

Teorema kompaktnosti

Def: Ako je L neki jezik, tada pod teorijom tog jezika podrazumevamo svaki skup formula tog jezika (koje doživljavamo kao aksiome). Za teoriju kažemo da je konzistentna ako ne izvodi kontradikciju.

(teorije koje nisu konzistentne izvede bilo koju formulu jer iz netacnog sledi bilo šta)

Gedelova teorema potpunosti: Ako je T teorija prvog reda, tada $\underbrace{T \vdash \varphi}_{\text{Sintaksa}}$ ako $\underbrace{T \models \varphi}_{\text{semantika}}$

Specijalno, $T \vdash \perp$ ako $\underbrace{T \models \perp}_{\text{ne postoji model teorije } T}$

Ekvivalentno $\underbrace{T \nvdash \perp}_{\text{teorija } T \text{ ne dokazuje kontradikciju}}$ ako $\underbrace{T \not\models \perp}_{\text{postoji model teorije } T}$

U jeziku 2. reda (dozvoljena kvantifikacija i nad podskupovima univerzuma diskursa, pa samim tim i kvantifikacija relacija i funkcija) ne važi Gedelova teorema potpunosti (postoji teorija koja ne dokazuje $\perp$, ali nema model)

Teorema kompaktnosti: Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$ (jezik prvog reda), tada T ima model akko svaka konačna podteorija od T ima model.

dokaz: T ima model akko

$T \not\vdash \perp$, što je po Godelovoj teoremi potpunosti ekvivalentno sa

$T \not\vdash \perp$, ali svaki dokaz je konačan, pa i koristimo konačno mnogo aksioma iz T

akko konačna podteorija od T ne izводи kontradikciju. Po Godelovoj teoremi potpunosti, ovo je ekvivalentno sa uslovom da svaka konačna podteorija od T ima model.

Napomena: U teoriji 2. reda ne važi ova verzija kompaktnosti, ali važe neke slabije verzije.

Def: Neka je T teorija i C skup modela. Teorija T aksiomatizuje C ako je za svaki model $M \in C$ ispunjeno $M \models T$ i ništa van C nije model za T .

Primer: Peanove aksiome za $\mathbb{N}$

$$\mathcal{L} = \{0, =, s, +, \cdot\}$$

numeral n definiše kao $s(s(\dots(s(0))))$

↑
skraćenje za term

n puta

Kvantifikacija jedino nad elementima univerzuma

$$\left\{ \begin{array}{ll} (N1) & 0 \neq s(x) \\ (N2) & s(x_1) = s(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (s \text{ je "1-1" funkcija}) \\ (N3) & x + 0 = x \\ (N4) & x_1 + s(x_2) = s(x_1 + x_2) \\ (N5) & x \cdot 0 = 0 \\ (N6) & x_1 \cdot s(x_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \end{array} \right.$$

$$(N7): (\forall A \subseteq \mathbb{N}) \left[\left(0 \in A \wedge (\forall n) (n \in A \Rightarrow s(n) \in A) \right) \Rightarrow A = \mathbb{N} \right]$$

↑
u jeziku

baza
indukcije

korak
indukcije

2. reda

Ako želimo da ostanemo u jeziku 1. reda, uzimamo slabiju varijantu

$$(N\exists') : [\varphi(0) \wedge (\forall n) (\varphi(n) \Rightarrow \varphi(s(n)))] \Rightarrow (\forall n) \varphi(n)$$

↑
 φ je proizvoljna formula sa jednom slobodnom promenljivom

Ovo više nije aksioma, već shema jer formula φ može biti bilo šta.

Međutim, više model ove teorije nije jedinstven (postoje i neki neprebrojivi modeli)

Teorema (Levenhajm - Skolem): Ako teorija T prvog reda ima model neke beskonačne kardinalnosti, tada teorija T ima model proizvoljne beskonačne kardinalnosti.

1. Kažemo da je grupa torziona ako su svi njeni elementi konačnog reda. Dokazati da klasa $\mathcal{K}$ torzionih grupa nije aksiomatizabilna.

Pretpostavimo suprotno, da takva teorija T postoji. Posmatrajmo proširenje jezika $\mathcal{L}$ na kom je zadata teorija T :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$$

↑
novi simbol konstante

i proširenje teorije T :

$$T' = T \cup \{c^n \neq e \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

Po teoremi kompaktnosti, T' ima model ako svaka konačna podteorija od T' ima model.

U toj konačnoj podteoriji pojavljuje se samo konačno mnogo relacija

oblika $c^{n_i} \neq e$ za $i \in \{1, \dots, k\}$

Uzmimo $N > \max \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$

$$M = (\mathbb{Z}_N, +_N, 0_N, c^M = 1)$$

↑
generator grupe $\mathbb{Z}_N$

jesto jedan
model konačne
podteorije koju
razmatramo

Po teoremi kompaktnosti, T' ima model $\models$
Svaki model od T' je i model od T , pa i torziorna
grupa. Ali ta grupa sadrži c koji je beskonačnog
reda.

