

Дванаести практикум из Анализе 1

Златко Лазовић

20. децембар 2016.

1. Доказати да функција $f(x) = 5x \ln \operatorname{tg} x + x - 5$ има бар једну реалну нулу.

Решење. Област дефинисаности функције је $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Доказаћемо да постоји нула функције на $(0, \frac{\pi}{2})$. Важи следеће

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} (5x \ln \operatorname{tg} x + x - 5) = +\infty \Rightarrow \exists x_2 \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad f(x_2) > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (5x \ln \operatorname{tg} x + x - 5) = -5 \Rightarrow \exists x_1 \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad f(x_1) < 0.$$

Према томе, применом Болцано-Кошијеве теореме добијамо

$$\left(\begin{array}{l} f \in C[\widehat{x_1, x_2}] \\ f(x_1) < 0 \\ f(x_2) > 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\text{Б.К.Т.}} \exists c \in [\widehat{x_1, x_2}] \text{ тако да је } f(c) = 0.$$

△

2. Ако је $x_0 \in A$ тачка нагомилавања скупа A и нека за низове $(x'_n) \in \mathbb{Q} \cap A$ и $(x''_n) \in \mathbb{I} \cap A$ који конвергирају ка x_0 важи $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = f(x_0)$, онда је функција f непрекидна у x_0 .
3. Испитати непрекидност Риманове функције

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1; \\ 0, & x \in \mathbb{I}, x = 0. \end{cases}$$

Решење. Испитајмо непрекидност у $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. За низ $x_n = \frac{pn}{qn+1}$ који конвергира ка $\frac{p}{q} = x_0$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{pn}{qn+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qn+1} = 0 \neq \frac{1}{q} = x_0$. Функција је прекидна у $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Испитајмо непрекидност у $x_0 = 0$. Узмемо низ $(x_n) \in \mathbb{Q}$ који конвергира ка $x_0 = 0$. Такав низ је облика $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, где $q_n \rightarrow \infty$ и задовољава

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(0).$$

Узмимо низ $(x_n) \in \mathbb{I}$ који конвергира ка $x_0 = 0$. Такав низ задовољава

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 = f(0).$$

Одавде следи, на основу задатка 2, да за сваки низ (x_n) који конвергира ка $x_0 = 0$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 = f(0)$, па је f непрекидна у $x_0 = 0$.

Испитајмо непрекидност у $x_0 \in \mathbb{I}$. Нека низ $(x_n) \in \mathbb{Q}$ конвергира ка x_0 . Такав низ је облика $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, где $q_n \rightarrow \infty$ и задовољава

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x_0).$$

Нека низ $(x_n) \in \mathbb{I}$ који конвергира ка x_0 . Такав низ задовољава

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 = f(x_0).$$

Одавде следи, на основу задатка 2, да за сваки низ (x_n) који конвергира ка x_0 важи $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 = f(x_0)$, па је f непрекидна у $x_0 \in \mathbb{I}$.

Функција је непрекидна на $\mathbb{I} \cup \{0\}$. △

4. За које вредност реалних параметара α и β функција

$$f(x) = \begin{cases} (4\sqrt[4]{1+x} - 3)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \\ -x^3 + \beta, & x < 0 \end{cases}$$

је непрекидна на $\mathbb{R}$? За такве α и β , да ли је функција ограничена на $(0, +\infty)$ и да ли постоји решење једначине $f(x) + x^5 + 2015^{2015} = 0$? Образложити одговор.

Решење. Из непрекидности функција $(4\sqrt[4]{1+x} - 3)^{\frac{1}{x}}$ и $-x^3 + \beta$ следи да је функција f је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Испитајмо непрекидност у нули. Из

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} (4\sqrt[4]{1+x} - 3)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\frac{1}{x} \ln(4\sqrt[4]{1+x} - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\frac{1}{x} \ln(4(1+\frac{1}{4}x+o(x)) - 3)} = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x+o(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\frac{1}{x}(x+o(x))} = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{(1+o(1))} = e, \\ \lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0_-} (-x^3 + \beta) = \beta, \\ f(0) &= \alpha, \end{aligned}$$

следи да је за $\beta = \alpha = e$ функција f непрекидна на $\mathbb{R}$.

