Skupovi
- I nedelja -

- Pojam skupa uvodi se aksiomatski (ZFC sistem).
- Prethodni sistem, Kantorova naivna teorija skupova, daje neke paradokse, na primer Raselov paradoks: $\{x \mid x \notin x\}$.

Neka su A i B neki skupovi. Kažemo da je $A \subseteq B$ ukoliko svako $x \in A$ takođe pripada skupu B, odnosno:

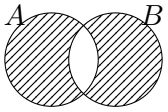
$$\forall x\,(x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

Kažemo da je $A = B$ ukoliko imaju iste elemente, odnosno ukoliko je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Osnovne operacije na skupovima:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},\\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},\\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}. \end{aligned}$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$



Ako je $A \subseteq X$, gde je X neki ambijentalni skup, tada je komplement skupa A:

$$A^c = X \setminus A.$$

Osnovne osobine operacija:

$$\begin{aligned} A \cup A &= A & A \cap A &= A,\\ A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A,\\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C,\\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C),\\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c & (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c,\\ A \cup \varnothing &= A & A \cap \varnothing &= \varnothing,\\ A \triangle B &= B \triangle A & A \triangle (B \triangle C) &= (A \triangle B) \triangle C,\\ A \cap B &\subseteq A & A \cap B &\subseteq B,\\ A &\subseteq A \cup B & B &\subseteq A \cup B. \end{aligned}$$

Zadatak 1: dokaz skupovnog identiteta

Dokazati da važi:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Dokaz. Označimo levu i desnu stranu sa:

$$L = A \cap (B \triangle C), \qquad D = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Treba dokazati da je $L = D$, odnosno da važe obe inkluzije $L \subseteq D$ i $D \subseteq L$. Sve komplemente u dokazu uzimamo u odnosu na isti ambijentalni skup X, pri čemu su $A, B, C \subseteq X$.

1. Dokaz inkluzije $L \subseteq D$

Neka je $x \in L$. Po definicijama preseka i simetrične razlike:

$$\begin{aligned} x \in L &\iff x \in A \cap (B \triangle C) \\ &\iff x \in A \wedge x \in B \triangle C \\ &\iff x \in A \wedge x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \setminus C \vee x \in C \setminus B) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B \setminus C) \vee (x \in A \wedge x \in C \setminus B) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B). \end{aligned}$$

Ako je $x \notin C$, tada je $x \notin A \cap C$. Ako je $x \notin B$, tada je $x \notin A \cap B$. Zato sledi:

$$\begin{aligned} x \in L &\Longrightarrow (x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C) \vee (x \in A \cap C \wedge x \notin A \cap B) \\ &\iff x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) \vee x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B) \\ &\iff x \in ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \\ &\iff x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C) \\ &\iff x \in D. \end{aligned}$$

Pošto je x proizvoljan element skupa L, dokazali smo $L \subseteq D$.

2. Dokaz inkluzije $D \subseteq L$

Neka je $x \in D$. Po definiciji simetrične razlike i komplementa, a zatim po De Morganovim pravilima:

$$\begin{aligned} x \in D &\iff x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) \vee x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B) \\ &\iff (x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C) \vee (x \in A \cap C \wedge x \notin A \cap B) \\ &\iff (x \in A \cap B \wedge x \in (A \cap C)^c) \vee (x \in A \cap C \wedge x \in (A \cap B)^c) \\ &\iff (x \in A \cap B \wedge x \in A^c \cup C^c) \vee (x \in A \cap C \wedge x \in A^c \cup B^c). \end{aligned}$$

Razvijanjem pripadnosti uniji i primenom distributivnosti dobijamo:

$$\begin{aligned} x \in D \iff &(x \in A \cap B \wedge x \in A^c) \\ &\vee (x \in A \cap B \wedge x \in C^c) \\ &\vee (x \in A \cap C \wedge x \in A^c) \\ &\vee (x \in A \cap C \wedge x \in B^c). \end{aligned}$$

Prvi i treći član su neistiniti: u oba bi važilo $x \in A$ i $x \in A^c$, odnosno $x \in A \cap A^c = \varnothing$. Preostaju drugi i četvrti član, pa dobijamo:

$$\begin{aligned} x \in D &\iff (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B \setminus C) \vee (x \in A \wedge x \in C \setminus B) \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \setminus C \vee x \in C \setminus B) \\ &\iff x \in A \wedge x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \\ &\iff x \in A \wedge x \in B \triangle C \\ &\iff x \in A \cap (B \triangle C) \\ &\iff x \in L. \end{aligned}$$

Pošto je x proizvoljan element skupa D, dokazali smo $D \subseteq L$.

Iz obe inkluzije sledi $L = D$, čime je dokazan identitet:

$$\boxed{A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)}.$$

Zadatak 2: jednakost skupova pod uslovom

Dokazati da važi:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad \Longleftrightarrow \quad C \subseteq A.$$

Odnosno, navedena jednakost važi ako i samo ako je $C \subseteq A$.

