

Вероватноћа - списак задатака

1. Бацају се истовремено 2 новчића. Одредити скуп елементарних исхода.
2. У кутији су четири листића означена бројевима 1, 2, 3 и 4. Извлачимо листиће
 - (а) без враћања,
 - (б) са враћањем,све док не извучемо листић са непарним бројем. Одредити скуп елементарних исхода.
3. Стрелац гађа у циљ облика кружне мете полупречника дужине K , при чему се мери растојање поготка од центра мете. Одредити скуп елементарних исхода.

КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

4. Из одељења које има 12 ученика и 8 ученица на случајан начин бира се пет представника. Израчунати вероватноћу да су изабране тачно две ученице.
5. Из кутије у којој се налазе цедуље означене бројевима од 1 до n извлачи се, једна по једна, n цедуља,
 - (а) без враћања,
 - (б) са враћањем,и бележе се добијени бројеви. Израчунати вероватноћу да буду редом извучени бројеви 1, 2, ..., n .
6. Хотел има n соба поређаних једна до друге у правој линији. На случајан начин k ($k < n$) гостију се размешта по собама. Израчунати вероватноћу да они заузму k суседних соба.
7. Из складишта са n предмета, од којих је k неисправно, узима се одједном m предмета. Израчунати вероватноћу да међу тим предметима буде тачно l неисправних.
8. Израчунати вероватноћу да се записивањем по случајном редоследу две цифре 1, једне цифре 2, три цифре 3, две цифре 4 и једне цифре 6 добије деветоцифрени број који на непарним местима има непарне цифре.
9. Двадесет идентичних куглица девојчица на случајан начин распоређује у пет кутија. Израчунати вероватноћу да тачно две кутије буду празне.

ФОРМУЛА УКЉУЧЕЊА И ИСКЉУЧЕЊА

10. Четири брачна пара на случајан начин седају у ред са 8 столица. Израчунати вероватноћу да ниједан пар не седи заједно.
11. За биоскопску салу која има n нумерисаних места све карте су распродате. Гледаоци случајно бирају места без обзира на карте које имају. Израчунати вероватноћу да бар један гледалац седне на место за које има карту. Чему тежи та вероватноћа кад $n \rightarrow \infty$?

12. У воз који има m вагона пење се n ($n \geq m$) путника. Израчунати вероватноћу да у сваки вагон уђе бар по један путник.
13. На смеру за информатику на Математичком факултету, сваког дана у радној недељи (од понедељка до петка) се одржава тачно шест часова. Студент је одлучио да на случајан начин одабере седам часова које ће слушати у току радне недеље, не водећи рачуна којим даном су предавања која бира. Израчунати вероватноћу да је избор такав да бар једног дана у радној недељи студент неће слушати часове.
14. Играч добија 13 насумично одабраних карата из стандардног шпила од 52 карте. Израчунати вероватноћу да играч бар од једног знака не добије ниједну карту.

ГЕОМЕТРИЈСКА ВЕРОВАТНОЋА

15. Из сегмента $[0, 1]$ на случајан начин бирају се два броја. Израчунати вероватноћу да њихов збир буде мањи од 1, а производ већи од $\frac{2}{9}$.

УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА И НЕЗАВИСНОСТ

16. Коцкица за игру се баца два пута. Ако је у оба бацања добијен број мањи од четири, израчунати вероватноћу да је збир палих бројева непаран.
17. У ред са 10 седишта на случајан начин седају три особе. Особе X и Y нису селе једна до друге. Израчунати вероватноћу да је особа Z села између особа X и Y .
18. Свака од 15 испитних цедуља садржи по два питања која се не понављају. Студент зна одговор на 25 питања. Да би положио испит он треба да одговори или на оба питања са цедуље коју прву извуче или на једно питање са цедуље коју прву извуче и на прво питање са цедуље коју другу извуче. Шта је вероватније: да студент положи или да не положи испит?
19. Под претпоставком да су вероватноће рађања мушког и женског детета једнаке, испитати независност догађаја A - деца нису истог пола и B - међу децом је највише једна девојчица, ако:
 - (а) у породици има троје деце;
 - (б) у породици има четворо деце.
20. Играчи A и B имају једнаке шансе да у једној партији неке игре освоје бод. Нема нерешених игара. Побеђује онај који први сакупи 6 бодова. Израчунати вероватноћу да победи играч A , односно играч B , ако је тренутни резултат 4:2 за играча A .

