Diskretne strukture 1 — 5. čas

Funkcije

Osnovne definicije

Definicija (funkcija). Funkcija f iz skupa A u skup B, u oznaci $f\colon A \to B$, jeste svaka relacija $f \subseteq A \times B$ takva da za svako $a \in A$ postoji tačno jedno $b \in B$ za koje je $(a, b) \in f$, odnosno:

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)\big((a, b) \in f\big).$$

Ako je $(a, b) \in f$, pišemo $b = f(a)$.

Definicija (injektivna funkcija). Funkcija $f\colon A \to B$ je *1–1*, odnosno **injektivna**, ukoliko za svaka dva elementa $a_1, a_2 \in A$ važi:

$$a_1 \neq a_2 \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) \neq f(a_2).$$

Ekvivalentno, za svaka $a_1, a_2 \in A$ važi:

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2.$$

Definicija (surjektivna funkcija). Funkcija $f\colon A \to B$ je *na*, odnosno **surjektivna**, ukoliko za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ takvo da je $b = f(a)$:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)\big(b = f(a)\big).$$

Definicija (bijekcija). Funkcija je **bijekcija** ako i samo ako je istovremeno *1–1* i *na*, odnosno injektivna i surjektivna.

Definicija (jednakost funkcija). Za dve funkcije f i g kažemo da su **jednake** ako i samo ako imaju iste domene, iste kodomene i isto pravilo dodele. Dakle, za funkcije $f, g\colon A \to B$ važi:

$$f = g \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall a \in A)\big(f(a) = g(a)\big).$$

Primeri

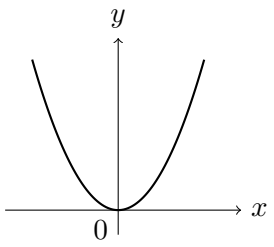
Posmatramo funkcije sa pravilom dodele $f(x) = x^2$, pri različitim izborima domena i kodomena.

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$
Funkcija **nije injektivna**, jer je

$$f(-1) = 1 = f(1), \qquad -1 \neq 1.$$

Funkcija **nije surjektivna**, jer -1 nije slika nijednog argumenta:

$$x^2 \geq 0 \qquad \text{za svako } x \in \mathbb{R}.$$



2) $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty), \quad f(x) = x^2.$
Funkcija **nije injektivna**, jer ponovo važi $f(-1) = f(1) = 1$.
Funkcija **jeste surjektivna**: za svako $y \in [0, +\infty)$ možemo uzeti $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$, pa je

$$f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

3) $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$
Funkcija **jeste injektivna**, jer za $x_1, x_2 \geq 0$ važi

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Funkcija **nije surjektivna**, jer negativni realni brojevi, na primer -1, nisu slike nijednog argumenta.

4) $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f(x) = x^2.$
Funkcija **jeste bijekcija**: injektivnost sledi kao u prethodnom primeru, a surjektivnost iz činjenice da za svako $y \geq 0$ postoji $x = \sqrt{y} \geq 0$ takvo da je $f(x) = y$.

Kompozicija funkcija

Stav. Kompozicija funkcija je funkcija. Ako su

$$f\colon A \to B, \qquad g\colon B \to C,$$

tada je njihova **kompozicija** funkcija

$$g \circ f\colon A \to C, \qquad (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A.$$

Identička i inverzna funkcija

Definicija (identička funkcija). Funkcija

$$\mathrm{Id}_A\colon A \to A, \qquad \mathrm{Id}_A(a) = a \quad \text{za svako } a \in A,$$

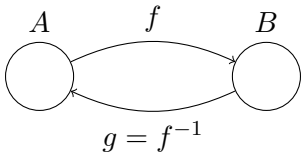
naziva se **identička funkcija** skupa A. Ona fiksira svaki element skupa A.

Stav. Ako je $f\colon A \to B$, tada postoji funkcija $g\colon B \to A$ za koju važi

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B, \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_A$$

ako i samo ako je f bijekcija.

Funkciju g nazivamo **inverznom funkcijom** funkcije f i označavamo je sa f^{-1}.



Primer. Posmatrajmo bijekciju

$$f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty), \qquad f(x) = x^2.$$

Njena inverzna funkcija je

$$f^{-1}\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty), \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Za svako $x \geq 0$ važi:

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x,$$
$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x.$$

Dakle,

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{[0,+\infty)}, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{[0,+\infty)}\,.$$

Zadatak 1: levi i desni inverz

Dokazati sledeće tvrdnje:

(a) Ako je $A \neq \varnothing$, funkcija $f\colon A \to B$ je *1–1* ako i samo ako postoji funkcija $g\colon B \to A$ takva da je

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A\,.$$

Funkcija g naziva se **levi inverz** funkcije f.