Smer $\Longrightarrow$

Pretpostavimo da je:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da $C \nsubseteq A$. Tada postoji neki element y takav da:

$$y \in C \qquad \text{i} \qquad y \notin A.$$

Pošto je $y \in C$, sledi da je $y \in (A \cap B) \cup C$. S druge strane, iz $y \notin A$ sledi da je $y \notin A \cap (B \cup C)$. Dakle, y pripada desnoj strani jednakosti, ali ne pripada levoj, što je protivrečnost sa pretpostavljenom jednakošću. Zato mora važiti $C \subseteq A$.

Smer $\Longleftarrow$

Pretpostavimo da je $C \subseteq A$. Tada je $A \cap C = C$, pa primenom distributivnosti dobijamo:

$$\underbrace{A \cap (B \cup C)}_{L} = (A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap C)}_{C} = \underbrace{(A \cap B) \cup C}_{D}.$$

Dakle, važi $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

Time su dokazana oba smera, odnosno:

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad \Longleftrightarrow \quad C \subseteq A}.$$

Dekartov proizvod i partitivni skup

Dekartov proizvod

Dekartov proizvod skupova A i B je:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Napomena. Za skupove važi $\{a, b\} = \{b, a\}$, dok je kod uređenog para (a, b) redosled elemenata bitan.

Stav (kombinatorni princip proizvoda). Ako su A i B konačni skupovi, pri čemu je $|A| = m$ i $|B| = n$, tada je:

$$|A \times B| = mn.$$

Partitivni skup

Partitivni skup skupa A je skup svih njegovih podskupova:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Stav. Ako je A konačan skup i $|A| = n$, tada je:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Dokaz. Ako je B neki podskup skupa A, tada za svaki element $a \in A$ imamo tačno dve mogućnosti: $a \in B$ ili $a \notin B$. Stoga za izbor podskupa $B \subseteq A$, po principu proizvoda, imamo:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ puta}} = 2^n$$

mogućnosti.

Zadatak 3: određivanje partitivnog skupa

Naći $\mathcal{P}(S)$ ukoliko je:

a) $S = \{\varnothing\}$;

b) $S = \{\{\varnothing\}\}$;

c) $S = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Napomena. Za svaki skup S važi:

$$\varnothing \subseteq S, \qquad S \subseteq S.$$

Rešenje.

a) Za $S = \{\varnothing\}$ jedini element skupa S je prazan skup. Zato je:

$$|S| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(S)| = 2^1 = 2.$$

Dobijamo:

$$\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

b) Za $S = \{\{\varnothing\}\}$ jedini element skupa S je skup $\{\varnothing\}$. Zato je:

$$|S| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(S)| = 2^1 = 2.$$

Dobijamo:

$$\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}.$$

c) Skup $S = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ ima dva različita elementa: $\varnothing$ i $\{\varnothing\}$. Zato je:

$$|S| = 2 \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(S)| = 2^2 = 4.$$

Dobijamo:

$$\mathcal{P}(S) = \Big\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}.$$

Zadatak 4: partitivni skup preseka i unije

Dokazati da važi:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

a) Dokaz jednakosti

Za proizvoljan skup x, po definiciji partitivnog skupa i preseka, važi:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff x \subseteq A \cap B \\ &\iff x \subseteq A \wedge x \subseteq B \\ &\iff x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

Dakle, oba skupa imaju iste elemente, pa je:

$$\boxed{\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)}.$$

b) Dokaz inkluzije

Neka je $x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Tada važi:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\iff x \in \mathcal{P}(A) \vee x \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff x \subseteq A \vee x \subseteq B \\ &\implies x \subseteq A \cup B \\ &\iff x \in \mathcal{P}(A \cup B). \end{aligned}$$

U oba slučaja dobijamo $x \subseteq A \cup B$, jer su $A \subseteq A \cup B$ i $B \subseteq A \cup B$. Pošto je x proizvoljan element polaznog skupa, sledi:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)}.$$

Napomena: obratna inkluzija

Obratna inkluzija u delu b) ne važi u opštem slučaju. Uzmimo skupove A i B za koje su obe razlike $A \setminus B$ i $B \setminus A$ neprazne i izaberimo:

$$a \in A \setminus B, \qquad b \in B \setminus A.$$

Posmatrajmo skup $\{a, b\}$. Važi:

$$\{a, b\} \subseteq A \cup B \quad \iff \quad \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

Međutim, pošto je $b \notin A$ i $a \notin B$, imamo:

$$\{a, b\} \not\subseteq A, \qquad \{a, b\} \not\subseteq B.$$

Zato je:

$$\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A), \qquad \{a, b\} \notin \mathcal{P}(B),$$

odnosno:

$$\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Dakle, u ovom slučaju postoji element skupa $\mathcal{P}(A \cup B)$ koji ne pripada skupu $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, pa obratna inkluzija ne važi.

