Diskretne strukture 1 – 6. čas

Karakteristične funkcije

Neka je X ambijentalni skup i $A \subseteq X$. Definišemo

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Funkcija χ_A naziva se **karakteristična funkcija** skupa A (ili **indikator-funkcija** skupa A).

Primer. Neka je

$$X = \{1,2\}, \qquad A = \{1\}.$$

Tada je

$$\chi_A(1) = 1, \qquad \chi_A(2) = 0.$$

Osobine. Neka su $A, B \subseteq X$. Tada važi:

1. $\chi_\varnothing(x) = 0$ za svako $x \in X$.
2. $\chi_X(x) = 1$ za svako $x \in X$.
3. $$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x).$$
4. $$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x).$$
5. Za razliku skupova:
$$\begin{aligned} \chi_{A\setminus B}(x) &= \chi_{A\cap B^c}(x) \\ &= \chi_A(x)\chi_{B^c}(x) \\ &= \chi_A(x)\big(1-\chi_B(x)\big) \\ &= \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x). \end{aligned}$$
6. Za uniju, koristeći De Morganov zakon $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, dobijamo:
$$\begin{aligned} \chi_{A\cup B}(x) &= \chi_{(A^c\cap B^c)^c}(x) \\ &= 1 - \chi_{A^c\cap B^c}(x) \\ &= 1 - \chi_{A^c}(x)\chi_{B^c}(x) \\ &= 1 - \big(1-\chi_A(x)\big)\big(1-\chi_B(x)\big) \\ &= 1 - \big(1-\chi_A(x)-\chi_B(x)+\chi_A(x)\chi_B(x)\big) \\ &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x). \end{aligned}$$
7. Za simetričnu razliku, pošto je $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, imamo
$$\begin{aligned} \chi_{A\triangle B}(x) &= \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}(x) \\ &= \chi_{A\setminus B}(x) + \chi_{B\setminus A}(x) - \chi_{A\setminus B}(x)\chi_{B\setminus A}(x) \\ &= \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_B(x) - \chi_B(x)\chi_A(x) \\ &\quad - \big(\chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)\big)\big(\chi_B(x) - \chi_B(x)\chi_A(x)\big) \\ &= \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) \\ &\quad - \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_A^2(x)\chi_B(x) + \chi_A(x)\chi_B^2(x) - \chi_A^2(x)\chi_B^2(x). \end{aligned}$$

Kako karakteristične funkcije uzimaju samo vrednosti 0 i 1, važi

$$\chi_A^2(x) = \chi_A(x), \qquad \chi_B^2(x) = \chi_B(x).$$

Zato

$$\begin{aligned}\chi_{A\triangle B}(x) &= \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)\\ &\quad - \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_A(x)\chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)\\ &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x).\end{aligned}$$

Računanje u $\mathbb{Z}_2$

Posmatrajmo skup

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

i operacije + i · definisane na sledeći način:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Dakle,

$$0+0=0, \qquad 0+1=1, \qquad 1+0=1, \qquad 1+1=0,$$

dok je

$$0\cdot 0=0, \qquad 0\cdot 1=0, \qquad 1\cdot 0=0, \qquad 1\cdot 1=1.$$

U $\mathbb{Z}_2$ sabiranje je isto što i oduzimanje. Zaista,

$$a - b = a + (-b) = a + b,$$

jer je $-b$ element suprotan elementu b, a u $\mathbb{Z}_2$ važi

$$-b = b.$$

U $\mathbb{Z}_2$ važi

$$a^2 = a$$

za svako $a \in \mathbb{Z}_2$.

Stoga dobijamo pojednostavljene formule:

$$\boxed{\begin{aligned}\chi_{A\cap B} &= \chi_A\chi_B,\\ \chi_{A^c} &= 1 + \chi_A,\\ \chi_{A\setminus B} &= \chi_A + \chi_A\chi_B,\\ \chi_{A\cup B} &= \chi_A + \chi_B + \chi_A\chi_B,\\ \chi_{A\triangle B} &= \chi_A + \chi_B.\end{aligned}}$$

U nastavku koristimo ove formule.