ФОРМУЛА ПОТПУНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ И БАЈЕСОВА ФОРМУЛА

21. У кутији са резервним деловима, који се по изгледу не разликују, је пет нових и три стара дела. Случајно се бирају два дела одједном и користе извесно време, после чега се враћају у кутију. Након тога се опет случајно бирају два дела одједном.
 - (а) Израчунати вероватноћу да оба другоодабрана дела буду нова.
 - (б) Ако су другоодабрани делови нови, израчунати вероватноћу да су првоодабрани делови били стари.

22. У кутији се налазе три куглице, од којих свака може бити бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица у кутији су једнако вероватне. Из кутије се четири пута, са враћањем, бира куглица. Који је највероватнији састав кутије ако је једном извучена црна и три пута бела куглица?
23. Вероватноћа да је одређена књига у библиотеци је p . Ако је та књига у библиотеци, онда се са истом вероватноћом налази на било којој од n полица. Прегледано је m ($m < n$) полица и та књига није нађена. Израчунати вероватноћу да је она сада у библиотеци.
24. Претпоставимо да имамо три карте које су исте величине, али тако да је прва карта са једне стране црне боје, са друге црвене, друга карта је црвена са обе стране, а трећа је црна са обе стране. Случајно се извлачи једна карта, а затим се случајно окреће на једну страну. Ако је горња страна извучене карте црвена, израчунати вероватноћу да је доња страна те карте црна.
25. У првој кутији налазе се само беле куглице, а у другој кутији $\frac{1}{4}$ куглица су црне, а $\frac{3}{4}$ беле. Случајно се бира кутија и из ње се извлачи једна куглица. Испоставило се да је бела. Извучена куглица се враћа у кутију из које је извучена и из ње се опет извлачи једна куглица. Израчунати вероватноћу да ова куглица буде црна.
26. У једној кошари се налази 15 тениских лоптица, од чега 9 некоришћених, док се у другој кошари налази 8 некоришћених и 7 коришћених лоптица. Играч А из на случајан начин изабране кошаре случајно бира 3 лоптице. Користи их у првом гему, након чега их враћа у кошару из које су узете. Играч Б у следећем гему случајно бира 3 лоптице из те исте кошаре. Израчунати вероватноћу да је играч Б изабрао 3 некоришћене лоптице, ако се зна да је играч А изабрао 3 некоришћене лоптице.
27. Јабуке убрране са три плантаже се чувају у истом складишту. Вероватноћа да јабука буде прве класе је 0.85 за јабуку убрану на првој плантажи, 0.68 за јабуку убрану на другој плантажи и 0.74 за јабуку убрану на трећој плантажи. Принос са прве плантаже је три пута већи од приноса са друге плантаже, а принос са друге плантаже је два пута већи од приноса са треће плантаже. Из складишта се узима 5 јабука, са враћањем. Познато је да су међу њима бар три јабуке прве класе.
- Одредити вероватноћу да је свих пет јабука прве класе.
 - Одредити вероватноћу да је свих пет јабука са прве плантаже.

ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ, МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ И ДИСПЕРЗИЈА

28. У смеру кретања аутомобила налазе се редом три семафора који раде независно један од другог. На сваком семафору се с вероватноћом $p = 0.6$ појављује црвено и с вероватноћом $q = 0.4$ зелено светло. Случајна величина X представља број семафора поред којих пролази аутомобил без заустављања. Одредити закон и функцију расподеле вероватноћа случајне величине X .
29. У кутији се налазе три куглице нумерисане бројевима 1,2,3. Из кутије се на случајан начин бирају две куглице, једна по једна са враћањем. Нека је X количник бројева добијених у првом и другом извлачењу.
- Одредити закон расподеле случајне величине X .

(б) Скицирати график функције расподеле F_X .

(в) Израчунати вероватноћу да X узме целобројну вредност.

