Relacije

Def. Binarna relacija između elemenata skupa A i skupa B je bilo koji podskup $R \subseteq A \times B$. Za $A = B$, kažemo da je to relacija na skupu A.

Primer: $A = B = \mathbb{R}$ i posmatramo relaciju $\leq$.

$$2 \leq 3 \qquad \text{(infiksna notacija)}$$

Možemo pisati $(2,3) \in \leq$, dok $(3,2) \notin \leq$.

Osobine relacija $R \subseteq A^2 = A \times A$:

1. **refleksivnost:** aRa za svako $a \in A$ ($\leq$ na $\mathbb{R}$)
   odnosno, $(a,a) \in R$ za svako a;
2. **antirefleksivnost:** $a \not R\, a$ za svako $a \in A$ ($\perp$ na skupu pravih)
   odnosno, ne postoji a koje je u relaciji R sa samim sobom;
3. **simetričnost:** ako je aRb, tada je bRa za sve $a, b \in A$ ($\parallel$ na skupu pravih);
4. **asimetričnost:** ako je aRb, tada nije bRa za sve $a, b \in A$ ($<$ na $\mathbb{R}$);
5. **antisimetričnost:** ako je aRb i bRa, tada je $a = b$ ($\subseteq$ na $\mathcal{P}(S)$);
6. **tranzitivnost:** ako je aRb i bRc, tada je aRc ($\leq$ na $\mathbb{R}$).

Def. Relacija $R \subseteq A \times A$ je **relacija ekvivalencije** (**RST relacija**) ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna

$$(=,\ \parallel,\ \simeq,\ \cong,\ \equiv \text{ modulu}, \ldots).$$

Relacija $R \subseteq A \times A$ je **relacija poretka** ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna ($\leq$, $\subseteq, \ldots$). Poredak je **totalan (linearan)** ako su svaka dva elementa uporediva (za svaka dva $a, b \in A$ je aRb ili bRa).

Relacija $R \subseteq A \times A$ je **relacija strogog poretka** ako je antirefleksivna i tranzitivna ($<$).

Kako je svaka relacija skup, sve skupovne operacije su podržane.

Def. Ako je $R \subseteq A \times B$ relacija, tada je njoj inverzna relacija $R^{-1} \subseteq B \times A$ zadata sa:

$$(a,b) \in R \quad \text{akko} \quad (b,a) \in R^{-1}, \qquad aRb \quad \text{akko} \quad bR^{-1}a.$$

Def. [**Kompozicija relacija**] Ako je $R \subseteq A \times B$, a $S \subseteq B \times C$, definišemo relaciju $S \circ R \subseteq A \times C$ sa:

$$(a,c) \in S \circ R \quad \text{akko postoji } b \in B \text{ takav da } (a,b) \in R,\ \text{a } (b,c) \in S.$$

1. Ako su ρ_1 i ρ_2 relacije ekvivalencije, tada je $\rho_1 \cap \rho_2$ isto ekvivalencija. Da li isto to važi i za $\rho_1 \cup \rho_2$?

1) refleksivnost: Da li je $(a,a) \in \rho_1 \cap \rho_2$ za svako $a \in A$?
ρ_1 i ρ_2 jesu refleksivne, pa $(a,a) \in \rho_1$ i $(a,a) \in \rho_2$, odakle

$$(a,a) \in \rho_1 \cap \rho_2.$$

2) simetričnost: Da li $(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2$ povlači $(b,a) \in \rho_1 \cap \rho_2$?
Neka je $(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2$. Tada je $(a,b) \in \rho_1$ i $(a,b) \in \rho_2$. Kako su ρ_1 i ρ_2 simetrične, to je $(b,a) \in \rho_1$ i $(b,a) \in \rho_2$, pa je

$$(b,a) \in \rho_1 \cap \rho_2.$$

3) tranzitivnost: Ako je $(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2$ i $(b,c) \in \rho_1 \cap \rho_2$, tada treba da važi $(a,c) \in \rho_1 \cap \rho_2$.
Ako je $(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2$ i $(b,c) \in \rho_1 \cap \rho_2$, onda

$$(a,b) \in \rho_1, \quad (a,b) \in \rho_2, \qquad (b,c) \in \rho_1, \quad (b,c) \in \rho_2.$$

