

ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ВЕРОВАТНОЋЕ

10. јун 2024.

1. За усмени испит студенти треба да науче 27 испитних питања. На усменом испиту, студент на случајан начин бира 5 питања одједном и да би положио мора знати одговор на бар 3 изабрана питања. Познато је да од 30 студената који су изашли на испит, њих 5 зна одговоре на сва питања, 7 зна одговоре на 25 питања, 10 на 22 питања и 8 зна одговоре на само 18 питања. Након усменог испита, на случајан је изабран један студент. Ако се зна да је изабрани студент положио испит, израчунати вероватноћу да је то био студент који је знао одговоре на 25 питања.

Решење: Дефинишемо следеће догађаје:

- A - студент је положио
- H_1 - студент зна одговоре на сва питања
- H_2 - студент зна одговоре на 25 питања
- H_3 - студент зна одговоре на 22 питања
- H_4 - студент зна одговоре на 18 питања

Тражи се $P(H_2|A)$:

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)}$$

Догађаји H_1, H_2, H_3 и H_4 чине потпун систем догађаја и важи:

$$P(H_1) = \frac{5}{30}, \quad P(H_2) = \frac{7}{30}, \quad P(H_3) = \frac{10}{30}, \quad P(H_4) = \frac{8}{30}$$

$P(A)$ ћемо израчунати користећи формулу потпуне вероватноће:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) + P(A|H_4)P(H_4)$$

$$P(A|H_1) = 1$$

$$P(A|H_2) = 1$$

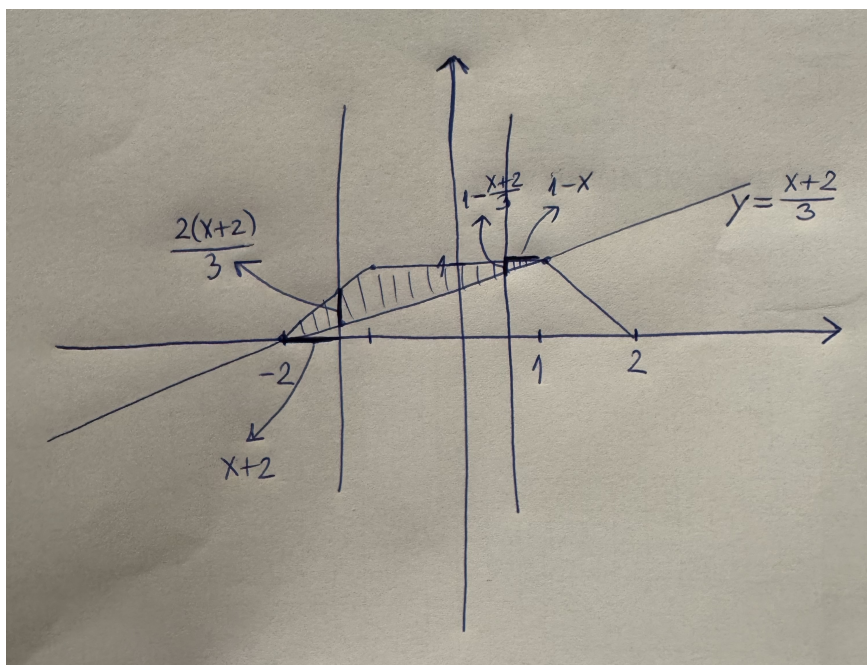
$$P(A|H_3) = \frac{\binom{22}{5} + \binom{22}{4}\binom{5}{1} + \binom{22}{3}\binom{5}{2}}{\binom{27}{5}}$$

$$P(A|H_4) = \frac{\binom{18}{5} + \binom{18}{4}\binom{9}{1} + \binom{18}{3}\binom{9}{2}}{\binom{27}{5}}$$

2. Случајан вектор (X, Y) има униформну расподелу на унутрашњој области трапеза чија су темена $(-2, 0), (-1, 1), (1, 1), (2, 0)$. Одредити условну густину расподеле $f_{X|X < 3Y-2}(x)$.

