Relacije poretka - 4. čas

Def. Neka je $\leq$ relacija poretka na skupu A, $B \subseteq A$ i $a \in A$.

1. a je **gornje ograničenje** skupa B ukoliko je $b \leq a$ za svako $b \in B$.
2. a je **donje ograničenje** skupa B ukoliko je $a \leq b$ za svako $b \in B$.
3. a je **najveći element** skupa B ukoliko je $a \in B$ i a je gornje ograničenje za B.
4. a je **najmanji element** skupa B ukoliko je $a \in B$ i a je donje ograničenje za B.
5. a je **maksimalni element** skupa B ukoliko je $a \in B$ i ne postoji $b \in B$ takav da je $a < b$.
6. a je **minimalni element** skupa B ukoliko je $a \in B$ i ne postoji $b \in B$ takav da je $b < a$.
7. a je **supremum** skupa B ako je a najmanje gornje ograničenje.
8. a je **infimum** skupa B ako je a najveće donje ograničenje.

Primer:
1) Neka je $A = \mathbb{R}$ sa relacijom $\leq$ i neka je

$$B = [0, 1).$$

Tada imamo:

- gornje ograničenje: 2;
- donje ograničenje: 0;
- najveći element: ne postoji;
- najmanji element: 0;
- maksimalni element: ne postoji;
- minimalni element: 0;
- supremum: 1;
- infimum: 0.

Napomena. Zapis $0,99\ldots$ ne označava broj koji je manji od 1, već važi

$$0,99\ldots = 1.$$

Zaista, ako je $x = 0,99\ldots$, onda je

$$10x = 9,99\ldots,$$

pa oduzimanjem prve jednakosti od druge dobijamo $9x = 9$, odnosno $x = 1$.

2) Neka je X skup takav da je $|X| = n \geq 2$ i posmatrajmo na skupu $\mathcal{P}(X)$ relaciju $\subseteq$. Neka je

$$B = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}.$$

Tada imamo:

- gornje ograničenje: X;
- donje ograničenje: $\varnothing$;

- najveći element: ne postoji;
- najmanji element: ne postoji;
- maksimalni elementi: svi oni sa $n-1$ elemenata, kojih ima

$$\binom{n}{n-1} = n \geq 2;$$

- minimalni elementi: svi jednočlani skupovi, kojih ima $n \geq 2$;
- supremum: X;
- infimum: $\varnothing$.

Primer. Ako je $X = \{a, b\}$, onda je

$$\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},$$

pa je

$$B = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\} = \{\{a\}, \{b\}\}.$$

Elementi $\{a\}$ i $\{b\}$ su istovremeno i maksimalni i minimalni elementi skupa B.

3. Ako su ρ i σ relacije poretka na skupovima A i B redom, dokazati da je i $\rho \times \sigma$, zadata na $A \times B$ sa

$$(a, b)(\rho \times \sigma)(c, d) \quad \text{akko} \quad a\rho c \text{ i } b\sigma d,$$

takođe relacija poretka.

(R): Kako su ρ i σ refleksivne, važi $a\rho a$ za svako $a \in A$ i $b\sigma b$ za svako $b \in B$.
Dakle,

$$(a, b)(\rho \times \sigma)(a, b).$$

(ANS): Pretpostavimo da važi

$$(a, b)(\rho \times \sigma)(c, d) \quad \text{i} \quad (c, d)(\rho \times \sigma)(a, b).$$

Tada imamo

$$a\rho c, \qquad b\sigma d, \qquad c\rho a, \qquad d\sigma b.$$

Kako su ρ i σ antisimetrične, sledi

$$a = c \qquad \text{i} \qquad b = d.$$

Dakle,

$$(a, b) = (c, d).$$

(T): Pretpostavimo da važi

$$(a, b)(\rho \times \sigma)(c, d) \quad \text{i} \quad (c, d)(\rho \times \sigma)(u, v).$$

Tada je

$$a\rho c, \qquad b\sigma d, \qquad c\rho u, \qquad d\sigma v.$$

Zbog tranzitivnosti ρ i σ dobijamo

$$a\rho u \qquad \text{i} \qquad b\sigma v.$$

Prema tome,

$$(a, b)(\rho \times \sigma)(u, v).$$

Dakle, $\rho \times \sigma$ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, pa je relacija poretka na $A \times B$.