30. Нека је X случајна величина чији је закон расподеле

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix},$$

за $p \in (0, \frac{1}{2})$. Наћи законе расподеле за случајне величине $Y = X^2$ и $Z = e^X$. Израчунати DY и DZ .

31. Из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$) на случајан начин бирају се одједном два различита броја x и y . Нека је $S = \max\{x, y\}$. Одредити расподелу случајне величине S и израчунати $P\{0.5 < S \leq 3.5\}$, $P\{S > 2\}$, као и очекивање ES .

32. Тест има 10 питања, а свако питање на тесту има m ($m \geq 2$) понуђених одговора. Студент зна тачан одговор на неко питање са вероватноћом $p \in (0, 1)$, независно од осталих питања. Ако не зна одговор, студент на случајан начин заокружује један од понуђених одговора. Израчунати вероватноћу да је студент заокружио тачан одговор на тачно 6 питања.

33. Случајна величина X има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу. Ако је $Y = n - X$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати EY и DY .

ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ, НЕЗАВИСНОСТ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

34. Новчић се баца четири пута. Нека је X броја палих писама, а Y највећи број узастопних понављања писма. Одредити заједничку расподелу вектора (X, Y) и испитати независност случајних величина X и Y .

35. Генератор случајних бројева генерише цифре, равномерно расподељене на скупу $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Овај генератор се користи за генерисање шифре која се састоји од шест цифара случајно и независно генерисаних из овог скупа. Нека је X број појављивања јединице, а Y број појављивања петице у шифри. Одредити заједничку расподелу вектора (X, Y) .

36. Из кутије у којој су четири цедуље нумерисане бројевима 1,2,3,4 извлаче се цедуље, без враћања, док се не извуче цедуља са непарним бројем. Нека је X збир извучених бројева, а Y број извлачења. Одредити расподелу случајног вектора (X, Y) , као и маргиналне расподеле за X и Y . Израчунати EX и EY . Испитати независност случајних величина X и Y и израчунати очекивање производа X и Y , EXY .

37. Нека су $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ и $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ независне случајне величине. Наћи расподелу њиховог збира, $Z = X + Y$.

АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ

38. Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} kx + \frac{7}{12}, & x \in (-4, -1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- (а) Израчунати константу k за коју је f густина расподеле неке случајне величине X .
 - (б) Одредити функцију расподеле те случајне величине.
 - (в) Израчунати $P(\{X \geq -\frac{3}{2}\} \cup \{-\frac{5}{2} < X \leq 0\})$.
 - (г) Израчунати очекивање EX и дисперзију DX .
39. Наћи расподелу случајне величине $Y = \sigma X + \mu$, $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$, где је $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
40. Нека је X непрекидна случајна величина са густином

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Наћи расподелу случајне величине Y , где је $Y = X^2$.

41. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Одредити функције расподела следећих случајних величина:
- (а) $Y = |1 - X|$;
 - (б) $Z = \min\{X, X^2\}$.
42. Време (у сатима) до доласка аутобуса 1 има експоненцијалну $\mathcal{E}(2)$ расподелу, док време до доласка аутобуса 2 има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, где је $\lambda > 0$ непознат параметар. Времена доласка су независна. Ако је очекивано време до доласка првог од та два аутобуса 15 минута, одредити вредност параметра λ .
43. Број φ се случајно бира из сегмента $[0, \pi/2]$, а затим се кроз тачку $A(0, 1)$ повлачи права која са позитивним делом x осе заклапа угао φ . Ако је D удаљеност те праве од координатног почетка, одредити расподелу случајне величине D .
44. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1, 2]$ расподелу. Ако је $Y = \min\{X, 1\}$, одредити расподелу случајне величине Y и израчунати очекивање EY .
45. Случајна величина X има $\mathcal{U}[-1, 4]$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $Y = |X|$ и израчунати EY .
46. Случајна величина X има $\mathcal{U}[0, 4]$ расподелу. Одредити расподелу случајне величине $Y = [X]$.
47. Случајна величина X има стандардну експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}(1)$. Одредити расподелу случајне величине $Y = X - [X]$.
48. Показати да за $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ важи $P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}$, $s, t > 0$.

