

Relacije

Def: Binarna relacija između elemenata skupa A i skupa B je bilo koji podskup $R \subseteq A \times B$ (za $A=B$, kažemo da je R relacija na skupu A)

Primer: $\leq$ na $\mathbb{R}$

$$2 \leq 3 \Leftrightarrow (2, 3) \in \leq$$

↑
infixna
notacija

$$3 \not\leq 2 \Leftrightarrow (3, 2) \notin \leq$$

Osobine relacija $R \subseteq A \times A = A^2$

- 1) refleksivnost - $\forall a \in A \quad aRa$
2) antirefleksivnost - $\forall a \in A \quad a \not R a$
3) simetričnost - $\forall a, b \in A \quad aRb \Rightarrow bRa$
4) asimetričnost - $\forall a, b \in A \quad aRb \Rightarrow b \not R a$
5) antisimetričnost - $\forall a, b \in A \quad aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$
6) tranzitivnost - $\forall a, b, c \in A \quad aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Def: Relacija $R \subseteq A \times A$ je ekvivalencija ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna ($=, \parallel, \cong, \simeq, \equiv_{\text{mod } m}, \dots$)

Relacija $R \subseteq A \times A$ je poredak ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna ($\leq, \preceq, \dots$).

Za poredak kažemo da je linearan (totalan) ako su svaka dva elementa u relaciji ($\forall a, b \in A$ važi aRb ili bRa)

Primer: $\leq$ jeste linearan poredak na $\mathbb{R}$

$\leq$ nije linearan poredak:

$\{1\}$ $\{2\}$ nisu u relaciji ni na jedan način

Relacije ekvivalencije

~ neka relacija ekvivalencije na skupu A

Za $a \in A$ definišemo njegovu klasu

$$[a] = C_a = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

$$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}$$

Primer: $\equiv_{(\text{mod } 3)}$ za $x, y \in \mathbb{Z}$

ako $3 \mid y - x$

ako x i y daju isti ostatak pri
deljenju sa 3

Imamo 3 ostatka pri deljenju sa 3 - 0, 1, 2

$$[0] = \{0, 3, -3, 6, -6, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 4, -2, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 5, -1, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}/\equiv_{(\text{mod } 3)} = \{[0], [1], [2]\} \text{ je tročlan skup}$$

Važe svojstva:

$$a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$$

$$a \not\sim b \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$$

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A$$

} jedna partocija skupa A
na neprazne, disjunktne
podskupove

1. Ako su ρ_1 i ρ_2 relacije ekvivalencije na A, tada je
i $\rho_1 \cap \rho_2$ relacija ekvivalencije na A. Da li isto
važi i za $\rho_1 \cup \rho_2$?

ρ_1 i ρ_2 su refleksivne, simetrične i tranzitivne

P: $(a, a) \in \rho_1 \cap \rho_2 \quad \forall a \in A$?

$$\Leftrightarrow (a, a) \in \rho_1 \wedge (a, a) \in \rho_2 \quad \forall a \in A \quad \checkmark$$

Što jeste ispunjeno jer su ρ_1 i ρ_2 refleksivne.

$$S: (a,b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2$$

$$(a,b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2, \text{ ali}$$

$$R_1 \text{ i } R_2 \text{ jesu simetrične} \Rightarrow (b,a) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_2$$

$$\Rightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2$$

$$T: (a,b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b,c) \in R_1 \cap R_2 \stackrel{?}{\Rightarrow} (a,c) \in R_1 \cap R_2$$

$$(a,b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b,c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow$$

$$(a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2$$

$$\Rightarrow ((a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1) \wedge ((a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_2)$$

$$\Rightarrow (a,c) \in R_1 \wedge (a,c) \in R_2 \Rightarrow (a,c) \in R_1 \cap R_2$$

R_1 i R_2
su tranzitivne

$R_1 \cup R_2$: refleksivnost i simetričnost prolaze, ali tranzitivnost puca u opštem slučaju:

Primer: $A = \{a, b, c\}$

$$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$$

$$R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$$

$R_1 \cup R_2$ ima (a,b) i (b,c) , ali nema (a,c) , pa nije tranzitivna.

2. Dopuniti $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (4,4), (4,5)\}$ do minimalne relacije ekvivalencije na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

	1	2	3	4	5
1	T	T	T		
2	T	T	T		
3	T	T	T		
4				T	T
5				T	T

Treba nam refleksivnost

$\Rightarrow$ dodajemo $(2,2), (3,3), (5,5)$

Treba nam simetričnost

$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1)$ dodajemo

$(2,3) \in R \Rightarrow (3,2)$ dodajemo

$(4,5) \in R \Rightarrow (5,4)$ dodajemo

$(1,2) \in R$ i $(2,3) \in R \Rightarrow (1,3)$ dodajemo
 $\Rightarrow (3,1)$ dodajemo

$C_1 = \{1, 2, 3\}$ je klasa } imamo partitionisanje skupa
 $C_2 = \{4, 5\}$ je klasa } $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ na klase.

Relacije poretka

Def: Neka je $\leq$ poredak na skupu A i neka je $B \subseteq A$.

Za $a \in A$ kažemo da je:

- 1) gornje ograničenje skupa B ako je $\forall b \in B \quad b \leq a$
- 2) donje ograničenje skupa B ako je $\forall b \in B \quad a \leq b$
- 3) najveći element skupa B ako mu pripada i jeste jedno gornje ograničenje.
- 4) najmanji element skupa B ako mu pripada i jeste jedno donje ograničenje.
- 5) maksimalni element skupa B ako mu pripada i od njega ne postoji veći element skupa B .
- 6) minimalni element skupa B ako mu pripada i od njega ne postoji manji element skupa B .
- 7) supremum skupa B ako je njegovo najmanje gornje ograničenje
- 8) infimum skupa B ako je njegovo najveće donje ograničenje.