Napomena. Ako su ρ i σ relacije totalnog poretka, $\rho \times \sigma$ ne mora biti totalan poredak.

4. Neka je na $[0, \pi] \times [0, \pi]$ data relacija ρ sa

$$(x, y)\rho(z, w) \quad \text{akko} \quad \cos x \leq \cos z \text{ i } y \leq w.$$

Dokazati da je ρ poredak i odrediti minimalne, maksimalne, najveći i najmanji element skupa $[0, \pi] \times [0, \pi]$ i kruga sa centrom u

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

poluprečnika $\frac{\pi}{2}$.

Stav. Najveći, najmanji, supremum i infimum su jedinstveni ukoliko postoje.

Ako imamo jedinstveni minimalni element, tada je on i najmanji.

Ako imamo jedinstveni maksimalni element, tada je on i najveći.

Imamo

$$(x, y)\rho(z, w) \quad \text{akko} \quad \cos x \leq \cos z \text{ i } y \leq w.$$

Kako je cos opadajuća funkcija na $[0, \pi]$, to je uslov $\cos x \leq \cos z$ ekvivalentan uslovu $x \geq z$.

Dakle,

$$(x, y)\rho(z, w) \quad \text{akko} \quad x \geq z \text{ i } y \leq w.$$

Stoga, relacija ρ je zapravo proizvod poredaka $\geq$ i $\leq$ (notacija iz prethodnog zadatka), pa kako su $\geq$ i $\leq$ relacije poretka, to je i ρ relacija poretka po prethodnom zadatku.

Najmanji element skupa $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

Element (x, y) treba da zadovoljava

$$(x, y)\rho(z, w)$$

za sve $(z, w) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Dakle,

$$x \geq z \text{ za sve } z \in [0, \pi] \quad \Longrightarrow \quad x = \pi,$$

i

$$y \leq w \text{ za sve } w \in [0, \pi] \quad \Longrightarrow \quad y = 0.$$

Dakle,

$$\boxed{(\pi, 0)}$$

je najmanji element. To je i jedini minimalni element.

Najveći element skupa $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

Element (z, w) treba da zadovoljava

$$(x, y)\rho(z, w)$$

za sve $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Dakle,

$$x \geq z \text{ za sve } x \in [0, \pi] \quad \Longrightarrow \quad z = 0,$$

i

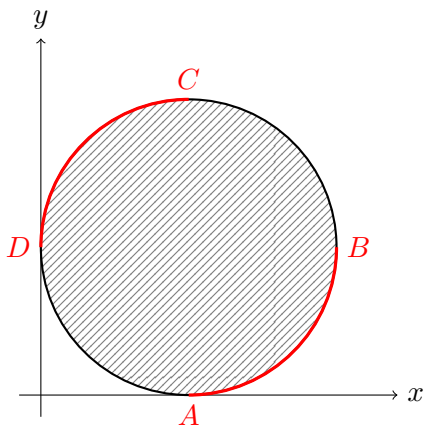
$$y \leq w \text{ za sve } y \in [0, \pi] \quad \Longrightarrow \quad w = \pi.$$

Dakle,

$$\boxed{(0, \pi)}$$

je najveći element, pa i jedini maksimalni element.

Posmatrajmo sada krug sa centrom u $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i poluprečnikom $\frac{\pi}{2}$.



Minimalni elementi (x, y) treba da budu što više desno i što više dole. Zato se minimalni elementi nalaze na donjem desnom luku kruga, tj. na luku AB.

Maksimalni elementi (z, w) treba da budu što više levo i što više gore. Zato se maksimalni elementi nalaze na gornjem levom luku kruga, tj. na luku CD.

Kako minimalni elementi nisu jedinstveni, ne postoji najmanji element.

Kako maksimalni elementi nisu jedinstveni, ne postoji najveći element.

Zašto su upravo tačke na luku CD maksimalne?

Neka je (z, w) proizvoljna tačka luka CD. Da bi postojao element (u, v) koji je strogo veći od (z, w), moralo bi da važi

$$(z, w)\rho(u, v),$$

odnosno

$$z \geq u, \qquad w \leq v,$$

pri čemu je bar jedna od ovih nejednakosti stroga.