Stav. Ako su A i B podskupovi ambijentalnog skupa X, tada je

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_A = \chi_B.$$

1. Dokazati skupovni identitet

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Rešenje. Označimo

$$L = A \cap (B \cup C), \qquad D = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Za levu stranu dobijamo

$$\begin{aligned} \chi_L &= \chi_{A\cap(B\cup C)} = \chi_A \chi_{B\cup C} \\ &= \chi_A(\chi_B + \chi_C + \chi_B\chi_C) \\ &= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C. \end{aligned}$$

Za desnu stranu:

$$\begin{aligned} \chi_D &= \chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} \\ &= \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} + \chi_{A\cap B}\chi_{A\cap C} \\ &= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + (\chi_A\chi_B)(\chi_A\chi_C) \\ &= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C \\ &= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C, \end{aligned}$$

jer je $\chi_A^2 = \chi_A$.
Dakle,

$$\chi_L = \chi_D.$$

Po prethodnom stavu sledi

$$\boxed{L = D},$$

odnosno

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).}$$

2. Dokazati skupovni identitet

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Rešenje. Označimo

$$L = A \setminus (B \setminus C), \qquad D = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Za levu stranu dobijamo

$$\begin{aligned} \chi_L &= \chi_{A\setminus(B\setminus C)} = \chi_A + \chi_A\chi_{B\setminus C} \\ &= \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_B\chi_C) \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C. \end{aligned}$$

Za desnu stranu:

$$\begin{aligned} \chi_D &= \chi_{(A\setminus B)\cup(A\cap C)} \\ &= \chi_{A\setminus B} + \chi_{A\cap C} + \chi_{A\setminus B}\chi_{A\cap C} \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + (\chi_A + \chi_A\chi_B)\chi_A\chi_C \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C. \end{aligned}$$

Kako je $\chi_L = \chi_D$, po prethodnom stavu sledi

$$\boxed{L = D},$$

odnosno

$$\boxed{A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).}$$

3. Naći potreban i dovoljan uslov da važi

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C).$$

Rešenje. Važi

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C) \iff \chi_{(A\setminus B)\setminus C} = \chi_{A\setminus(B\setminus C)}.$$

Za levu stranu imamo

$$\begin{aligned}\chi_{(A\setminus B)\setminus C} &= \chi_{A\setminus B} + \chi_{A\setminus B}\chi_C \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + (\chi_A + \chi_A\chi_B)\chi_C \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

Za desnu stranu:

$$\begin{aligned}\chi_{A\setminus(B\setminus C)} &= \chi_A + \chi_A\chi_{B\setminus C} \\ &= \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_B\chi_C) \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C) &\iff \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C \\ &\qquad = \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C \\ &\iff \chi_A\chi_C = 0 \\ &\iff \chi_{A\cap C} = \chi_\varnothing \\ &\iff A \cap C = \varnothing.\end{aligned}$$

Dakle, potreban i dovoljan uslov je

$$\boxed{A \cap C = \varnothing}.$$

4. Ako je A proizvoljan skup, a X i Y skupovi za koje važi

$$A \cap X = A \cap Y \qquad \text{i} \qquad A \cup X = A \cup Y,$$

dokazati da je $X = Y$.

Rešenje. Iz prve jednakosti dobijamo

$$\chi_{A\cap X} = \chi_{A\cap Y},$$

odnosno

$$\chi_A\chi_X = \chi_A\chi_Y.$$

Iz druge jednakosti sledi

$$\chi_{A\cup X} = \chi_{A\cup Y},$$

pa je

$$\chi_A + \chi_X + \chi_A\chi_X = \chi_A + \chi_Y + \chi_A\chi_Y.$$

Kako je $\chi_A\chi_X = \chi_A\chi_Y$, ovi članovi se poništavaju, a poništava se i χ_A. Ostaje