(b) Funkcija $f\colon A \to B$ je *na* ako i samo ako postoji funkcija $g\colon B \to A$ takva da je

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B\,.$$

Funkcija g naziva se **desni inverz** funkcije f.

Dokaz dela (a).

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $f\colon A \to B$ injektivna. Tražimo funkciju $g\colon B \to A$ takvu da je $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Pošto je $A \neq \varnothing$, izaberimo jedan element $a_0 \in A$. Za proizvoljno $b \in B$ imamo dve mogućnosti:

- Ako je $b = f(a)$ za neko $a \in A$, takav element a je jedinstven zbog injektivnosti funkcije f. Definišemo
$$g(b) = a.$$
- Ako b nije slika nijednog elementa skupa A, vrednost $g(b)$ možemo izabrati proizvoljno u A. Na primer, definišemo
$$g(b) = a_0.$$

Time je definisana funkcija $g\colon B \to A$. Obe funkcije
$$g \circ f\colon A \to A, \qquad \mathrm{Id}_A\colon A \to A$$
imaju isti domen i kodomen. Za svako $a \in A$ važi
$$(g \circ f)(a) = g\big(\underbrace{f(a)}_{\in B}\big) = a = \mathrm{Id}_A(a).$$
Dakle,
$$g \circ f = \mathrm{Id}_A\,.$$

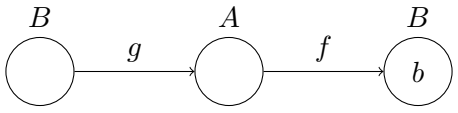
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da postoji funkcija $g\colon B \to A$ takva da je
$$g \circ f = \mathrm{Id}_A\,.$$
Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da f nije injektivna. Tada postoje $a_1, a_2 \in A$ takvi da je
$$a_1 \neq a_2, \qquad f(a_1) = f(a_2).$$
Primenom funkcije g dobijamo
$$g(f(a_1)) = g(f(a_2)),$$
$$\mathrm{Id}_A(a_1) = \mathrm{Id}_A(a_2),$$
$$a_1 = a_2.$$
To je kontradikcija sa $a_1 \neq a_2$. Prema tome, f jeste injektivna. □

Dokaz dela (b).

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $f\colon A \to B$ surjektivna. Konstruišemo funkciju $g\colon B \to A$ takvu da je
$$f \circ g = \mathrm{Id}_B\,.$$

Funkciju g konstruišemo element po element. Za svako $b \in B$, zbog surjektivnosti funkcije f, postoji bar jedan element $a_b \in A$ takav da je
$$f(a_b) = b.$$
Izaberimo po jedan takav element i definišimo
$$g(b) = a_b.$$
Tada za svako $b \in B$ važi
$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b = \mathrm{Id}_B(b).$$
Dakle,
$$f \circ g = \mathrm{Id}_B\,.$$

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da postoji funkcija $g\colon B \to A$ takva da je
$$f \circ g = \mathrm{Id}_B\,.$$
Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da f nije surjektivna. Tada postoji $b \in B$ koji nije slika nijednog elementa skupa A pri funkciji f.



Taj element b nije slika nijednog elementa ni pri kompoziciji $f \circ g$. Zaista, kada bi za neko $x \in B$ važilo

$$(f \circ g)(x) = b,$$

imali bismo

$$f\big(\underbrace{g(x)}_{\in A}\big) = b.$$

To bi značilo da je b slika elementa $g(x) \in A$ pri funkciji f, što je kontradikcija.

Prema tome, $f \circ g$ ne bi bila surjektivna. Međutim,

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B,$$

a identička funkcija Id_B jeste bijekcija, pa je i surjektivna.

Dakle, f jeste surjektivna. □

Zadatak 2: svojstva kompozicije funkcija

Neka su date funkcije

$$f\colon A \to B, \qquad g\colon B \to C.$$

Za njihovu kompoziciju $g \circ f\colon A \to C$ važe sledeće tvrdnje:

(a) Ako su f i g injektivne, tada je $g \circ f$ injektivna.

(b) Ako su f i g surjektivne, tada je $g \circ f$ surjektivna.

(c) Ako su f i g bijekcije, tada je $g \circ f$ bijekcija.

(d) Ako je $g \circ f$ injektivna, tada je f injektivna.

(e) Ako je $g \circ f$ surjektivna, tada je g surjektivna.

(f) Ako je $g \circ f$ bijekcija, tada je f injektivna, a g surjektivna.

Dokaz.

(a) Neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da je

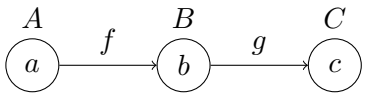
$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2).$$

Tada dobijamo

$$\begin{aligned} g(f(a_1)) &= g(f(a_2)), \\ f(a_1) &= f(a_2) && \text{jer je } g \text{ injektivna}, \\ a_1 &= a_2 && \text{jer je } f \text{ injektivna}. \end{aligned}$$

Dakle, $g \circ f$ je injektivna.