Kako su ρ_1 i ρ_2 tranzitivne, sledi $(a,c) \in \rho_1$ i $(a,c) \in \rho_2$, pa

$$(a,c) \in \rho_1 \cap \rho_2.$$

Pogledajmo šta se dešava za $\rho_1 \cup \rho_2$?
Simetričnost i refleksivnost prolaze, ali tranzitivnost u opštem slučaju ne prolazi.
Neka je

$$A = \{a,b,c\},$$
$$\rho_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}, \qquad \text{jeste ekvivalencija},$$
$$\rho_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}, \qquad \text{jeste ekvivalencija}.$$

$\rho_1 \cup \rho_2$ sadrži (a,b) i (b,c).
Stoga, iz tranzitivnosti bismo imali da $(a,c) \in \rho_1 \cup \rho_2$, što nije tačno.
Dakle, $\rho_1 \cup \rho_2$ nije tranzitivna, pa nije ni relacija ekvivalencije.

Zadatak 2.2

Neka su ρ i σ antisimetrične binarne relacije skupa A. Dokazati da:

(a) ρ^{-1} i $\rho \cap \sigma$ su antisimetrične.

(b) $\rho \cup \sigma$ je antisimetrična ako i samo ako

$$\rho \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_A,$$

gde je $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

Rešenje.

(a) Neka su $(a,b),(b,a) \in \rho^{-1}$. Tada su $(b,a),(a,b) \in \rho$. Kako je ρ antisimetrična, sledi $a = b$, pa je i ρ^{-1} antisimetrična.
Ako su $(a,b),(b,a) \in \rho \cap \sigma$, onda su $(a,b),(b,a) \in \rho$. Iz antisimetričnosti relacije ρ sledi $a = b$. Dakle, i $\rho \cap \sigma$ je antisimetrična.

(b) Pretpostavimo najpre da je $\rho \cup \sigma$ antisimetrična. Neka je $(a,b) \in \rho \cap \sigma^{-1}$. Tada je

$$(a,b) \in \rho \quad \text{i} \quad (b,a) \in \sigma.$$

Prema tome, $(a,b),(b,a) \in \rho \cup \sigma$. Iz antisimetričnosti ove relacije sledi $a = b$, odnosno $(a,b) \in \Delta_A$. Dakle,

$$\rho \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_A.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\rho \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_A$. Neka su $(a,b),(b,a) \in \rho \cup \sigma$. Razlikujemo četiri slučaja:

- Ako su $(a,b),(b,a) \in \rho$, onda je $a = b$ zbog antisimetričnosti relacije ρ.
- Ako su $(a,b),(b,a) \in \sigma$, onda je $a = b$ zbog antisimetričnosti relacije σ.

- Ako je $(a,b) \in \rho$ i $(b,a) \in \sigma$, onda je $(a,b) \in \sigma^{-1}$, pa
$$(a,b) \in \rho \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_A.$$
Zato je $a = b$.
- Ako je $(a,b) \in \sigma$ i $(b,a) \in \rho$, onda je $(b,a) \in \sigma^{-1}$, pa
$$(b,a) \in \rho \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_A.$$
Zato je $b = a$.

U svakom slučaju važi $a = b$, pa je $\rho \cup \sigma$ antisimetrična.

Zadatak 2.3

Neka je n prirodan broj. Definišimo relaciju $\sigma_n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sa
$$(x,y) \in \sigma_n \quad \Longleftrightarrow \quad x + n \leq y.$$
Dokazati da:

(a) σ_n je tranzitivna.

(b) Za $m \in \mathbb{N}$ važi
$$m \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_n \subseteq \sigma_m.$$

(v) Za $m \in \mathbb{N}$ važi
$$\sigma_m \circ \sigma_n \subseteq \sigma_{m+n}.$$

Rešenje.