$$\chi_X = \chi_Y.$$

Po prethodnom stavu zaključujemo

$$\boxed{X = Y}.$$

5. Dokazati da važi

$$A = B \cup C \quad \Longleftrightarrow \quad A\triangle B = C \setminus B.$$

Rešenje.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je

$$A = B \cup C.$$

Tada je

$$\chi_A = \chi_{B\cup C} = \chi_B + \chi_C + \chi_B\chi_C.$$

Za levu stranu jednakosti koju treba dokazati dobijamo

$$\begin{aligned}\chi_{A\triangle B} &= \chi_A + \chi_B \\ &= \chi_B + \chi_C + \chi_B\chi_C + \chi_B \\ &= \chi_C + \chi_B\chi_C.\end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$\chi_{C\setminus B} = \chi_C + \chi_C\chi_B.$$

Dakle,

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_{C\setminus B},$$

pa je

$$A\triangle B = C \setminus B.$$

($\Leftarrow$) Pretpostavimo sada da je

$$A\triangle B = C \setminus B.$$

Tada

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_{C\setminus B},$$

odnosno

$$\chi_A + \chi_B = \chi_C + \chi_C\chi_B.$$

Sabiranjem χ_B sa obe strane dobijamo

$$\chi_A = \chi_B + \chi_C + \chi_B\chi_C.$$

Ali

$$\chi_B + \chi_C + \chi_B\chi_C = \chi_{B\cup C},$$

pa je

$$\chi_A = \chi_{B\cup C}.$$

Prema prethodnom stavu,

$$\boxed{A = B \cup C}.$$

Dakle,

$$\boxed{A = B \cup C \quad \Longleftrightarrow \quad A\triangle B = C \setminus B.}$$

6. Neka su A, B, C proizvoljni skupovi i neka je

$$L = A \cap (B \cup C), \qquad D = (A \cap B)\triangle(A \cap C).$$

a) Dokazati da je

$$L = D \iff A \cap B \cap C = \varnothing.$$

b) Ispitati da li u opštem slučaju važi bar jedna od inkluzija

$$L \subseteq D \qquad \text{ili} \qquad D \subseteq L.$$

Rešenje.

a) Koristeći karakteristične funkcije u $\mathbb{Z}_2$, imamo

$$\begin{aligned}
L = D &\iff \chi_L = \chi_D \\
&\iff \chi_{A\cap(B\cup C)} = \chi_{(A\cap B)\triangle(A\cap C)} \\
&\iff \chi_A\chi_{B\cup C} = \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} \\
&\iff \chi_A(\chi_B + \chi_C + \chi_B\chi_C) = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C \\
&\iff \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C \\
&\iff \chi_A\chi_B\chi_C = 0 \\
&\iff \chi_{A\cap B\cap C} = \chi_\varnothing \\
&\iff A \cap B \cap C = \varnothing.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\boxed{L = D \iff A \cap B \cap C = \varnothing.}$$

b) Prvi način.

Koristimo činjenicu

$$E \subseteq F \iff E \cap F = E.$$

Da bismo utvrdili da li je $L \subseteq D$ ili $D \subseteq L$, posmatrajmo $L \cap D$. Imamo

$$\chi_L = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C,$$

dok je

$$\chi_D = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C.$$

Zato

$$\begin{aligned}
\chi_{L\cap D} &= \chi_L\chi_D \\
&= (\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C)(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C) \\
&= \chi_A^2\chi_B^2 + \chi_A^2\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_C^2 \\
&\quad + \chi_A^2\chi_B^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C^2.
\end{aligned}$$

Kako u $\mathbb{Z}_2$ važi $\chi_A^2 = \chi_A$, $\chi_B^2 = \chi_B$ i $\chi_C^2 = \chi_C$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\chi_{L\cap D} &= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_C \\
&\quad + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C \\
&= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C \\
&= \chi_D.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$L \cap D = D,$$

pa je

$$\boxed{D \subseteq L}.$$

Prema tome, inkluzija $D \subseteq L$ važi uvek.