АПРОКСИМАЦИЈА БИНОМНЕ РАСПОДЕЛЕ НОРМАЛНОМ

49. Фабрика у току дана произведе 1000 аутомобила од којих сваки са вероватноћом 0.05 захтева дораду.
- (а) Израчунати вероватноћу да у току изабраног дана између 800 и 975 аутомобила буде исправно.
 - (б) Колики треба да буде капацитет паркинга, па да са вероватноћом 0.9 буде довољан за аутомобиле који чекају дораду?

50. Студент полаже тест који се састоји од n ($n > 100$) питања. За свако питање је понуђено шест одговора од којих је само један тачан. Студент насумично заокружује одговоре. За сваки тачан одговор студент добија 20 поена, док му се за нетачан одузима 2 поена. Колико најмање треба да буде n па да студент са вероватноћом од бар 90% освоји 100 или више поена?
51. Два биоскопа се такмиче у продаји карата за 1000 посетилаца. Претпоставимо да сваки гледалац бира независно са истом вероватноћом један од два биоскопа. Нека је N број седишта у сваком од биоскопа ($N \leq 1000$). Израчунати N тако да је вероватноћа да су сва места у првом биоскопу попуњена мања од 1%.
52. У вртићу се налазе две гомиле са једнаким бројем пакетића. Свако од 100 деце на случајан начин бира гомилу и узима пакетић са ње. Колико би најмање пакетића требало да буде на свакој гомили, па да вероватноћа да буде довољно пакетића за сву децу која одаберу ту гомилу, буде бар 0.96?

АПСОЛУТНО НЕПРЕКИДНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ

53. Дата је функција густине расподеле дводимензионе случајне величине (X, Y) :

$$f(x, y) = xe^{-(x+y)}, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

- а) Одредити функцију расподеле $F_{X,Y}$.
- б) Испитати независност случајних величина X и Y .
- в) Ако је $T = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, израчунати $P\{(X, Y) \in T\}$.
54. Тачка $A(X, Y)$ се случајно бира у квадрату D са теменима $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$. Одредити густину расподеле случајног вектора (X, Y) , као и маргиналне расподеле случајних величина X и Y . Израчунати EXY .
55. За густине f_X и f_Y независних случајних величина X и Y важи $f_X(x) = \frac{2}{x^3}$, $x \geq 1$ и $f_Y(y) = \frac{1}{4}$, $y \in [-2, 2]$. Ако је $Z = 2X - Y + 1$, одредити густину расподеле случајне величине Z .
56. Случајне величине X и Y су независне и имају исту експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је $Z = |X - Y|$, одредити густину расподеле случајне величине Z .
57. Време потребно да се машина поправи је случајна величина T која има експоненцијалну расподелу чије је математичко очекивање $\frac{1}{3}$. Фирма наплаћује поправку $X = 10 + e^{\frac{T}{3}}$ (долара).
- а) Израчунати очекивану цену поправке.
- б) Одредити расподелу случајне величине X и испитати да ли је она апсолутно непрекидног типа.
- в) Одредити функцију расподеле случајног вектора (X, T) .
58. Нека су $X_1, \dots, X_n$ независне случајне величине из униформне $U(0, 1)$ расподеле. Ако је $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, а $m = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, одредити расподеле случајних величина M и m .

КОВАРИЈАНСА И КОЕФИЦИЈЕНТ КОРЕЛАЦИЈЕ

59. Куглице нумерисане бројевима 1,2,3,4,5,6,7,8 убацују се редом, једна по једна, у једну од две кутије. Ако је X број куглица нумерисаних парним бројевима које се налазе у првој кутији, а Y број куглица нумерисаних бројевима дељивим са 4 у другој кутији, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y .
60. Из сета од 12 различитих батерија, међу којима су 3 нове, за које се подразумева да су исправне, 4 коришћене али исправне и 5 коришћених али неисправних, истовремено се бирају две. Нека је X број исправних, а Y број коришћених батерија међу одабраним. Одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y и испитати да ли су међусобно независне.
61. За густину случајне величине X важи да је:

$$f(x) = \frac{2x}{49}, \quad 0 < x < 7.$$

Одредити коефицијент корелације случајних величина Y и Z , ако је

$$Y = \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor, \quad Z = (-1)^Y.$$

62. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1, 1]$ расподелу. Ако је $Y = |X|$, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y .
63. Случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[-1, 1]$ расподелу. Ако је $Y = \operatorname{sgn} X$, израчунати коефицијент корелације случајних величина X и Y .
64. За густину расподеле случајног вектора (X, Y) важи да је

$$f(x, y) = 6(1 - x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x.$$

Ако је $Z = 2X - Y$, а $H = X - 2Y$, израчунати коефицијент корелације случајних величина Z и H .