(a) Neka su $(x,y), (y,z) \in \sigma_n$. Tada je
$$x + n \leq y \quad \text{i} \quad y + n \leq z.$$
Iz druge nejednakosti sledi $y \leq z - n$, pa, kako je $n \geq 0$, dobijamo
$$x + n \leq y \leq z - n \leq z.$$
Dakle, $x + n \leq z$, odnosno $(x,z) \in \sigma_n$. Prema tome, σ_n je tranzitivna.

(b) Pretpostavimo da je $m \leq n$. Neka je $(x,y) \in \sigma_n$. Tada je $x + n \leq y$, pa važi
$$x + m \leq x + n \leq y.$$
Zato je $(x,y) \in \sigma_m$, čime smo dokazali $\sigma_n \subseteq \sigma_m$.
Obratno, pretpostavimo da je $\sigma_n \subseteq \sigma_m$. Kako je $1 + n \leq n + 1$, važi
$$(1, n+1) \in \sigma_n \subseteq \sigma_m.$$
Prema definiciji relacije σ_m, sledi
$$1 + m \leq n + 1,$$
odakle dobijamo $m \leq n$.

(v) Neka je $(x,y) \in \sigma_m \circ \sigma_n$. Tada postoji $z \in \mathbb{N}$ takav da je
$$(x,z) \in \sigma_n \quad \text{i} \quad (z,y) \in \sigma_m.$$
Prema definiciji ovih relacija,
$$x + n \leq z \quad \text{i} \quad z + m \leq y.$$
Zato je
$$x + (m + n) = (x + n) + m \leq z + m \leq y.$$
Dakle, $(x,y) \in \sigma_{m+n}$, pa zaključujemo
$$\sigma_m \circ \sigma_n \subseteq \sigma_{m+n}.$$

Zadatak 2.4

Neka je relacija $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zadata sa

$$(x, y) \in \rho \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Ispitati da li je ρ refleksivna, antirefleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna.

Rešenje.

1. **Refleksivnost.** Za $x = 1$ važi
$$1^2 + 1^2 = 2 > 1,$$
pa $(1, 1) \notin \rho$. Dakle, ρ nije refleksivna.

2. **Antirefleksivnost.** Kako je
$$0^2 + 0^2 = 0 \leq 1,$$
važi $(0, 0) \in \rho$. Zato ρ nije antirefleksivna.

3. **Simetričnost.** Ako je $(x, y) \in \rho$, onda je $x^2 + y^2 \leq 1$. Zbog komutativnosti sabiranja važi
$$y^2 + x^2 = x^2 + y^2 \leq 1,$$
pa je $(y, x) \in \rho$. Dakle, ρ je simetrična.

4. **Antisimetričnost.** Važi
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36} \leq 1.$$
Zato su
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \rho \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \in \rho,$$
iako je $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$. Prema tome, ρ nije antisimetrična.

5. **Tranzitivnost.** Kako je
$$1^2 + 0^2 = 1 \leq 1 \quad \text{i} \quad 0^2 + 1^2 = 1 \leq 1,$$
važi $(1, 0), (0, 1) \in \rho$. Međutim, $(1, 1) \notin \rho$, jer je
$$1^2 + 1^2 = 2 > 1.$$
Dakle, ρ nije tranzitivna.

Zadatak 2.5

Neka je relacija $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zadata sa

$$(x, y) \in \rho \quad \Longleftrightarrow \quad x = |y|.$$

Ispitati da li je ρ refleksivna, antirefleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna.

Rešenje.

1. **Refleksivnost.** Za $x = -1$ važi
$$-1 \neq |-1| = 1,$$
pa $(-1, -1) \notin \rho$. Dakle, ρ nije refleksivna.

2. **Antirefleksivnost.** Kako je $1 = |1|$, važi $(1, 1) \in \rho$. Zato ρ nije antirefleksivna.