Drugi način.

Za skupove E, F važi

$$E \subseteq F \iff \chi_E(x) \leq \chi_F(x) \quad \text{za svako } x.$$

Imamo

$$\chi_L = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C, \qquad \chi_D = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C,$$

odnosno

$$\chi_L = \chi_D + \chi_A\chi_B\chi_C.$$

Jedini potencijalno kritičan slučaj za inkluziju $D \subseteq L$ bio bi

$$\chi_D(x) = 1 \qquad \text{i} \qquad \chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x) = 1,$$

jer bi tada u $\mathbb{Z}_2$ bilo $\chi_L(x) = 1 + 1 = 0$.

Međutim, ako je

$$\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x) = 1,$$

onda je

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) = \chi_C(x) = 1,$$

pa je

$$\chi_D(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) + \chi_A(x)\chi_C(x) = 1 + 1 = 0$$

u $\mathbb{Z}_2$.

Dakle, kritičan slučaj se nikada ne dešava. Zato za svako x važi

$$\chi_D(x) \leq \chi_L(x),$$

pa ponovo zaključujemo

$$\boxed{D \subseteq L}.$$

7. Dokazati da važi

$$A \cap (B \triangle C) = B \iff A \cap C = \varnothing \text{ i } B \subseteq A.$$

Rešenje.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je

$$A \cap C = \varnothing \qquad \text{i} \qquad B \subseteq A.$$

Kako je $B \subseteq A$, važi $A \cap B = B$, pa je

$$\chi_A\chi_B = \chi_B.$$

Takođe, iz $A \cap C = \varnothing$ sledi

$$\chi_A\chi_C = 0.$$

Zato

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap(B\triangle C)} &= \chi_A\chi_{B\triangle C} \\ &= \chi_A(\chi_B + \chi_C) \\ &= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C \\ &= \chi_B + 0 \\ &= \chi_B. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\boxed{A \cap (B \triangle C) = B}.$$

($\Rightarrow$) Pretpostavimo sada da je

$$A \cap (B \triangle C) = B.$$

Tada je

$$\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C = \chi_B.$$

Najpre pokažimo da je $B \subseteq A$.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $x \in B$ takav da $x \notin A$, pa je

$$\chi_B(x) = 1, \qquad \chi_A(x) = 0.$$

Uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobijamo

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot \chi_C(x) = 1,$$

odnosno

$$0 = 1,$$

što je kontradikcija. Dakle,

$$B \subseteq A.$$

Sada pokažimo da je $A \cap C = \varnothing$.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $x \in A \cap C$. Tada je

$$\chi_A(x) = 1, \qquad \chi_C(x) = 1.$$

Imamo dve mogućnosti.
Ako je $x \in B$, onda je $\chi_B(x) = 1$, pa iz

$$\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C = \chi_B$$

dobijamo

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1,$$

odnosno u $\mathbb{Z}_2$

$$0 = 1,$$

što je nemoguće.
Ako je $x \notin B$, onda je $\chi_B(x) = 0$, pa dobijamo

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0,$$

odnosno

$$1 = 0,$$

što je ponovo nemoguće.
Dakle, takav x ne postoji, pa je

$$A \cap C = \varnothing.$$

Prema tome,

$$\boxed{A \cap (B \triangle C) = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap C = \varnothing \text{ i } B \subseteq A.}$$

Direktna i inverzna slika skupa

Def. Ako je $f : X \to Y$ i $A \subseteq X$, tada pod **direktnom slikom** skupa A pri funkciji f podrazumevamo skup

$$f[A] = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq Y.$$

Def. Ako je $f : X \to Y$ i $B \subseteq Y$, tada pod **inverznom slikom** skupa B pri funkciji f podrazumevamo skup