Dakle, tačka (u, v) morala bi da se nalazi levo i/ili iznad tačke (z, w). Međutim, kako je (z, w) na gornjem levom luku kružnice, svako takvo pomeranje vodi van kruga. Zato ne postoji strogo veći element od (z, w), pa je svaka tačka luka CD maksimalna.

Analogno, neka je (x, y) proizvoljna tačka luka AB. Da bi postojao element (u, v) koji je strogo manji od (x, y), moralo bi da važi

$$(u, v)\rho(x, y),$$

odnosno

$$u \geq x, \qquad v \leq y,$$

pri čemu je bar jedna nejednakost stroga.

Dakle, (u, v) bi morala da se nalazi desno i/ili ispod tačke (x, y). Kako je (x, y) na donjem desnom luku kružnice, svako takvo pomeranje vodi van kruga. Zato ne postoji strogo manji element od (x, y), pa je svaka tačka luka AB minimalna.

5. Neka je na skupu

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

data relacija ρ sa

$$(m, x)\rho(n, y) \quad \text{akko} \quad m \mid n \text{ i } \sin x \leq \sin y.$$

Naći najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente.

Kako je sin opadajuća funkcija na $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, uslov $\sin x \leq \sin y$ ekvivalentan je uslovu $x \geq y$.
Dakle,

$$(m, x)\rho(n, y) \quad \text{akko} \quad m \mid n \text{ i } x \geq y.$$

Najmanji element. Element (m, x) treba da ispunjava

$$m \mid n \quad \text{za svako } n \in \{1, \ldots, 8\},$$

odakle je $m = 1$, i

$$x \geq y \quad \text{za svako } y \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

odakle je $x = \pi$.
Dakle,

$$\boxed{(1, \pi)}$$

je najmanji, pa i jedini minimalni element.

Najveći element. Element (n, y) treba da ispunjava

$$m \mid n \quad \text{za svako } m \in \{1, \ldots, 8\},$$

ali takav $n \in \{1, \ldots, 8\}$ ne postoji.
Takođe, iz uslova

$$x \geq y \quad \text{za svako } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

dobijamo

$$y = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, najveći element ne postoji, pa tražimo maksimalne elemente.
Za maksimalni element (n, y) već smo dobili da mora biti

$$y = \frac{\pi}{2}.$$

Dalje, n ne sme deliti nijedan drugi element skupa $\{1, \ldots, 8\}$ osim sebe, jer bi u suprotnom postojao strogo veći element. Zato je

$$n \in \{5, 6, 7, 8\}.$$

Stoga su maksimalni elementi

$$\boxed{\left(5, \frac{\pi}{2}\right),\ \left(6, \frac{\pi}{2}\right),\ \left(7, \frac{\pi}{2}\right),\ \left(8, \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Zadatak 2.15

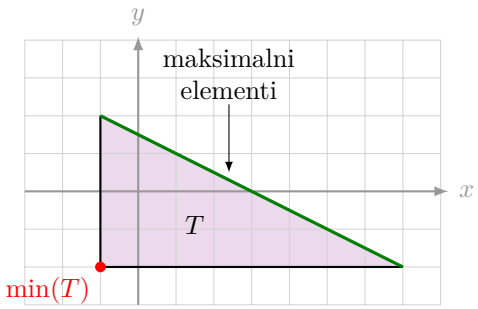
Na skupu $\mathbb{R}^2$ zadato je uređenje $\preceq$ sa

$$(a, b) \preceq (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a \leq c \text{ i } b \leq d.$$

Odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) skupa

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1,\ y \geq -2,\ x + 2y \leq 3\}.$$

Rešenje.
Skup T je zatvorena trougaona oblast sa temenima $(-1, -2)$, $(-1, 2)$ i $(7, -2)$.



Skup $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1,\ y \geq -2,\ x + 2y \leq 3\}$.

Najmanji i minimalni elementi. Za svako $(x, y) \in T$ važi $x \geq -1$ i $y \geq -2$, pa je

$$(-1, -2) \preceq (x, y).$$

Kako je $(-1, -2) \in T$, zaključujemo da je

$$\boxed{\min T = (-1, -2).}$$

Ujedno je $(-1, -2)$ jedini minimalni element skupa T.