(b)



Neka je $c \in C$ proizvoljan element. Kako je g surjektivna, postoji $b \in B$ takav da je $g(b) = c$. Kako je f surjektivna, za taj b postoji $a \in A$ takav da je $f(a) = b$.
Sada je

$$c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

Prema tome, $g \circ f$ je surjektivna.

(c) Tvrdnja je direktna posledica delova **(a)** i **(b)**: kompozicija je istovremeno injektivna i surjektivna, pa je bijekcija.

(d) Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da f nije injektivna. Tada postoje $a_1, a_2 \in A$ takvi da je

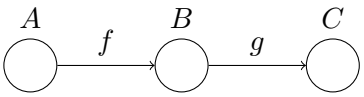
$$a_1 \neq a_2, \qquad f(a_1) = f(a_2).$$

Primenom funkcije g dobijamo

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2)),$$
$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2).$$

Ali $g \circ f$ je injektivna, pa sledi $a_1 = a_2$, što je kontradikcija. Dakle, f je injektivna.

(e) Pretpostavimo da je $g \circ f$ surjektivna.



Za proizvoljno $c \in C$ postoji $a \in A$ takav da je

$$(g \circ f)(a) = c, \qquad \text{odnosno} \qquad g\big(\underbrace{f(a)}_{\in B}\big) = c.$$

Dakle, element $f(a) \in B$ pri funkciji g preslikava se u c. Kako je c proizvoljan, funkcija g je surjektivna.

(f) Tvrdnja je direktna posledica delova **(d)** i **(e)**. Ako je $g \circ f$ bijekcija, onda je injektivna i surjektivna, pa je f injektivna, a g surjektivna.

□

Zadatak 3: karakterizacija injektivnosti

Dokazati da je funkcija $f\colon X \to Y$ injektivna ako i samo ako za svaki skup Z i svake dve funkcije $g_1, g_2\colon Z \to X$ važi:

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1 = g_2.$$

Dokaz.

($\Rightarrow$) **I način.** Neka je f injektivna, Z proizvoljan skup i neka su $g_1, g_2\colon Z \to X$ funkcije za koje je

$$f \circ g_1 = f \circ g_2.$$

Ako je $X = \varnothing$, ove funkcije mogu postojati samo za $Z = \varnothing$, kada su obe prazne i jednake. Zato dalje pretpostavljamo da je $X \neq \varnothing$.

Po delu (a) zadatka 1 postoji levi inverz $g\colon Y \to X$ takav da je

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X\,.$$

Komponovanjem sleva funkcijom g i korišćenjem asocijativnosti kompozicije dobijamo:

$$f \circ g_1 = f \circ g_2,$$
$$g \circ (f \circ g_1) = g \circ (f \circ g_2),$$
$$(g \circ f) \circ g_1 = (g \circ f) \circ g_2,$$
$$\mathrm{Id}_X \circ g_1 = \mathrm{Id}_X \circ g_2,$$
$$g_1 = g_2.$$

($\Rightarrow$) **II način.** Ponovo pretpostavimo da je f injektivna i da je $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da je $g_1 \neq g_2$. Tada postoji $z \in Z$ takav da je

$$g_1(z) \neq g_2(z).$$

Zbog injektivnosti funkcije f sledi

$$f(g_1(z)) \neq f(g_2(z)),$$

odnosno

$$(f \circ g_1)(z) \neq (f \circ g_2)(z).$$

To je kontradikcija sa pretpostavkom $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Dakle, $g_1 = g_2$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za svaki skup Z i svake funkcije $g_1, g_2 \colon Z \to X$ važi

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1 = g_2.$$

Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da f nije injektivna. Tada postoje $x_1, x_2 \in X$ takvi da je

$$x_1 \neq x_2, \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

Uzmimo jednočlani skup

$$Z = \{*\}$$

i definišimo funkcije $g_1, g_2 \colon Z \to X$ sa

$$g_1(*) = x_1, \qquad g_2(*) = x_2.$$

Obe kompozicije $f \circ g_1$ i $f \circ g_2$ preslikavaju Z u Y, a na jedinom elementu skupa Z važi

$$f(g_1(*)) = f(x_1) = f(x_2) = f(g_2(*)).$$

Zato je

$$f \circ g_1 = f \circ g_2.$$

Međutim, $g_1 \neq g_2$, jer je $g_1(*) = x_1 \neq x_2 = g_2(*)$. To je kontradikcija sa pretpostavljenim svojstvom. Prema tome, f jeste injektivna. $\square$

Dodatak: zadaci iz relacija poretka

Zadatak 2.12

Neka su

$$A = \{-6, -4, -2, 0, 1, 3, 5\}, \qquad B = \{2, 4, 8, 16, 32\}.$$

Na skupu $C = A \times B$ definišemo relaciju $\preceq$ sa

$$(x, y) \preceq (z, t) \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leq |z| \ \wedge \ y \mid t.$$

Dokazati da je $\preceq$ relacija parcijalnog uređenja na skupu C i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente, ako postoje.