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X.$$

Primer. Neka je

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$$

zadata sa

$$f(1) = f(2) = a, \qquad f(3) = b.$$

Tada je

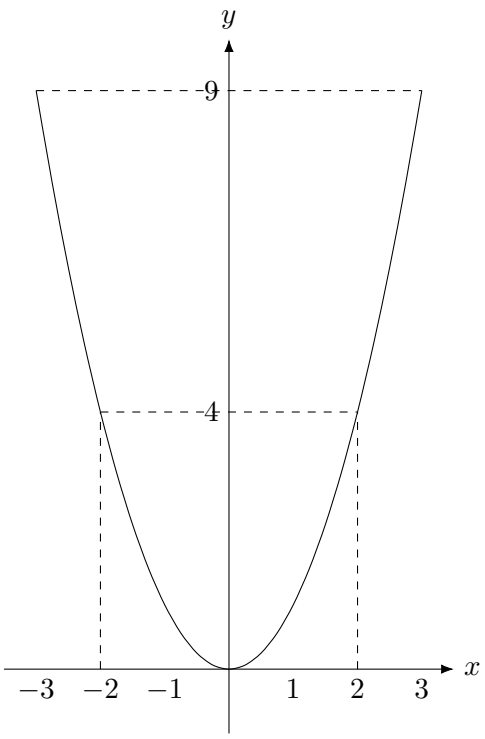
$$f[\{1, 2\}] = \{a\},$$

dok je

$$f^{-1}[\{b\}] = \{3\}, \qquad f^{-1}[\{a\}] = \{1, 2\}.$$

2. Neka je

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2.$$



a)

$$f[[-2, 1]] = [0, 4].$$

b)

$$f^{-1}[[-3, 9]] = [-3, 3].$$

c)

$$f[f^{-1}[[-4, 4]]] = f[[-2, 2]] = [0, 4].$$

Dakle, u opštem slučaju

$$f[f^{-1}[B]] \neq B.$$

d)

$$f^{-1}[f[[1,2]]] = f^{-1}[[1,4]] = [-2,-1] \cup [1,2].$$

Dakle, u opštem slučaju

$$f^{-1}[f[A]] \neq A.$$

Osobine. Neka je $f : X \to Y$, $A, A_1, A_2 \subseteq X$ i $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Tada važi:

1.

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]].$$

Jednakost važi ako je f injektivna.

2.

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B.$$

Jednakost važi ako je f surjektivna.

3.

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2].$$

4.

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2].$$

5.

$$f[A_1] \setminus f[A_2] \subseteq f[A_1 \setminus A_2].$$

6.

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

7.

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

8.

$$f^{-1}[B_1 \setminus B_2] = f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2].$$

1. Dokazati da je funkcija $f : X \to Y$ injektivna ako i samo ako za sve $A, B \subseteq X$ važi

$$f[A \triangle B] = f[A] \triangle f[B].$$

Rešenje.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je f injektivna. Znamo po 3)

$$\begin{aligned} f[A \triangle B] &= f[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \\ &= f[A \setminus B] \cup f[B \setminus A]. \end{aligned}$$

Pokazaćemo da za injektivnu funkciju važi

$$f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B].$$

Po osobini direktne slike već znamo da

$$f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B].$$

Za obrnutu inkluziju, neka je $y \in f[A \setminus B]$. Tada postoji $a \in A \setminus B$ takav da je $y = f(a)$. Dakle, $a \in A$ i $a \notin B$, pa je $y \in f[A]$.

Pokažimo da $y \notin f[B]$. Kada bi bilo $y \in f[B]$, postojao bi $b \in B$ takav da je $f(b) = y = f(a)$. Kako je f injektivna, sledilo bi $a = b$, što je nemoguće jer je $a \notin B$, a $b \in B$.