Решење: Површина трапеза T је 3 па је заједничка густина вектора (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{1}{3}, (x, y) \in T$$



Прво рачунамо функцију расподеле. Пошто (X, Y) има униформну расподелу, вероватноће ћемо рачунати преко површина (погледати слику изнад):

$$F_{X|X < 3Y-2}(x) = P(X \leq x | X < 3Y - 2) = \frac{P(X \leq x, X < 3Y - 2)}{P(X < 3Y - 2)}$$

Вероватноћу $P(X < 3Y - 2)$ ћемо израчунати тако што ћемо површину троугла изнад праве $y = \frac{x+2}{3}$ поделити са површином трапеза:

$$P(X < 3Y - 2) = \frac{\frac{2 \cdot 1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Вероватноћа $P(X \leq x, X < 3Y - 2)$ ће зависити од вредности x , па разликујемо 4 случаја:

1° случај: $x \geq 1$

$$P(X \leq x, X < 3Y - 2) = P(X < 3Y - 2) = \frac{1}{3}$$

2° случај: $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} P(X \leq x, X < 3Y - 2) &= \frac{1 - \frac{(1-x) \cdot (1 - \frac{x+2}{3})}{2}}{3} = \\ &= \frac{2 - 1 + x + \frac{x+2}{3} - x \cdot \frac{x+2}{3}}{6} = \frac{3 + 3x + x + 2 - x^2 - 2x}{18} = \frac{5 + 2x - x^2}{18} \end{aligned}$$

3° случај: $x \in (-2, -1]$

$$P(X \leq x, X < 3Y - 2) = \frac{\frac{2(x+2)}{3} \cdot \frac{x+2}{2}}{3} = \frac{(x+2)^2}{9}$$

4° случај: $x \leq -2$

$$P(X \leq x, X < 3Y - 2) = 0$$

Коначно, функција расподеле је:

$$F_{X|X<3Y-2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{(x+2)^2}{3}, & x \in (-2, -1] \\ \frac{5+2x-x^2}{6}, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Густину расподеле добијамо диференцирањем функције расподеле:

$$f_{X|X<3Y-2}(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{3}, & x \in (-2, -1] \\ \frac{1-x}{3}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

3. За густину расподеле општег члана X_n низа независних случајних величина важи да је $f_{X_n}(x; \lambda) = \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}}$, $x \geq 1$, $\lambda > 0$. Показати да важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \ln \left(\prod_{i=1}^n X_i^\lambda \right) \leq n \right\} = \frac{1}{2}.$$

Решење: Прво трансформишемо израз

$$\ln \left(\prod_{i=1}^n X_i^\lambda \right) = \lambda \sum_{i=1}^n \ln X_i.$$

Пошто је (X_i) низ независних случајних величина, такав ће бити и низ $(\ln X_i)$, па можемо да применимо централну граничну теорему:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i - E(\sum_{i=1}^n \ln X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n \ln X_i)}} \xrightarrow{D} Z, Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Да бисмо израчунали очекивање и дисперзију, морамо да нађемо расподелу од $\ln X_i$.

$$X_i \in [1, +\infty) \Rightarrow \ln X_i \in [0, +\infty)$$

Нека је $x \geq 0$ произвољно:

$$\begin{aligned} F_{\ln X_i}(x) &= P(\ln X_i \leq x) = P(X_i \leq e^x) = \int_1^{e^x} \frac{\lambda}{t^{\lambda+1}} dt = \\ &= \lambda \cdot \frac{t^{-\lambda}}{-\lambda} \Big|_1^{e^x} = 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Дакле $\ln X_i$ има експоненцијалну расподелу:

$$\ln X_i \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

Сада имамо:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \ln X_i - n \cdot \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{\lambda^2}}} \xrightarrow{D} Z, Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Односно:

$$\frac{\lambda \sum_{i=1}^n \ln X_i - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z, Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Коначно:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\lambda \sum_{i=1}^n \ln X_i \leq n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\lambda \sum_{i=1}^n \ln X_i - n \leq 0 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\lambda \sum_{i=1}^n \ln X_i - n}{\sqrt{n}} \leq 0 \right) = F_Z(0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$