Maksimalni elementi. Neka je $(x, y) \in T$ i $x + 2y < 3$, odnosno

$$y < \frac{3 - x}{2}.$$

Tada tačka

$$\left(x, \frac{3 - x}{2}\right)$$

pripada skupu T i važi

$$(x, y) \preceq \left(x, \frac{3 - x}{2}\right), \qquad (x, y) \neq \left(x, \frac{3 - x}{2}\right).$$

Zato (x, y) nije maksimalni element.

Sa druge strane, neka je $(x, y) \in T$ i $x + 2y = 3$. Pretpostavimo da postoji $(a, b) \in T$ takav da je

$$(x, y) \preceq (a, b), \qquad (x, y) \neq (a, b).$$

Tada je $x \leq a$ i $y \leq b$, pri čemu je bar jedna nejednakost stroga. Zato je

$$a + 2b > x + 2y = 3,$$

što protivreči uslovu $(a, b) \in T$.

Dakle, maksimalni elementi su sve tačke kose ivice trougla:

$$\boxed{\left\{ \left(x, \frac{3 - x}{2}\right) \,\middle|\, -1 \leq x \leq 7 \right\}.}$$

Najveći element. Pošto skup T ima više različitih maksimalnih elemenata, najveći element ne postoji.

Zadatak 2.18

Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je binarna relacija ρ sa

$$x \,\rho\, y \quad \Longleftrightarrow \quad x(y^2 + 1) \leq y(x^2 + 1).$$

(a) Dokazati da relacija ρ nije antisimetrična na $\mathbb{R}$.

(b) Dokazati da je ρ relacija poretka na skupu $[1, +\infty)$.

(v) Da li je ρ relacija totalnog poretka na skupu $[1, +\infty)$?

(g) Dokazati da je 1 maksimum skupa $[1, +\infty)$ u odnosu na relaciju ρ.

Rešenje.

(a) Za $x > 0$ i $y > 0$, deljenjem sa pozitivnim brojem xy dobijamo

$$x \,\rho\, y \quad \Longleftrightarrow \quad y + \frac{1}{y} \leq x + \frac{1}{x}.$$

Ako stavimo $y = \frac{1}{x}$, obe strane poslednje nejednakosti su jednake. Zato za svako $x > 0$ važi

$$x \,\rho\, \frac{1}{x} \quad \text{i} \quad \frac{1}{x} \,\rho\, x.$$

Za $x \neq 1$ brojevi x i $\frac{1}{x}$ su različiti. Prema tome, ρ nije antisimetrična na $\mathbb{R}$.

(b) Neka su $x, y \in [1, +\infty)$. Na osnovu prethodnog dobijamo

$$\begin{aligned} x \,\rho\, y &\Longleftrightarrow y + \frac{1}{y} \leq x + \frac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow (y - x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow (y - x) - \frac{y - x}{xy} \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow (y - x)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Kako je $x, y \geq 1$, važi $xy \geq 1$, pa je

$$1 - \frac{1}{xy} \geq 0.$$

Ako x i y nisu oba jednaka 1, onda je $xy > 1$, te možemo deliti strogo pozitivnim faktorom $1 - \frac{1}{xy}$. Dobijamo

$$x \,\rho\, y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq y.$$

I za $x = y = 1$ važe obe strane ove ekvivalencije. Dakle, na skupu $[1, +\infty)$ važi

$$\boxed{x \,\rho\, y \Longleftrightarrow x \geq y.}$$

Relacija ρ se na ovom skupu poklapa sa relacijom $\geq$, pa je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Prema tome, ρ je relacija poretka na $[1, +\infty)$.

(v) Za svaka dva broja $x, y \in [1, +\infty)$ važi $x \geq y$ ili $y \geq x$, odnosno

$$x \,\rho\, y \quad \text{ili} \quad y \,\rho\, x.$$

Zato je ρ relacija totalnog poretka.

(g) Za svako $x \in [1, +\infty)$ važi $x \geq 1$, odnosno $x \,\rho\, 1$. Pošto $1 \in [1, +\infty)$, sledi da je 1 najveći element ovog skupa u odnosu na ρ:

$$\boxed{\max_{\rho}[1, +\infty) = 1.}$$