Prema tome,

$$y \in f[A] \setminus f[B],$$

pa je

$$f[A \setminus B] \subseteq f[A] \setminus f[B].$$

Dakle,

$$f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B].$$

Analogno,

$$f[B \setminus A] = f[B] \setminus f[A].$$

Sada dobijamo

$$\begin{aligned} f[A \triangle B] &= f[A \setminus B] \cup f[B \setminus A] \\ &= (f[A] \setminus f[B]) \cup (f[B] \setminus f[A]) \\ &= f[A] \triangle f[B]. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za sve $A, B \subseteq X$ važi

$$f[A \triangle B] = f[A] \triangle f[B].$$

Pretpostavimo suprotno, da f nije injektivna. Tada postoje $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, takvi da je

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Uzmimo

$$A = \{x_1\}, \qquad B = \{x_2\}.$$

Kako je $x_1 \neq x_2$,

$$A \triangle B = \{x_1, x_2\},$$

pa je

$$f[A \triangle B] = \{y\}.$$

Sa druge strane,

$$f[A] = \{y\}, \qquad f[B] = \{y\},$$

pa je

$$f[A] \triangle f[B] = \{y\} \triangle \{y\} = \varnothing.$$

Dakle,

$$f[A \triangle B] \neq f[A] \triangle f[B],$$

što je kontradikcija.

Prema tome, f je injektivna.

$$\boxed{f \text{ je injektivna} \iff f[A \triangle B] = f[A] \triangle f[B] \text{ za sve } A, B \subseteq X.}$$

2. Neka je $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Dokazati da važi

$$f\left[A \cap f^{-1}[B]\right] = f[A] \cap B.$$

Rešenje.

Najpre, po osobini direktne slike preseka imamo

$$f\left[A \cap f^{-1}[B]\right] \subseteq f[A] \cap f\left[f^{-1}[B]\right].$$

Kako važi

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B,$$

dobijamo

$$f[A \cap f^{-1}[B]] \subseteq f[A] \cap B.$$

Dakle, dokazali smo jednu inkluziju.

Za obrnutu inkluziju, neka je

$$y \in f[A] \cap B.$$

Tada je $y \in f[A]$ i $y \in B$. Iz $y \in f[A]$ sledi da postoji $a \in A$ takav da je

$$y = f(a).$$

Pošto je $y \in B$, odnosno $f(a) \in B$, po definiciji inverzne slike dobijamo

$$a \in f^{-1}[B].$$

Kako je istovremeno $a \in A$, sledi

$$a \in A \cap f^{-1}[B].$$

Prema tome,

$$y = f(a) \in f[A \cap f^{-1}[B]].$$

Dakle,

$$f[A] \cap B \subseteq f[A \cap f^{-1}[B]].$$

Iz obe inkluzije zaključujemo

$$\boxed{f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B.}$$

3. Neka je $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Dokazati da je f injektivna ako i samo ako važi

$$f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)] = A \setminus f^{-1}[B].$$

Rešenje.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za sve $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ važi

$$f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)] = A \setminus f^{-1}[B].$$

Pretpostavimo suprotno, da f nije injektivna. Tada postoje $x_1 \neq x_2$ takvi da je

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Uzmimo

$$A = \{x_1\}, \qquad B = \varnothing.$$

Za desnu stranu dobijamo

$$A \setminus f^{-1}[B] = \{x_1\} \setminus f^{-1}[\varnothing] = \{x_1\}.$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)] &= f^{-1}[\{y\} \setminus (\{y\} \cap \varnothing)] \\ &= f^{-1}[\{y\}]. \end{aligned}$$

Kako je

$$f(x_1) = f(x_2) = y,$$

imamo

$$x_1, x_2 \in f^{-1}[\{y\}],$$

pa leva strana sadrži najmanje dva elementa, dok je desna strana $\{x_1\}$. To je kontradikcija. Prema tome, f mora biti injektivna.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je f injektivna. Neka je

$$x \in f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)].$$

Tada

$$\begin{aligned} f(x) \in f[A] \setminus (f[A] \cap B) &\iff f(x) \in f[A] \text{ i } f(x) \notin f[A] \cap B \\ &\iff f(x) \in f[A] \text{ i } f(x) \in (f[A] \cap B)^c \\ &\iff f(x) \in f[A] \text{ i } f(x) \in f[A]^c \cup B^c \\ &\iff f(x) \in f[A] \cap (f[A]^c \cup B^c) \\ &\iff f(x) \in (f[A] \cap f[A]^c) \cup (f[A] \cap B^c) \\ &\iff f(x) \in f[A] \cap B^c \\ &\iff f(x) \in f[A] \text{ i } f(x) \notin B. \end{aligned}$$

