1.7. Dokazati da važi

$$C \subseteq A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad B^c \cap C \subseteq A.$$

Dokaz.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $C \subseteq A \cup B$. Dokažimo da je $B^c \cap C \subseteq A$.

Neka je $x \in B^c \cap C$. To znači da je $x \notin B$ i $x \in C \subseteq A \cup B$. Dakle, $x \in A \cup B$ i $x \notin B$, te zaključujemo da je $x \in A$.

Prema tome,

$$B^c \cap C \subseteq A.$$

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $B^c \cap C \subseteq A$. Neka je $x \in C$.

Ukoliko je $x \notin B$, onda imamo da je $x \in B^c \cap C$, pa po pretpostavci $x \in A$, a stoga i $x \in A \cup B$.

Ukoliko pak $x \in B$, onda svakako $x \in A \cup B$.

Dakle, u oba slučaja je $x \in A \cup B$, pa je

$$C \subseteq A \cup B.$$

Prema tome,

$$\boxed{C \subseteq A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad B^c \cap C \subseteq A.}$$

1.10. Primetimo da je $x \in A \setminus B$ ako i samo ako je $x \in A$ i nije $x \in B$, što možemo zapisati kao

$$x \in A \quad \text{i} \quad x \in B^c,$$

pa je

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Dalje, posmatrajmo skup $(A^c \cap B^c)^c$. Prema De Morganovim zakonima i osobini $(A^c)^c = A$, važi

$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B.$$

1.11. Neka su skupovi

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{2, 3\}, \qquad C = \{2, 4\}.$$

Tada je

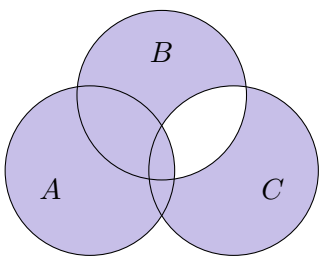
$$A \cap B = \{2\} = A \cap C,$$

ali je očigledno

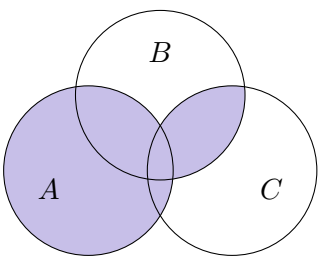
$$B \neq C.$$

1.12. Posmatrajmo Venove dijagrame skupova

$$A \cup (B \triangle C) \qquad \text{i} \qquad (B \cap C) \cup A.$$

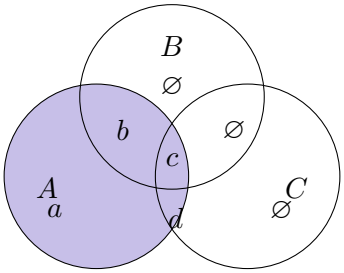


$A \cup (B \triangle C)$



$(B \cap C) \cup A$

Upoređujući osenčane delove dolazimo do zaključka koji je predstavljen na narednom dijagramu:



$$A = a \cup b \cup c \cup d, \qquad B = b \cup c, \qquad C = c \cup d,$$

gde a, b, c, d predstavljaju potencijalno neprazne skupove.

Prema tome, zaključujemo da skupovni identitet

$$A \cup (B \triangle C) = (B \cap C) \cup A$$

važi pod uslovom da je

$$B \cup C \subseteq A.$$

Za kraj, proverimo da li smo došli do korektnog zaključka. Pretpostavimo da važi

$$B \cup C \subseteq A$$

i dokažimo da je tada

$$A \cup (B \triangle C) = (B \cap C) \cup A.$$

Sledi da je

$$B \triangle C \subseteq B \cup C \subseteq A,$$

pa je

$$A \cup (B \triangle C) = A.$$

Takođe je

$$B \cap C \subseteq B \cup C \subseteq A,$$

pa je

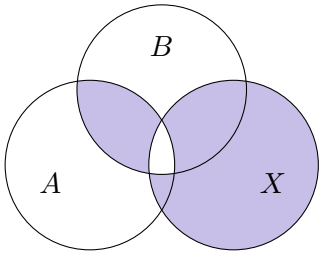
$$(B \cap C) \cup A = A.$$

Prema tome,

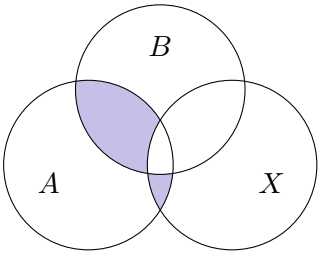
$$\boxed{A \cup (B \triangle C) = (B \cap C) \cup A.}$$