За $\alpha = \beta = e$ функција је непрекидна на $[0, +\infty)$. Због постојања коначне граничне вредности

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(4\sqrt[4]{1+x} - 3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4\sqrt[4]{1+x} - 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 4\sqrt[4]{x} + \ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x} + 1} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 4\sqrt[4]{x}}{x} + \frac{\ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x} + 1} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 4 + \frac{1}{4} \frac{\ln x}{x}}{x} + \frac{\ln \sqrt[4]{x}}{x} + \frac{\ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x} + 1} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)}{x} = 0, \end{aligned}$$

при чему је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 4}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+1} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)}{x} = 0$, следи да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4\sqrt[4]{1+x} - 3\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4\sqrt[4]{1+x}-3)}{x}} = 1.$$

Према томе, функција је ограничена на неком скупу $[M, +\infty)$. Из непрекидности на $[0, M]$, на основу Вајерштрасове теореме, следи да је функција ограничена на $[0, M]$. према томе, функција f је ограничена на $[0, +\infty)$.

Формирајмо помоћну функцију $F(x) = f(x) + x^5 + 2015^{2015}$. На основу граничне вредности $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 1 + x^5 + 2015^{2015}) = -\infty$ следи да постоји $a < 0$ за које је $F(a) < 0$. Имамо да је $F(0) = e + 2015^{2015} > 0$. Функција је непрекидна на $[a, 0]$ и важи $F(a)F(0) < 0$, па на основу Болцано Кошијеве теореме, следи да постоји $x_1 \in [a, 0]$ за које је $F(x_1) = 0$, односно $f(x_1) + x_1^5 + 2015^{2015} = 0$. $\triangle$

5. Нека је дата функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, где је (a, b) може бити и бесконачан интервал. Ако постоје низови (x'_n) и (x''_n) у (a, b) тако да важи $\lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n - x''_n| = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x'_n) - f(x''_n)| \neq 0$, онда функција f није равномерно непрекидна на (a, b) .
6. Ако је функција $f(x)$ равномерно непрекидна на (a, b) и на (c, d) , где скупови имају непразан пресек, онда је равномерно непрекидна и на $(a, b) \cup (c, d)$.
7. Нека је функција f непрекидна на коначном интервалу (a, b) . Тада је f равномерно непрекидна на (a, b) акко постоје граничне вредности $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. $\blacksquare$

Решење. Нека је $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = B$. Додефинишимо функцију

$$F(x) = \begin{cases} A, & x = a; \\ f(x), & x \in (a, b); \\ B, & x = b. \end{cases}$$

Функција F је непрекидна на $[a, b]$, па је на основу Канторове теореме и равномерно непрекидна на $[a, b]$. $\blacksquare$

Докажимо тврђење у другом смеру. Ако је f равномерно непрекидна на (a, b) , онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{за свако } x', x'' \in (a, b),$$

за које је $|x' - x''| < \delta$.

За све x' и x'' који задовољавају неједнакости

$$0 < |x' - a| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad 0 < |x'' - a| < \frac{\delta}{2},$$

имамо

$$|x' - x''| = |x' - a + a - x''| \leq |x' - a| + |x'' - a| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

и при томе важи неједнакост $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Следи, испуњен је Кошијев услов постојања граничне вредности када $x \rightarrow a$, то јест постоји гранична вредност $A = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$. Слично се доказује да постоји гранична вредност $B = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$. $\triangle$

8. Нека је функција f непрекидна на $[a, +\infty)$. Ако постоји $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, онда је функција равномерно непрекидна на $[a, +\infty)$.

Решење. Из постојања граничне вредности следи, за свако $\varepsilon > 0$ постоји M тако да је $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ кад год је $x', x'' > M$. Фиксирајмо такав број M . Из непрекидности функције на сегменту $[a, M]$ следи њена равномерна непрекидност (Канторова теорема), односно за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји δ тако да је

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad \forall x', x'' \in [a, M],$$

ако је $|x' - x''| < \delta$. С обзиром да је неједнакост $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ тачна за свако $x', x'' > M$, то је она тачна и за свако $x', x'' \geq a$, који испуњавају неједнакост $|x' - x''| < \delta$, одакле је f равномерно непрекидна на скупу $[a, +\infty)$. $\triangle$

9. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \sqrt{|x|}e^{-x}$ на:

- а) $(0, +\infty)$;
б) $(-\infty, +\infty)$.

Решење. а) Због

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|}e^{-x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|}e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{e^x} = 0$$

посматраћемо равномерну непрекидност на $(0, 2]$ и $[1, +\infty)$.

Испитајмо равномерну непрекидност на $(0, 2]$. Функција f је непрекидна на $(0, 2]$ и постоји $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, па на основу задатка 7 имамо да је $f(x)$ равномерно непрекидна на $(0, 2]$.

Испитајмо равномерну непрекидност на $[1, +\infty)$. Функција f је непрекидна на $[1, +\infty)$ и постоји $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, па на основу задатка 8 имамо да је f равномерно непрекидна на $[1, +\infty)$.