3. **Simetričnost.** Važi
$$1 = |-1|,$$
pa je $(1, -1) \in \rho$. Međutim, $-1 \neq |1|$, pa $(-1, 1) \notin \rho$. Dakle, ρ nije simetrična.

4. **Antisimetričnost.** Neka su $(x, y), (y, x) \in \rho$. Tada je

$$x = |y| \quad \text{i} \quad y = |x|.$$

Zato su x i y nenegativni brojevi. Otuda je $|y| = y$, pa dobijamo $x = y$. Dakle, ρ je antisimetrična.

5. **Tranzitivnost.** Neka su $(x, y), (y, z) \in \rho$. Tada je

$$x = |y| \quad \text{i} \quad y = |z|.$$

Kako je $y = |z| \geq 0$, sledi $|y| = y$, pa je

$$x = |y| = y = |z|.$$

Zato je $(x, z) \in \rho$. Dakle, ρ je tranzitivna.

2. Dopuniti

$$\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 4), (4, 5)\}$$

do minimalne relacije ekvivalencije na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

ρ	1	2	3	4	5
1	T	T	T		
2	T	T	T		
3	T	T	T		
4				T	T
5				T	T

Kako je svaka relacija ekvivalencije refleksivna, to moramo dodati $(2, 2)$, $(3, 3)$ i $(5, 5)$.
Da bismo ispoštovali simetričnost, dodajemo $(2, 1)$, $(3, 2)$ i $(5, 4)$.
Kako imamo $(1, 2)$ i $(2, 3)$, to zbog tranzitivnosti moramo uzeti i $(1, 3)$.
Zbog simetričnosti, uzimamo i $(3, 1)$.

Dakle, minimalna relacija ekvivalencije je

$$\begin{aligned}\rho' = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3),\\ &(2, 1), (2, 2), (2, 3),\\ &(3, 1), (3, 2), (3, 3),\\ &(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}.\end{aligned}$$

3. Neka su ρ i σ relacije poretka na skupu A. Dokazati da je i $\rho \cap \sigma^{-1}$ relacija poretka.

(R): Pitamo se da li je $(a, a) \in \rho \cap \sigma^{-1}$ za svako $a \in A$.
Kako su ρ i σ refleksivne, imamo $(a, a) \in \rho$ i $(a, a) \in \sigma$, pa je i $(a, a) \in \sigma^{-1}$. Dakle,

$$(a, a) \in \rho \cap \sigma^{-1}.$$

(ANS): Ako su $(a, b) \in \rho \cap \sigma^{-1}$ i $(b, a) \in \rho \cap \sigma^{-1}$, tada je

$$(a, b) \in \rho \qquad \text{i} \qquad (b, a) \in \rho.$$

Kako je ρ antisimetrična, sledi

$$a = b.$$

(T): Ako su $(a,b) \in \rho \cap \sigma^{-1}$ i $(b,c) \in \rho \cap \sigma^{-1}$, treba pokazati da je $(a,c) \in \rho \cap \sigma^{-1}$.
Iz $(a,b) \in \rho \cap \sigma^{-1}$ i $(b,c) \in \rho \cap \sigma^{-1}$ dobijamo

$$(a,b) \in \rho, \qquad (b,a) \in \sigma,$$

$$(b,c) \in \rho, \qquad (c,b) \in \sigma.$$

Kako su ρ i σ tranzitivne, jer su relacije poretka, sledi

$$(a,c) \in \rho \qquad \text{i} \qquad (c,a) \in \sigma.$$

Odavde je $(a,c) \in \sigma^{-1}$, pa

$$(a,c) \in \rho \cap \sigma^{-1}.$$

Dakle, $\rho \cap \sigma^{-1}$ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, pa je relacija poretka.

Zadatak 2.10

Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je relacija $\sim$ sa

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = \cos y.$$

Dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Ako je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljan element, odrediti njegovu klasu ekvivalencije C_α.

Rešenje.