1.13. Posmatrajmo skupove

$$(A \cap B) \triangle X \qquad \text{i} \qquad A \cap (B \triangle X).$$



$(A \cap B) \triangle X$



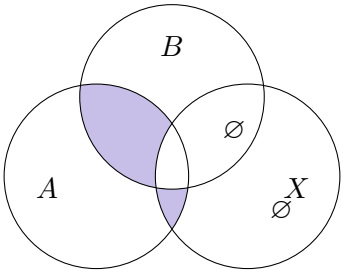
$A \cap (B \triangle X)$

Poređenjem odgovarajućih Venovih dijagrama dolazimo do zaključka da jednakost

$$(A \cap B) \triangle X = A \cap (B \triangle X)$$

važi ako je

$$X \subseteq A.$$



Dokažimo to i formalno. Neka je $X \subseteq A$. Tada, za proizvoljan element x, važi:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \triangle X &\iff x \in (A \cap B) \setminus X \text{ ili } x \in X \setminus (A \cap B) \\
&\iff (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin X) \\
&\quad \vee (x \in X \wedge x \notin A \cap B) \\
&\iff (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin X) \\
&\quad \vee (x \in X \wedge x \in A \wedge x \notin B) \\
&\iff (x \in A \wedge x \in B \setminus X) \ \vee \ (x \in A \wedge x \in X \setminus B) \\
&\iff x \in A \wedge \big(x \in B \setminus X \ \vee \ x \in X \setminus B\big) \\
&\iff x \in A \wedge x \in B \triangle X \\
&\iff x \in A \cap (B \triangle X).
\end{aligned}$$

U trećoj ekvivalenciji koristili smo pretpostavku $X \subseteq A$: ako je $x \in X$, onda je automatski $x \in A$, pa uslov $x \notin A \cap B$ postaje ekvivalentan uslovu $x \notin B$.

Prema tome,

$$\boxed{(A \cap B) \triangle X = A \cap (B \triangle X)}$$

za $X \subseteq A$.

Dakle, važi skupovni identitet

$$(A \cap B) \triangle X = A \cap (B \triangle X).$$

Drugim rečima, svako

$$X \subseteq A$$

je rešenje date jednačine.

Proverimo još da li za sva rešenja X date jednačine važi da je $X \subseteq A$.

Pretpostavimo suprotno, neka je X rešenje jednačine

$$(A \cap B) \triangle X = A \cap (B \triangle X)$$

i neka $X \not\subseteq A$.

Kako $X \not\subseteq A$, postoji $x \in X$ takav da $x \notin A$. Tada je

$$x \in X \setminus (A \cap B) \subseteq (A \cap B) \triangle X.$$

Sa druge strane, pošto $x \notin A$, imamo

$$x \notin A \cap (B \triangle X).$$

Dakle,

$$(A \cap B) \triangle X \neq A \cap (B \triangle X),$$

što je kontradikcija.

Prema tome, za svako rešenje mora važiti

$$X \subseteq A.$$

Na osnovu prethodnih razmatranja, jedina rešenja date jednačine su skupovi X za koje važi

$$\boxed{X \subseteq A}.$$

Definicija 2.1. Neka su A i B skupovi. **Relacija** ρ sa skupa A u skup B je svaki podskup od $A \times B$. Dakle,

$$\rho \subseteq A \times B.$$

Ako je $A = B$, onda kažemo da je ρ **binarna relacija** na skupu A.