УСЛОВНА РАСПОДЕЛА

65. У првој кутији се налазе четири правилна полиедра и то један са 4 стране, један са 6 страна и два са 8 страна, док се у другој кутији налази шест правилних полиедара и то три са 4 стране, два са 6 страна и један са 8 страна. Сваки полиедар је хомоген и стране су му нумерисане бројевима $\{1, 2, 3, \dots, k\}$, где је k број страна полиедра. Резултат бацања полиедра је број којим је нумерисана страна на коју је пао. Ива случајно бира један полиедар из друге кутије и ставља у прву, након чега извлачи један полиедар из прве кутије и баца га. Нека је S број страна извученог полиедра. Одредити расподелу случајне величине S , ако је Ива након бацања извученог полиедра добила број три.
66. Дводимензиона случајна величина (X, Y) има униформну расподелу на троуглу са теменима $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Одредити $f_{X|Y=y}(x)$ - условну густину расподеле случајне величине X при услову $Y = y$.
67. Из сегмента $[0, 1]$ случајно се бира број X , а затим се из сегмента $[\frac{X}{2}, X]$ случајно бира број Y . Одредити расподелу случајне величине Y .

68. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је Y случајна величина таква да је

$$f_{Y|X=x}(y) = xe^{-xy},$$

за све $x > 0$ и $y > 0$, израчунати $P\{X > 2|Y > 1\}$.

69. Случајан вектор (X, Y) има униформну расподелу на унутрашњој области трапе-
за чија су темена $(-2, 0), (-1, 1), (1, 1), (2, 0)$. Одредити условну густину расподеле $f_{X|X < 3Y-2}(x)$.

70. Заједничка густина случајног вектора (X, Y) је

$$f(x, y) = \frac{4}{(xy)^2}, x \geq 2, y \geq 2.$$

Ако је $Z = \ln(\frac{X}{2}) + \ln(\frac{Y}{2})$, одредити условну расподелу случајне величине Z при услову $Z > 1$.

71. За густину расподеле случајног вектора (X, Y) важи да је

$$f(x, y) = cx^2y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 - x^2,$$

при чему је c реална константа. Ако је $Z = X + Y$, одредити условну расподелу случајне величине Z при услову $X < \frac{1}{2}$.

КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА

72. Одредити карактеристичну функцију случајне величине:

- а) X_1 која има $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ расподелу;
- б) X_2 која има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу;
- в) X_3 која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу и доказати да ако X_3 има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а X_4 има Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу и независне су, онда њихов збир $X_3 + X_4$ има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ расподелу;
- г) X_5 која има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу;
- д) X_6 чија густина расподеле је $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$, а затим израчунати очекивање EX_6 и дисперзију DX_6 .

73. Одредити расподелу случајне величине за чију карактеристичну функцију $\varphi(t)$ важи да је:

- а) $\varphi(t) = \frac{3+\cos t}{4}$;
- б) $\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

74. Ако су Y и Z независне случајне величине такве да је $X = Y + Z$, где X има $\mathcal{U}(0, n+1)$, а Y има $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелу, одредити расподелу случајне величине Z .

ЧЕБИШОВЉЕВА НЕЈЕДНАКОСТ

75. Ако за случајну величину X важи да је $EX = 3$ и $DX = 0.01$, проценити $P\{2.5 < X < 3.5\}$.