1. **Refleksivnost.** Za svako $x \in \mathbb{R}$ važi
$$\cos x = \cos x,$$
pa je $x \sim x$. Dakle, $\sim$ je refleksivna.

2. **Simetričnost.** Neka je $x \sim y$. Tada je $\cos x = \cos y$, odakle sledi $\cos y = \cos x$, odnosno $y \sim x$. Dakle, $\sim$ je simetrična.

3. **Tranzitivnost.** Neka je $x \sim y$ i $y \sim z$. Tada je
$$\cos x = \cos y \quad \text{i} \quad \cos y = \cos z.$$
Zato je $\cos x = \cos z$, odnosno $x \sim z$. Dakle, $\sim$ je tranzitivna.

Prema tome, $\sim$ je relacija ekvivalencije.
Za proizvoljno $\alpha \in \mathbb{R}$ važi

$$C_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid x \sim \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = \cos \alpha\}.$$

Kako je

$$\cos x = \cos \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2k\pi + \alpha \text{ ili } x = 2k\pi - \alpha, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

dobijamo

$$\boxed{C_\alpha = \{2k\pi \pm \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Zadatak 2.11

Neka je $A = \{0, 1, 2\}$ i $B = A \times A$. Na skupu B definisana je relacija $\sim$ sa

$$(x, y) \sim (z, t) \quad \Longleftrightarrow \quad xy = zt.$$

Dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije i odrediti količnički skup.

Rešenje.

1. **Refleksivnost.** Za svaki $(x, y) \in B$ važi $xy = xy$, pa je

   $$(x, y) \sim (x, y).$$

   Dakle, $\sim$ je refleksivna.

2. **Simetričnost.** Neka je $(x, y) \sim (z, t)$. Tada je $xy = zt$, pa je i $zt = xy$. Zato je

   $$(z, t) \sim (x, y).$$

   Dakle, $\sim$ je simetrična.

3. **Tranzitivnost.** Neka je $(x, y) \sim (z, t)$ i $(z, t) \sim (r, s)$. Tada je

   $$xy = zt \quad \text{i} \quad zt = rs.$$

   Odavde sledi $xy = rs$, odnosno

   $$(x, y) \sim (r, s).$$

   Dakle, $\sim$ je tranzitivna.

Prema tome, $\sim$ je relacija ekvivalencije.
Klasa ekvivalencije elementa $(x, y) \in B$ sadrži sve uređene parove čiji je proizvod koordinata jednak xy:

$$C_{(x,y)} = \{(z, t) \in B \mid zt = xy\}.$$

Moguće vrednosti proizvoda koordinata su 0, 1, 2 i 4. Zato dobijamo sledeće klase:

$$\begin{aligned} C_{(0,0)} &= C_{(0,1)} = C_{(0,2)} = C_{(1,0)} = C_{(2,0)} \\ &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)\}, \\ C_{(1,1)} &= \{(1, 1)\}, \\ C_{(1,2)} &= C_{(2,1)} = \{(1, 2), (2, 1)\}, \\ C_{(2,2)} &= \{(2, 2)\}. \end{aligned}$$

Dakle, količnički skup ima četiri elementa i jednak je

$$\boxed{B/\sim = \{C_{(0,0)}, C_{(1,1)}, C_{(1,2)}, C_{(2,2)}\}.}$$

4. Da li je relacija $\mid$ relacija poretka na skupu $\mathbb{N}$? A na skupu $\mathbb{Z}$?

Na $\mathbb{N}$:
(R): $n \mid n$ ✓
(T): $m \mid n$ i $n \mid p \Rightarrow m \mid p$ ✓
(ANS): $m \mid n$ i $n \mid m \Rightarrow m = n$ ✓
Dakle, $\mid$ jeste relacija poretka na $\mathbb{N}$, ali nije totalan poredak, jer, na primer,

$$2 \nmid 3 \qquad \text{i} \qquad 3 \nmid 2.$$

Napomena. Da li je $0 \mid 0$?