Za $(a, b) \in \rho$ koristimo i zapis

$$a\rho b.$$

Primer 2.2. Neka su skupovi

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad \text{i} \qquad B = \{a, b, c\}.$$

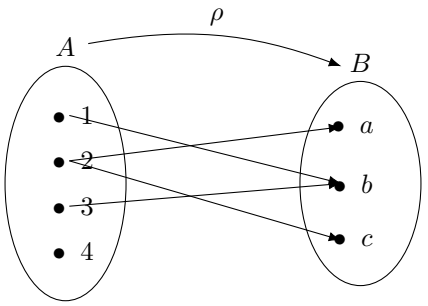
Relacije

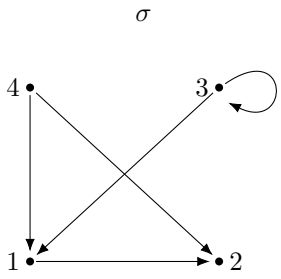
$$\rho = \{(1, b), (2, a), (2, c), (3, b)\} \subseteq A \times B$$

i

$$\sigma = \{(1, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\} \subseteq A^2$$

pomoću dijagrama predstavljamo na sledeći način:





Definicija 2.3. Domen relacije $\rho \subseteq A \times B$ je skup

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \text{postoji } b \in B \text{ takav da je } (a, b) \in \rho\}.$$

Slika relacije ρ je

$$\mathrm{Im}(\rho) = \{b \in B \mid \text{postoji } a \in A \text{ takav da je } (a, b) \in \rho\}.$$

Definicija 2.4. Inverzna relacija relacije $\rho \subseteq A \times B$ je

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\} \subseteq B \times A.$$

Primetimo da je

$$\mathrm{Dom}(\rho^{-1}) = \mathrm{Im}(\rho),$$

kao i da je

$$\mathrm{Im}(\rho^{-1}) = \mathrm{Dom}(\rho).$$

Definicija 2.5. Kompozicija relacija $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$ je relacija

$$\sigma \circ \rho = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{postoji } b \in B \text{ takav da je } (a, b) \in \rho \text{ i } (b, c) \in \sigma\} \subseteq A \times C.$$

Dakle, za relacije $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$ važi da je

$$a\,(\sigma \circ \rho)\,c \quad \text{akko} \quad a\rho b \text{ i } b\sigma c \text{ za neko } b \in B.$$

Tvrđenje 2.9. Za relacije $\rho, \sigma \subseteq A \times B$ važi:

1. Ako je $\rho \subseteq \sigma$, onda je
$$\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}.$$

2.
$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho.$$

Dokaz.
1. Neka je $(a, b) \in \rho^{-1}$. Tada je $(b, a) \in \rho$. Prema pretpostavci je $\rho \subseteq \sigma$, pa je i $(b, a) \in \sigma$, to jest
$$(a, b) \in \sigma^{-1}.$$

Dakle,
$$\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}.$$

2. Važi
$$(a, b) \in \rho \iff (b, a) \in \rho^{-1} \iff (a, b) \in (\rho^{-1})^{-1}.$$

Prema tome,
$$\boxed{(\rho^{-1})^{-1} = \rho}.$$

Tvrđenje 2.10. Ako su date relacije
$$\rho \subseteq A \times B \qquad \text{i} \qquad \sigma \subseteq B \times C,$$

tada važi
$$\boxed{(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}}.$$

Dokaz. Primetimo prvo da je
$$\sigma \circ \rho \subseteq A \times C$$

i
$$(\sigma \circ \rho)^{-1} \subseteq C \times A.$$

Važi:
$$\begin{aligned}(c, a) \in (\sigma \circ \rho)^{-1} &\iff (a, c) \in \sigma \circ \rho \\ &\iff \text{postoji } b \in B \text{ takav da je } (a, b) \in \rho \text{ i } (b, c) \in \sigma \\ &\iff \text{postoji } b \in B \text{ takav da je } (b, a) \in \rho^{-1} \text{ i } (c, b) \in \sigma^{-1} \\ &\iff (c, a) \in \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}.\end{aligned}$$

Dakle,
$$\boxed{(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}}.$$

Kako je relacija skup, jasno je šta je presek ili unija dve relacije.

Tvrđenje 2.11. Ako su
$$\rho, \sigma \subseteq A \times B,$$

tada važi:

1.
$$(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}.$$

2.
$$(\sigma \cap \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}.$$

Dokaz.