КОНВЕРГЕНЦИЈЕ НИЗОВА СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

76. Општи члан низа X_n има закон расподеле $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{6}{\pi^2 n^2} & \frac{6}{\pi^2 n^2} \end{pmatrix}$. Испитати конвергенције у расподели и вероватноћи низа случајних величина (X_n) .
77. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има униформну $U[0, n]$ расподелу. Ако је $Y_n = \min\{1, X_n\}$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Y_n) .
78. Општи члан X_n низа независних случајних величина има густину расподеле $f_n(x)$, где је
- $$f_n(x) = 2(1 - x), \quad x \in (0, 1).$$
- Ако је $Y_n = \sqrt{n}(1 - M_n)$, где је $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Y_n) .
79. Општи члан низа независних случајних величина (X_n) има густину расподеле $f_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}}, x \geq 1$. Испитати конвергенцију у вероватноћи тог низа.
80. Општи члан X_n низа независних случајних величина има густину расподеле $f_n(x) = ne^{-nx}, x \geq 0$. Ако је $Y_n = \frac{1}{X_n}$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина Y_n .
81. За општи члан X_n низа независних случајних величина важи да је $X_n = nY - [nY]$, где је Y случајна величина чија је густина расподеле $f(y) = 2y, y \in [0, 1]$. Испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (X_n) .
82. За карактеристичну функцију општег члана $X_n, n > 1$, низа независних случајних величина важи да је $\varphi_n(t) = \frac{1}{n^2}(\cos(2t\sqrt{n}) + 2\cos(t\sqrt{n})) + 1 - \frac{3}{n^2}$. Испитати конвергенцију у вероватноћи низа случајних величина (X_n) .

СЛАБИ ЗАКОН ВЕЛИКИХ БРОЈЕВА

83. Испитати да ли слаби закон великих бројева важи за низ независних случајних величина чији општи члан X_n има:
- закон расподеле $\begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
 - густину расподеле $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}, x \geq 0$;
 - закон расподеле $\begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
84. За карактеристичну функцију општег члана X_n низа независних случајних величина важи да је $\varphi_n(t) = \cos(2t)$. Ако је $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\frac{1}{4}X_i + \frac{1}{2})$, испитати конвергенције у расподели и вероватноћи низа случајних величина (Y_n) .

85. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има расподелу

$$\begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{3^n} & 1 - \frac{2}{3^n} & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}.$$

Израчунати, ако постоји, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|S_n| < \frac{n}{2}\}$.

ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

86. Рачунар у процесу сабирања бројева врши заокруживање на најближи цео број. Претпоставља се да су грешке настале заокруживањем независне и униформно расподелене на сегменту $[-0.5, 0.5]$.

а) Ако се сабира 1500 бројева, израчунати вероватноћу да апсолутна вредност укупне грешке буде већа од 15.

б) Колико се највише бројева може сабрати, па да са вероватноћом 0.9 вредност укупне грешке буде мања од 10?

87. Општи члан низа независних случајних величина (X_n) има густину расподеле

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0.$$

а) Ако је $Y_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 2)$, где је $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, испитати конвергенцију у расподели низа случајних величина (Y_n) .

б) Израчунати, ако постоји,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\bar{X}_n \leq \frac{1 + 2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right\}.$$

88. Осигуравајућа компанија жели да изврши ревизију одштетних захтева из своје велике базе трансакција. Познато је да одштетни захтев има униформну $\mathcal{U}[10, 100]$ расподелу (изражено у доларима). Како би извршили одговарајућу процену, на случајан начин, независно један од другог, бира се 500 захтева из базе. Ако се ти захтеви обележавају са X_k , $k \in \{1, 2, \dots, 500\}$, одредити константу c тако да важи

$$P\left\{55 - c \leq \frac{1}{500}(X_1 + X_2 + \dots + X_{500}) \leq 55 + c\right\} = 0.85.$$

89. За карактеристичну функцију општег члана X_n низа независних случајних величина важи да је $\varphi_n(t) = \frac{2}{5}(\cos(10t) + \cos(5t)) + \frac{1}{5}$. Ако је $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, израчунати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n \leq 10\sqrt{n}\}.$$

90. Општи члан X_n низа независних случајних величина има густину расподеле $f_n(x)$, где је

$$f_n(x) = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}(x - \frac{4}{3})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ако је $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, израчунати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{S_n}{n} \leq \frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right\}.$$