leftrightarrow (0 \to h)$, odakle je $b = 1$. Iz (2.2) sledi:

$$1 \leftrightarrow (f \to 0) \quad \Longrightarrow \quad f = 0.$$

Međutim, u (2.4) tada dobijamo:

$$(e \wedge 0) \leftrightarrow (0 \to 1) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leftrightarrow 1.$$

To je protivrečnost, pa u ovom slučaju nema rešenja.

Slučaj $a = 0$

Iz (2.1) dobijamo $0 \leftrightarrow (\neg c \to h)$. Implikacija mora biti neistinita, što je moguće samo ako je pretpostavka istinita, a posledica neistinita:

$$\neg c = 1, \qquad h = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = 0, \qquad h = 0.$$

Ali (2.2) tada postaje:

$$(b \wedge 0) \leftrightarrow (f \to 1) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leftrightarrow 1.$$

Ponovo dobijamo protivrečnost.

Rešenje. Oba moguća slučaja za a vode u protivrečnost.

Zadatak nema rešenja.

Već prva četiri uslova isključuju sve raspodele, pa peti uslov ne može otkloniti protivrečnost.

Zadatak 3: severni i južni špijuni

Na ostrvu severnih i južnih špijuna dati su razgovori:

1. $A \to B$: *F i C su južni špijuni.*
2. $B \to C$: *E i F nisu iz istog plemena.*
3. $C \to D$: *B i A su severni špijuni.*
4. $D \to E$: *F i A su severni špijuni.*

Razmatramo samo pretpostavku $a = 0$, odnosno da je A južni špijun.

Domaći zadatak. Samostalno rešite izostavljeni slučaj $a = 1$.

Oznake i logički zapis. Promenljive a, b, c, d, e, f označavaju da su osobe A, B, C, D, E, F severni špijuni. Vrednost 0 označava južnog špijuna. Govornik govori istinu pripadniku svog plemena, a pripadniku drugog plemena laže. Za razgovor $A \to B$ važi $p \leftrightarrow (a \leftrightarrow b)$. Dobijamo sistem:

$$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (\neg f \wedge \neg c), \tag{3.1}$$
$$(b \leftrightarrow c) \leftrightarrow (e \veebar f), \tag{3.2}$$
$$(c \leftrightarrow d) \leftrightarrow (b \wedge a), \tag{3.3}$$
$$(d \leftrightarrow e) \leftrightarrow (f \wedge a). \tag{3.4}$$

Postupak za $a = 0$. Desne strane u (3.3) i (3.4) imaju vrednost 0. Zato su osobe C i D iz različitih plemena, kao i osobe D i E:

$$d = \neg c, \qquad e = \neg d = c.$$

Iz (3.1), uz $a = 0$, dobijamo:

$$\neg b = \neg f \wedge \neg c \quad \Longrightarrow \quad b = f \vee c.$$

Sada razmatramo obe moguće vrednosti za c.

Podslučaj $c = 1$

Tada je $d = 0$, $e = 1$ i $b = f \vee 1 = 1$. U (3.2) dobijamo:

$$(1 \leftrightarrow 1) \leftrightarrow (1 \veebar f) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leftrightarrow \neg f,$$

pa je $f = 0$. Sve četiri ekvivalencije su istinite za raspodelu $(a, b, c, d, e, f) = (0, 1, 1, 0, 1, 0)$.

Podslučaj $c = 0$

Tada je $d = 1$, $e = 0$ i $b = f$. U (3.2) dobijamo:

$$(b \leftrightarrow 0) \leftrightarrow (0 \veebar f) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg f \leftrightarrow f.$$

To je protivrečnost, pa ovaj podslučaj nema rešenja.

Rešenje. Jedina raspodela uz pretpostavku $a = 0$ jeste:

$$\boxed{(a, b, c, d, e, f) = (0, 1, 1, 0, 1, 0)}.$$

Severni špijuni	$B,\ C,\ E$
Južni špijuni	$A,\ D,\ F$

Zadatak 4: ostrvo špijuna i duplih agenata

Na ostrvu špijuna i duplih agenata dati su razgovori:

1. $A \to B$: *Ako je C špijun, onda je i E špijun.*
2. $B \to C$: *D i F su iz istog plemena.*
3. $C \to D$: *Tačno jedan od A i E je špijun.*
4. $D \to E$: *F je dupli agent.*
5. $E \to F$: *Ako je B špijun, onda je A dupli agent.*

Treba odrediti sve moguće raspodele osoba po plemenima.

Oznake i pravilo za ovo ostrvo. Promenljive a, b, c, d, e, f označavaju da su osobe A, B, C, D, E, F špijuni. Vrednost 0 označava duplog agenta.

Samostalni rad. Napišite tablicu istinitosti sa kolonama a, b i p za razgovor $A \to B$, po ugledu na prvih šest slučajeva iz uvodnog dela dokumenta.

Špijun govori istinu špijunima, a duple agente laže. Dupli agent laže duple agente, a špijunima govori istinu. Dakle, oba plemena govore istinu špijunima i lažu duple agente. Istinitost iskaza zavisi samo od slušaoca. Za razgovor $A \to B$ važi:

$$\boxed{p \leftrightarrow b}.$$

Zato dobijamo sistem:

$$b \leftrightarrow (c \to e), \tag{4.1}$$
$$c \leftrightarrow (d \leftrightarrow f), \tag{4.2}$$
$$d \leftrightarrow (a \veebar e), \tag{4.3}$$
$$e \leftrightarrow \neg f, \tag{4.4}$$
$$f \leftrightarrow (b \to \neg a). \tag{4.5}$$

Slučaj $b = 0$

Iz (4.1) sledi da je implikacija $c \to e$ neistinita, pa je $c = 1$ i $e = 0$. Iz (4.4) zatim dobijamo $f = 1$. Pošto je $c = 1$, iz (4.2) sledi da su D i F iz istog plemena, pa je $d = f = 1$. Iz (4.3) dobijamo:

$$1 = a \veebar 0 = a,$$

odnosno $a = 1$. Uslov (4.5) takođe važi, jer je $b \to \neg a = 0 \to 0 = 1 = f$. Prvo rešenje je:

$$\boxed{(a, b, c, d, e, f) = (1, 0, 1, 1, 0, 1)}.$$

Slučaj $b = 1$

Iz (4.5) i (4.4) sledi:

$$f = \neg a, \qquad e = \neg f = a.$$

Iz (4.3) zato dobijamo $d = a \veebar a = 0$, a iz (4.2):

$$c = (0 \leftrightarrow f) = \neg f = e.$$

Uslov (4.1) sada postaje $1 \leftrightarrow (e \to e)$, što je istinito za obe vrednosti promenljive e.

- Ako je $e = 1$, onda je $a = 1$, $f = 0$, $d = 0$ i $c = 1$. Dobijamo drugo rešenje:

$$\boxed{(a, b, c, d, e, f) = (1, 1, 1, 0, 1, 0)}.$$

- Ako je $e = 0$, onda je $a = 0$, $f = 1$, $d = 0$ i $c = 0$. Dobijamo treće rešenje:

$$\boxed{(a, b, c, d, e, f) = (0, 1, 0, 0, 0, 1)}.$$

Rešenje. Zadatak ima tačno tri moguće raspodele:

Rešenje	Špijuni	Dupli agenti
1	$A,\ C,\ D,\ F$	$B,\ E$
2	$A,\ B,\ C,\ E$	$D,\ F$
3	$B,\ F$	$A,\ C,\ D,\ E$