Primer: 1) $\leq$ na $\mathbb{R}$ i $[0, 1)$



gornje ograničenje: 2

donje ograničenje: -11

najveći: nema

najmanji: 0

maksimalni: ne postoji

minimalni: 0

supremum: 1

infimum: 0

$$2) \mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\subseteq \text{ i skup } B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}\}$$

$$= \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset, \{1,2,3\}\}$$

gornje ograničenje: $\{1,2,3\}$

dolje ograničenje: $\emptyset$

najveći: ne postoji

najmanji: ne postoji

maksimalni: $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}$

minimalni: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

supremum: $\{1,2,3\}$

infimum: $\emptyset$

Stav: Najveći, najmanji, supremum i infimum (ako postoje) su jedinstveni, dok maksimalni i minimalni ne moraju biti.

Stav: a je najveći element skupa B akko je a jedinstven maksimalan.
 a je najmanji element skupa B akko je a jedinstven minimalan.

1. Neka je na skupu:

a) $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$

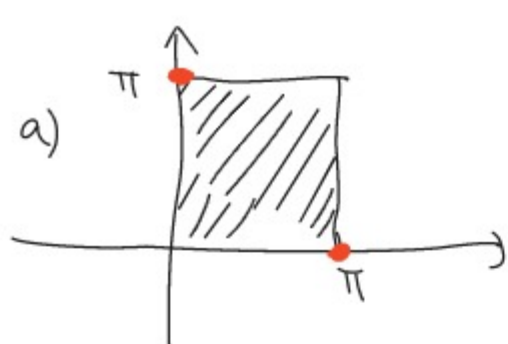
b) kružna površ sa centrom u $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ poluprečnika $\frac{\pi}{2}$

zadeta relucija ρ sa:

$$(x,y) \rho (z,w) \text{ akko } \cos x \leq \cos z \text{ i } y \leq w.$$

Dokazati da je ρ poredak i naći najveći, najmanji, minimalni i maksimalni.

↑



$(x, y) \preceq (z, w)$ ako

$$\cos x \leq \cos z \quad \text{i} \quad y \leq w$$

ali $\cos$ je opadajuća funkcija na $[0, \pi]$

ako $x \geq z$ i $y \leq w$
 $\geq$ i $\leq$ jesu relacije poretka

Lema: Neka je $\preceq$ poredak na A i $\preceq$ poredak na B , tada je $\preceq \times \preceq$ poredak na $A \times B$

$((a_1, b_1) \preceq \times \preceq (a_2, b_2))$ ako $a_1 \preceq a_2$ i $b_1 \preceq b_2$

dokaz: dokažite da $\preceq \times \preceq$ zadovoljava
 refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost

Po ovoj lemi, i relacija $\preceq = \geq x \leq$ jeste poredak.

Najveći: element (a, b) je najveći ako

$(x, y) \preceq (a, b)$ za bilo koje $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$

$\Rightarrow x \geq a$ i $y \leq b$ za bilo koje $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$

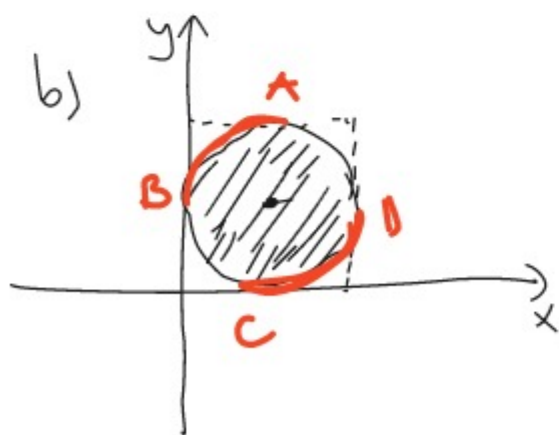
$\Rightarrow a = 0$ i $b = \pi \Rightarrow (0, \pi)$ je najveći, pa i
 jedinstven maksimalan

Najmanji: element (a, b) je najmanji ako

$(a, b) \preceq (x, y)$ za bilo koje $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$

$\Rightarrow a \geq x$ i $b \leq y$ za bilo koje $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$

$\Rightarrow a = \pi$ i $b = 0 \Rightarrow (\pi, 0)$ je najmanji, pa i
 jedinstven minimalan.



krug $\subseteq [0, \pi] \times [0, \pi]$ (upisan krug u taj kvadrat)

$(x, y) \preceq (z, w)$ ako

$$\cos x \leq \cos z \quad \text{i} \quad y \leq w \quad \text{ako}$$

$$x \geq z \quad \text{i} \quad y \leq w$$

Nemamo najveći, ali imamo beskonačno mnogo
 maksimalnih - sve tačke sa luka $\widehat{AB}$

Nemamo najmanji, ali imamo beskonačno
 mnogo minimalnih - sve tačke sa luka $\widehat{CD}$

2. Odrediti najveći, najmanji, minimalni i maksimalni element skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ u odnosu na relaciju $|$.

Najmanji: 1 $\Rightarrow$ jedinstven minimalan je 1

Najveći: ne postoji

Maksimalni: 5, 6, 7, 8 jer ne dele ništa (osim sebe)