Pretpostavka nije dobra $\Rightarrow T$ ne postoji

2. Dokazati da klasa cikličkih grupa (generisane jednim
elementom) nije aksiomatizabilna.

Pretpostavimo suprotno da postoji teorija T koja
aksiomatizuje ovu klasu na jeziku $\mathcal{L}$.

Svaka ciklička grupa je najviše prebrojiva.

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\} \quad T' = T \cup \{c_r \neq c_s \mid r \neq s\}$$

↑
novi konstantni
simbol

Ako uzmemo neku konačnu podteoriju od T' , tada
se u njoj može pojavljivati samo konačno
mnogo ovih simbola c :

Neka su to $c_{r_1}, c_{r_2}, \dots, c_{r_k}$

Da bismo našli model za ovu konačnu podteoriju,
dovoljno je naći cikličku grupu sa bar k različitih
elemenata ($\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_{k+1}, \dots, \mathbb{Z}$ su modeli)

Samim tim, svaka konačna podteorija od T' ima
model $\Rightarrow T'$ ima model po teoremi kompaktnosti.

Međutim, taj model bi bio model i za T , pa i ciklička
grupa, ali sa neprebrojivo mnogo različitih elemenata,
što ne postoji.

Def: Za ^{konzistentnu} teoriju T jezika $\mathcal{L}$ (prvog reda) kažemo da je kompletna (potpuna) ako za svaku formulu φ na jeziku $\mathcal{L}$ važi $T \vdash \varphi$ ili $T \vdash \neg \varphi$.

(Ako je teorija nekonzistentna, ona je svakako kompletna, pa neki autori isključuju ovu mogućnost)

3. Ako teorija T nema konačno modele i ako su svi modeli neke beskonačne kardinalnosti međusobno izomorfni, tada je T kompletna.

Pretpostavimo suprotno, tj. da T nije kompletna, odnosno da postoji formula φ takva da

Po Godelovoj teoremi potpunosti, ovo znači

$T \not\vdash \varphi$
 $\uparrow$
 u nekim modelima
 od T važi $\neg \varphi$

$T \not\vdash \neg \varphi$
 $\uparrow$
 u nekim modelima
 od T važi φ

$T \cup \{\neg \varphi\}$
 ima model
 $T \cup \{\neg \varphi\} \neq \perp$
 ovi modeli
 su modeli za T

$T \cup \{\varphi\}$
 ima model
 $T \cup \{\varphi\} \neq \perp$
 ovi modeli
 su modeli
 za T

Ovi modeli su
 beskonačne kardinalnosti

$T \cup \{\neg \varphi\}$ i $T \cup \{\varphi\}$ imaju modele beskonačne kardinalnosti. Po Levenhajm-Skolemovoju teoremi, ove dve teorije imaju modele proizvoljne beskonačne kardinalnosti, pa i kardinalnosti λ . Ovi modeli su modeli i za teoriju T , a svi modeli za T koji su kardinalnosti λ su međusobno izomorfni, pa ne može u nekom da važi φ , a u nekom $\neg \varphi$.

Def: Ako je M neki model teorije T na jeziku L , tada pod $Th(M)$ podrazumevamo skup svih rečenica jezika L koje su u M tačne.

4. Posmatrajmo model $(\mathbb{N}, <) = N$ i $Th(N)$.

Dokazati da postoji model M takav da je $Th(M) \supseteq Th(N)$ koji ima beskonačni opadajući lanac.

$L = \{<\}$ jezik na kom je zadat $Th(N)$
 $L' = \{<\} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

↑
 novi konstantni
 simboli

$$T' = Th(N) \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dokazujemo da T' ima model:

Po teoremi kompaktnosti, dovoljno je dokazati da svaki konačan podskup od T' ima model.

U toj konačnoj podteoriji se pojavljuju konačno mnogo c -ova (neka ih ima k i neka su to

$c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_k}$ gde je $n_1 < n_2 < \dots < n_k$)

$$A = (\mathbb{N}, <, c_{n_1}^A = k, c_{n_2}^A = k-1, \dots, c_{n_k}^A = 1)$$

↑
 standardna
 relacija

$$\begin{array}{ccccccc} c_{n_k} & < & c_{n_{k-1}} & < & \dots & < & c_{n_2} & < & c_{n_1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1 & & 2 & & \dots & & k \end{array}$$

$\Rightarrow A$ je model za ovu konačnu podteoriju

$\Rightarrow T'$ ima model
 teorema kompaktnosti

$$T' = Th(N) \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

T' model i za $Th(N)$ koji ima beskonačni opadajući lanac.