U teoriji brojeva,

$$a \mid b \quad \text{akko postoji } c \text{ takav da je } b = a \cdot c.$$

Prema tome, $0 \mid 0$.

Na $\mathbb{Z}$:

(R): važi. ✓

(T): važi. ✓

(ANS): Ne važi, jer

$$1 \mid (-1) \qquad \text{i} \qquad (-1) \mid 1,$$

a $1 \neq -1$.

Dakle, $\mid$ nije relacija poretka na $\mathbb{Z}$.

Podsetimo se, relacija $\rho \subseteq A \times A$ je **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Def. Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A i neka je $a \in A$. **Klasa ekvivalencije** elementa a je skup

$$[a]_\rho = \{x \in A \mid x \rho a\}.$$

Odnosno, klasa ekvivalencije elementa a sadrži sve elemente skupa A koji su u relaciji sa a.

Skup svih klasa ekvivalencije naziva se **količnički skup** i označava se sa

$$A/\rho = \{[a]_\rho \mid a \in A\}.$$

1. Neka je na $\mathbb{Z}$ data relacija ρ sa

$$a \rho b \quad \text{akko} \quad 3 \mid (a + 2b).$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i naći klase.

Važi

$$a \rho b \quad \text{akko} \quad 3 \mid (a + 2b) \quad \text{akko} \quad 3 \mid (a - b + 3b) \quad \text{akko} \quad 3 \mid (a - b) \quad \text{akko} \quad a \equiv b \pmod 3.$$

Stoga, kako je kongruencija po modulu 3 relacija ekvivalencije, to će biti i ρ.

Klase:

$$\{0, 3, -3, \ldots\} = 3\mathbb{Z},$$
$$\{1, 4, -2, -5, \ldots\} = 3\mathbb{Z} + 1,$$
$$\{2, 5, -1, -4, \ldots\} = 3\mathbb{Z} + 2.$$

2. Neka je na skupu $\mathbb{R}$ data relacija ρ sa

$$a \rho b \quad \text{akko} \quad a^3 + a^2 b = a b^2 + b^3.$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i naći klase.

(R):

$$a^3 + a^2 a \stackrel{?}{=} a a^2 + a^3$$

odnosno

$$2a^3 = 2a^3,$$

pa je $a \rho a$.

(S): Pretpostavimo da je $a\rho b$. Tada

$$a^3 + a^2 b = ab^2 + b^3.$$

Promenom redosleda članova dobijamo

$$b^3 + b^2 a = ba^2 + a^3,$$

pa je $b\rho a$.

(T): Pretpostavimo da je $a\rho b$ i $b\rho c$. Treba pokazati $a\rho c$.
Iz $a\rho b$ imamo

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 b &= ab^2 + b^3, \\ a^2(a+b) &= b^2(a+b), \\ a^2(a+b) - b^2(a+b) &= 0, \\ (a^2 - b^2)(a+b) &= 0, \\ (a-b)(a+b)(a+b) &= 0, \\ (a-b)(a+b)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Dakle,

$$a = b \qquad \text{ili} \qquad a = -b.$$

Analogno, iz $b\rho c$ dobijamo

$$b = c \qquad \text{ili} \qquad b = -c.$$

Stoga, kako je $a\rho b$ i $b\rho c$, imamo četiri mogućnosti:

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad a = b, \quad b = c \quad \Rightarrow \quad a = c, \\ &2^\circ \quad a = b, \quad b = -c \quad \Rightarrow \quad a = -c, \\ &3^\circ \quad a = -b, \quad b = c \quad \Rightarrow \quad a = -c, \\ &4^\circ \quad a = -b, \quad b = -c \quad \Rightarrow \quad a = c. \end{aligned}$$

U svakom slučaju je $a = c$ ili $a = -c$, pa je $a\rho c$.
Dakle, ρ je refleksivna, simetrična i tranzitivna, pa je relacija ekvivalencije.

Klase:

$$\boxed{\{x, -x\} \quad \text{za } x \neq 0}$$

i

$$\boxed{\{0\}}.$$