1.

$$\begin{aligned}(b,a) \in (\sigma \cup \rho)^{-1} &\iff (a,b) \in \sigma \cup \rho \\ &\iff (a,b) \in \sigma \text{ ili } (a,b) \in \rho \\ &\iff (b,a) \in \sigma^{-1} \text{ ili } (b,a) \in \rho^{-1} \\ &\iff (b,a) \in \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\boxed{(\sigma \cup \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cup \rho^{-1}}.$$

2.

$$\begin{aligned}(b,a) \in (\sigma \cap \rho)^{-1} &\iff (a,b) \in \sigma \cap \rho \\ &\iff (a,b) \in \sigma \text{ i } (a,b) \in \rho \\ &\iff (b,a) \in \sigma^{-1} \text{ i } (b,a) \in \rho^{-1} \\ &\iff (b,a) \in \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\boxed{(\sigma \cap \rho)^{-1} = \sigma^{-1} \cap \rho^{-1}}.$$

Tvrđenje 2.12. Neka su

$$\rho_1, \rho_2 \subseteq A \times B \qquad \text{i} \qquad \sigma \subseteq B \times C.$$

Tada važi:

1. Ako je $\rho_1 \subseteq \rho_2$, onda je
$$\sigma \circ \rho_1 \subseteq \sigma \circ \rho_2.$$
2. Ako je $A = B$ i $\rho_1 \subseteq \rho_2$, onda je
$$\rho_1 \circ \rho_1 \subseteq \rho_2 \circ \rho_2.$$
3. $$\sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = (\sigma \circ \rho_1) \cup (\sigma \circ \rho_2).$$
4. $$\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subseteq (\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2).$$

Dokaz.

1. Neka je

$$(a,c) \in \sigma \circ \rho_1.$$

Tada postoji $b \in B$ takav da je

$$(a,b) \in \rho_1 \qquad \text{i} \qquad (b,c) \in \sigma.$$

Kako je $\rho_1 \subseteq \rho_2$, imamo

$$(a,b) \in \rho_2.$$

Dakle, postoji $b \in B$ takav da je $(a,b) \in \rho_2$ i $(b,c) \in \sigma$, pa je

$$(a,c) \in \sigma \circ \rho_2.$$

Prema tome,

$$\boxed{\sigma \circ \rho_1 \subseteq \sigma \circ \rho_2}.$$

2. Neka je

$$(a, c) \in \rho_1 \circ \rho_1.$$

Tada postoji $b \in A$ takav da je

$$(a, b) \in \rho_1 \qquad \text{i} \qquad (b, c) \in \rho_1.$$

Kako je $\rho_1 \subseteq \rho_2$, sledi

$$(a, b) \in \rho_2 \qquad \text{i} \qquad (b, c) \in \rho_2.$$

Zato je

$$(a, c) \in \rho_2 \circ \rho_2.$$

Dakle,

$$\boxed{\rho_1 \circ \rho_1 \subseteq \rho_2 \circ \rho_2}.$$

3. Dokazaćemo obe inkluzije.
Kako je

$$\rho_1 \subseteq \rho_1 \cup \rho_2,$$

iz prvog dela sledi

$$\sigma \circ \rho_1 \subseteq \sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2).$$

Isto tako, iz

$$\rho_2 \subseteq \rho_1 \cup \rho_2$$

dobijamo

$$\sigma \circ \rho_2 \subseteq \sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2).$$

Stoga,

$$(\sigma \circ \rho_1) \cup (\sigma \circ \rho_2) \subseteq \sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2).$$

Za obrnutu inkluziju, neka je

$$(a, c) \in \sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2).$$

Tada postoji $b \in B$ takav da je

$$(a, b) \in \rho_1 \cup \rho_2 \qquad \text{i} \qquad (b, c) \in \sigma.$$

Ako je $(a, b) \in \rho_1$, onda je

$$(a, c) \in \sigma \circ \rho_1.$$

Ako je $(a, b) \in \rho_2$, onda je

$$(a, c) \in \sigma \circ \rho_2.$$

U oba slučaja,

$$(a, c) \in (\sigma \circ \rho_1) \cup (\sigma \circ \rho_2).$$

Dakle,

$$\sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2) \subseteq (\sigma \circ \rho_1) \cup (\sigma \circ \rho_2).$$

Prema tome,

$$\boxed{\sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = (\sigma \circ \rho_1) \cup (\sigma \circ \rho_2)}.$$

4. Kako je

$$\rho_1 \cap \rho_2 \subseteq \rho_1,$$

iz prvog dela sledi

$$\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subseteq \sigma \circ \rho_1.$$

Isto tako, pošto je

$$\rho_1 \cap \rho_2 \subseteq \rho_2,$$

dobijamo

$$\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subseteq \sigma \circ \rho_2.$$

Prema tome,

$$\boxed{\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subseteq (\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)}.$$