Rešenje.

Refleksivnost. Za svako $(x, y) \in C$ važi

$$|x| \leq |x|, \qquad y \mid y,$$

pa je $(x, y) \preceq (x, y)$.

Antisimetričnost. Neka je

$$(x, y) \preceq (z, t), \qquad (z, t) \preceq (x, y).$$

Tada važi

$$|x| \leq |z|, \quad y \mid t, \quad |z| \leq |x|, \quad t \mid y.$$

Dakle, $|x| = |z|$. Pošto različiti elementi skupa A imaju različite apsolutne vrednosti, sledi $x = z$. Iz $y \mid t$ i $t \mid y$, kako su y, t pozitivni, dobijamo $y = t$. Prema tome,

$$(x, y) = (z, t).$$

Tranzitivnost. Neka su $(x, y), (z, t), (r, s) \in C$ takvi da je

$$(x, y) \preceq (z, t), \qquad (z, t) \preceq (r, s).$$

Tada je

$$|x| \leq |z|, \quad y \mid t, \quad |z| \leq |r|, \quad t \mid s.$$

Sledi $|x| \leq |r|$ i $y \mid s$, pa je $(x, y) \preceq (r, s)$.

Dakle, $\preceq$ je relacija parcijalnog uređenja na skupu C.

Najmanji i najveći element. Za svako $(x, y) \in C$ važi

$$|0| \leq |x| \leq |-6|, \qquad 2 \mid y, \qquad y \mid 32.$$

Zato je

$$(0, 2) \preceq (x, y) \preceq (-6, 32).$$

Prema tome,

$$\boxed{\min C = (0, 2)}, \qquad \boxed{\max C = (-6, 32)}.$$

Samim tim, $(0, 2)$ je **jedini minimalni element**, a $(-6, 32)$ je **jedini maksimalni element**. □

Zadatak 2.17

Na skupu

$$A = \{2, 3, 4, 5, 9, 16, 25, 27, 64, 81, 125\}$$

data je relacija $\preceq$ definisana sa

$$x \preceq y \quad \Longleftrightarrow \quad y = x^k \quad \text{za neko } k \in \mathbb{N}^+.$$

Dokazati da je $\preceq$ relacija parcijalnog uređenja i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente, ako postoje.

Rešenje.

Refleksivnost. Za svako $x \in A$ važi $x = x^1$, pa je $x \preceq x$.

Antisimetričnost. Ako je $x \preceq y$ i $y \preceq x$, postoje $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+$ takvi da je

$$y = x^{k_1}, \qquad x = y^{k_2}.$$

Tada je

$$x = (x^{k_1})^{k_2} = x^{k_1 k_2}.$$

Kako je $x > 1$, sledi $k_1 k_2 = 1$. Pošto su k_1, k_2 pozitivni celi brojevi, dobijamo $k_1 = k_2 = 1$, pa je $x = y$.

Tranzitivnost. Ako je $x \preceq y$ i $y \preceq z$, postoje $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+$ takvi da je

$$y = x^{k_1}, \qquad z = y^{k_2}.$$

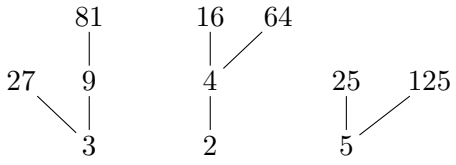
Zato je

$$z = (x^{k_1})^{k_2} = x^{k_1 k_2}.$$

Kako je $k_1 k_2 \in \mathbb{N}^+$, sledi $x \preceq z$.

Dakle, $\preceq$ je relacija parcijalnog uređenja na skupu A.

Haseov dijagram.



Minimalni elementi. Element $x \in A$ je minimalan ako ne postoje $y \in A$ i ceo broj $k > 1$ takvi da je

$$x = y^k.$$

Takvi elementi su

$$\boxed{2,\ 3,\ 5}.$$

Najmanji element ne postoji, jer ne postoji element skupa A čiji su svi ostali elementi pozitivni celobrojni stepeni.

Maksimalni elementi. Element $x \in A$ je maksimalan ako ne postoji ceo broj $k > 1$ takav da je

$x^k \in A$. Takvi elementi su

$$\boxed{16,\ 25,\ 27,\ 64,\ 81,\ 125}.$$

Najveći element ne postoji, jer ne postoji element skupa A koji je jednak nekom pozitivnom celobrojnom stepenu svakog drugog elementa skupa A. □