Доказали смо да је функција равномерно непрекидна на $(0, 2]$ и на $[1, +\infty)$, а коришћењем задатка 6 добијемо да је равномерно непрекидна на $(0, +\infty)$.

б) Посматрајмо низове $x'_n = -n$ и $x''_n = -n - \frac{1}{n}$. Оба низа теже ка $-\infty$, њихова разлика $|x'_n - x''_n| = \frac{1}{n}$ тежи нули, а

$$\begin{aligned} |f(x'_n) - f(x''_n)| &= \left| \sqrt{|-n|}e^n - \sqrt{\left| -n - \frac{1}{n} \right|}e^{n+\frac{1}{n}} \right| = \left| \sqrt{n}e^n - \sqrt{n + \frac{1}{n}}e^{n+\frac{1}{n}} \right| \\ &= e^n \sqrt{n} \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}e^{\frac{1}{n}} \right| = e^n \sqrt{n} \left| 1 - \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right| \\ &= e^n \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = e^n \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(e^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

На основу претходног следи да функција није равномерно непрекидна на $(-\infty, +\infty)$. $\triangle$

10. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = x \sin x$ на $(0, +\infty)$.

Решење. Посматрајмо низове $x'_n = n$ и $x''_n = n + a_n$. Важи

$$|x'_n - x''_n| = |n - n - a_n| = |a_n|,$$

па је потребно да $a_n \rightarrow 0$. Затим,

$$\begin{aligned} |f(x'_n) - f(x''_n)| &= |n \sin n - (n + a_n) \sin(n + a_n)| \\ &= |n \sin n - (n + a_n)(\sin n \cos a_n + \cos n \sin a_n)| \\ &= |n \sin n - (n \sin n \cos a_n + n \cos n \sin a_n + \sin n \cos a_n + a_n \cos n \sin a_n)| \\ &= |n \sin n(1 - \cos a_n) - n \cos n \sin a_n - a_n \sin n \cos a_n - a_n \cos n \sin a_n|. \end{aligned}$$

Имајући у виду да $a_n \sin n \cos a_n$ и $a_n \cos n \sin a_n$ теже нули, остало је да нађемо a_n тако да $n \sin n(1 - \cos a_n) - n \cos n \sin a_n$ не тежи нули. Узмимо да је $a_n = \frac{1}{n}$. Тада је

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \sin n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) - n \cos n \sin \frac{1}{n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \sin n \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - n \cos n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \cos n(1 + o(1)) \right], \end{aligned}$$

при чему $\sin n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ тежи нули, а $\cos n(1 + o(1))$ не конвергира.

Доказали смо да функција није равномерно непрекидна на $(0, +\infty)$, избором низова $x'_n = n$ и $x''_n = n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ и применом Теореме 5. $\triangle$

11. Наћи константе a, b, c тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x^b}, & x < 0; \\ c, & x = 0 \\ x^{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$. За такве добијене константе испитати диференцијабилност функције $f(x)$. Да ли је функција $f(x)$ инјективна на $[1, +\infty)$?

Решење. Функција је добро дефинисана јер важи $\sin x^2 - x^3 > 0$ за свако $x < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x^2 \ln x} = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} a \frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3} - 1}{x^b} &= \lim_{x \rightarrow 0-} a \frac{\sqrt{x^2 - x^3 + o(x^3)}}{x^b} = \lim_{x \rightarrow 0-} -a \frac{\sqrt{1 - x + o(x)}}{x^{b-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} -a \frac{1 + x + o(x)}{x^{b-1}} = \begin{cases} -a, & b = 1 \\ \infty, & b > 1 \\ 0, & b < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Према томе, добијамо да је $a = -1$, $b = 1$ и $c = 1$.

Функција је диференцијабилна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ јер су функције $-\frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x}$ и x^{x^2} диференцијабилне на $(-\infty, 0)$, односно $(0, +\infty)$. Испитајмо диференцијабилност у $x = 0$. Важи

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^{h^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e^{h^2 \ln h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1 + h^2 \ln h + o(h^2 \ln h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 \ln h + o(h^2 \ln h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h \ln h + o(h \ln h)) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-\frac{\sqrt{\sin h^2 - h^3}}{h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-\sqrt{\sin h^2 - h^3} - h}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-\sqrt{h^2 - h^3 + o(h^3)} - h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - h + o(h)} - 1}{h} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Леви и десни извод се разликују, одакле функција није диференцијабилна у $x = 0$.

Због

$$f'(x) = \left(x^{x^2}\right)' = x^{x^2} (2x \ln x + x) > 0 \quad \text{на } (1, +\infty)$$

функција је растућа, а из непрекидности на $[1, +\infty)$ следи да је и инјективна. $\triangle$