

Правила природне дедукције

Аксиома $\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} (\text{ax})$

Слабљење $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi} (\text{slab})$

Увођење и елиминација конјункције

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} (\wedge_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} (\wedge_E^L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\wedge_E^D)$$

Увођење и елиминација дисјункције

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} (\vee_U^L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} (\vee_U^D)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} (\vee_E)$$

Увођење и елиминација импликације

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi} (\Rightarrow_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\Rightarrow_E)$$

Увођење и елиминација еквиваленције

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi} (\Leftrightarrow_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi} (\Leftrightarrow_E^{LD})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi} (\Leftrightarrow_E^{DL})$$

Увођење и елиминација негације

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} (\neg_U)$$

$$\frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} (\neg_E)$$

Увођење и елиминација контрадикције

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \neg \varphi}{\Gamma \vdash \perp} (\perp_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} (\perp_E)$$

Увођење и елиминација универзалног квантификатора

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad x \text{ није слободна у } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x \varphi} (\forall_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[x/t]} (\forall_E)$$

Увођење и елиминација егзистенцијалног квантификатора

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[x/t]}{\Gamma \vdash \exists x \varphi} (\exists_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi \quad x \text{ није слободна у } \Gamma, \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\exists_E)$$

Увођење и елиминација једнакости

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} (=U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[x/t] \quad \Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash \varphi[x/s]} (=E)$$

2 Основне леме

Увођење и елиминација двоструке негације

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi} (\neg\neg I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi} (\neg\neg E)$$

Модус толенис

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\varphi} (MT)$$

Дисјунктивни силогизми

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \psi} (DS^L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \varphi} (DS^D)$$

Контрапозиција

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi} (KP)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \Rightarrow \neg\psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi} (KP)$$

Транзитивност импликације

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \theta} (\Rightarrow_t)$$

Tertium non datur (Принцип искључења трећег)

$$\overline{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi} (TND)$$

Де Морганови закони

$$\frac{\Gamma \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi} (DM)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg(\varphi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi} (DM)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)} (DM)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg(\varphi \vee \psi)} (DM)$$

Симетричност и транзитивност једнакости

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash s = t} (=s)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash s = r}{\Gamma \vdash t = r} (=t)$$

Де Морганови закони за квантификаторе

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \neg\varphi} (DM)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\forall x \varphi}{\Gamma \vdash \exists x \neg\varphi} (DM)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\exists x \varphi} (DM)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\forall x \varphi} (DM)$$