Zadatak 5: unija Dekartovih proizvoda

Dokazati da za sve skupove A, B, C, D važi:

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$$

Dokaz inkluzije

Neka je $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$. Po definicijama unije i Dekartovog proizvoda:

$$\begin{aligned}(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D) &\iff (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in C \times D \\ &\iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D).\end{aligned}$$

Pošto je $A \subseteq A \cup C$ i $C \subseteq A \cup C$, kao i $B \subseteq B \cup D$ i $D \subseteq B \cup D$, u oba slučaja sledi:

$$x \in A \cup C \qquad \text{i} \qquad y \in B \cup D.$$

Prema tome, $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$. Pošto je (x, y) proizvoljan element polaznog skupa, dokazali smo:

$$\boxed{(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)}.$$

Napomena: obratna inkluzija

Obratna inkluzija ne važi u opštem slučaju. Uzmimo skupove A, B, C, D za koje su razlike $A \setminus C$ i $D \setminus B$ neprazne i izaberimo:

$$a \in A \setminus C, \qquad d \in D \setminus B.$$

Tada je $a \in A \cup C$ i $d \in B \cup D$, pa je:

$$(a, d) \in (A \cup C) \times (B \cup D).$$

Međutim, važi:

$$\begin{aligned}(a, d) &\notin A \times B, \qquad \text{jer je } d \notin B, \\ (a, d) &\notin C \times D, \qquad \text{jer je } a \notin C.\end{aligned}$$

Zato je:

$$(a, d) \notin (A \times B) \cup (C \times D).$$

Dakle, u ovom slučaju postoji element skupa $(A \cup C) \times (B \cup D)$ koji ne pripada skupu $(A \times B) \cup (C \times D)$, pa obratna inkluzija ne važi.

Zadatak 6: jednakost skupova

Neka su A i B neprazni skupovi i neka važi:

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D.$$

Dokazati da je $A = B = C = D$.

Dokaz. Najpre primetimo da su C i D neprazni. Pošto su A i B neprazni, skup $(A \times B) \cup (B \times A)$ je neprazan, pa je i $C \times D \neq \varnothing$. Ako bi neki od skupova C i D bio prazan, onda bi bilo $C \times D = \varnothing$, što je protivrečnost.

1. Dokaz da je $C = D = A \cup B$

Po rezultatu prethodnog zadatka imamo:

$$C \times D = (A \times B) \cup (B \times A) \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B).$$

Pošto su C i D neprazni, sledi:

$$C \subseteq A \cup B, \qquad D \subseteq A \cup B.$$

Zaista, za svaki $c \in C$ možemo izabrati $d_0 \in D$. Tada (c, d_0) pripada proizvodu $(A \cup B) \times (A \cup B)$, pa je $c \in A \cup B$. Analogno, izborom $c_0 \in C$ dobijamo da svaki $d \in D$ pripada skupu $A \cup B$.

S druge strane, iz polazne jednakosti sledi:

$$A \times B \subseteq C \times D, \qquad B \times A \subseteq C \times D.$$

Kako su A i B neprazni, prva inkluzija daje $A \subseteq C$ i $B \subseteq D$, a druga $B \subseteq C$ i $A \subseteq D$. Otuda je:

$$A \cup B \subseteq C, \qquad A \cup B \subseteq D.$$

Kombinovanjem inkluzija u oba smera zaključujemo:

$$C = A \cup B, \qquad D = A \cup B.$$

Zato polazna jednakost postaje:

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D = (A \cup B) \times (A \cup B). \tag{*}$$

2. Dokaz da je $A = B$

Dovoljno je dokazati da je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Pretpostavimo suprotno, tj. da $A \nsubseteq B$. Tada postoji neki $a \in A$ takav da $a \notin B$. Pošto je $a \in A \cup B$, imamo:

$$(a, a) \in (A \cup B) \times (A \cup B).$$

Međutim, važi:

$$(a, a) \notin A \times B, \qquad \text{jer je } a \notin B,$$
$$(a, a) \notin B \times A, \qquad \text{jer je } a \notin B.$$

Dakle:

$$(a, a) \notin (A \times B) \cup (B \times A),$$

što je protivrečnost sa jednakošću $(*)$. Zato je $A \subseteq B$.

Domaći zadatak. Potpuno analogno ispišite dokaz inkluzije $B \subseteq A$.

Primenom analognog argumenta dobijamo i $B \subseteq A$, pa je $A = B$. Zatim:

$$C = A \cup B = A \cup A = A, \qquad D = A \cup B = A \cup A = A.$$

Prema tome:

$$\boxed{A = B = C = D}.$$