Kako je $f(x) \in f[A]$, postoji $a \in A$ takav da je

$$f(a) = f(x).$$

Pošto je f injektivna, mora biti $a = x$, pa je

$$x \in A.$$

Takođe, iz $f(x) \notin B$ sledi

$$x \notin f^{-1}[B].$$

Prema tome,

$$x \in A \setminus f^{-1}[B].$$

Prema tome,

$$\boxed{f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)] = A \setminus f^{-1}[B].}$$

3. Ako su $f, g : X \to Y$, dokazati da je

$$f = g$$

ako i samo ako za svaki $A \subseteq X$ važi

$$A \subseteq f^{-1}[g[A]].$$

Rešenje.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $f = g$. Tada je

$$f^{-1}[g[A]] = f^{-1}[f[A]].$$

Kako za svaku funkciju važi

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]],$$

dobijamo

$$A \subseteq f^{-1}[g[A]].$$

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za svaki $A \subseteq X$ važi

$$A \subseteq f^{-1}[g[A]].$$

Pretpostavimo suprotno, da je $f \neq g$. Tada postoji $x \in X$ takav da je

$$f(x) \neq g(x).$$

Uzmimo

$$A = \{x\}.$$

Tada je

$$g[A] = \{g(x)\},$$

pa bi po pretpostavci moralo da važi

$$\{x\} \subseteq f^{-1}[\{g(x)\}].$$

Odavde sledi

$$x \in f^{-1}[\{g(x)\}] \iff f(x) \in \{g(x)\} \iff f(x) = g(x),$$

što je kontradikcija.

Dakle,

$$\boxed{f = g}.$$

Prema tome,

$$\boxed{f = g \quad \iff \quad A \subseteq f^{-1}[g[A]] \text{ za svaki } A \subseteq X.}$$

4. Dokazati da je funkcija $f : X \to Y$ surjektivna ako i samo ako za svaki skup Z i sve funkcije $g, h : Y \to Z$ važi

$$g \circ f = h \circ f \quad \Longrightarrow \quad g = h.$$

Rešenje.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je f surjektivna i neka su $g, h : Y \to Z$ takve da je

$$g \circ f = h \circ f.$$

Neka je $y \in Y$ proizvoljan. Kako je f surjektivna, postoji $x \in X$ takav da je

$$f(x) = y.$$

Tada

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y).$$

Kako ovo važi za svako $y \in Y$, sledi

$$\boxed{g = h}.$$

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za svaki skup Z i sve funkcije $g, h : Y \to Z$ važi

$$g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h.$$

Pretpostavimo suprotno, da f nije surjektivna. Tada postoji $y \in Y$ takav da

$$y \notin f[X].$$

Uzmimo, na primer,

$$Z = \{a, b, c\}$$

i definišimo funkcije $g, h : Y \to Z$ sa

$$g(t) = \begin{cases} b, & t = y, \\ a, & t \neq y, \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} c, & t = y, \\ a, & t \neq y. \end{cases}$$

Očigledno je

$$g \neq h,$$

jer je $g(y) = b$, a $h(y) = c$.

Međutim, pošto je $y \notin f[X]$, za svako $x \in X$ važi $f(x) \neq y$. Zato je

$$g(f(x)) = a = h(f(x)),$$

pa je

$$g \circ f = h \circ f.$$

Dobili smo

$$g \circ f = h \circ f, \qquad \text{ali} \qquad g \neq h,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom.

Prema tome, f mora biti surjektivna.

$$\boxed{f \text{ je surjektivna} \iff (g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h)}$$

za svaki skup Z i sve funkcije $g, h : Y \to Z$.