



Универзитет у Београду
Математички факултет
Катедра за вероватноћу и статистику



ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ И ПРИМЕНЕ У ФИНАНСИЈАМА

ЈУН 1 - 15. септембар 2025. године

др Јелена Јоцковић
Стефан Малбашић

1. [8 поена] Временска серија `nottem` садржи месечне податке о просечној температури ваздуха у Нотингемском замку од јануара 1920. до децембра 1939. године.
- (а) Одредити декомпозицију временске серије и оценити тренд. Да ли податке боље описује адитивни или мултипликативни модел? Одговор образложити.
 - (б) Укратко објаснити како функционише метода покретних просека за изравнавања серије.
 - (в) Имплементирати у R-у функцију за оцењивање тренда методом покретних просека и резултате упоредити са онима које враћа функција `decompose`.

2. [8 поена] Дат је процес $\{x_t\}$ за који важи $x_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2}$, где је $\{w_t\}$ Гаусов бели шум.
- (а) Одредити теоријску аутоковаријациону (γ_k) и аутокорељациону функцију (ρ_k).
 - (б) Ако су узорачке корелације $\hat{\rho}(1) = 0.55$ и $\hat{\rho}(2) = 0.20$, одредити вредност параметара (θ_1, θ_2) и испитати инвертибилност добијеног процеса.
 - (в) Нека је $\{y_t\}$ стационарна временска серија са очекивањем $E(y_t) = \mu$, дисперзијом $D(y_t) = \sigma^2$ и аутокорељационом функцијом $Cor(y_t, y_{t+k}) = \rho_k$. Ако је $\bar{y}$ узорачка средина, доказати да је

$$D(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \rho_k \right].$$

3. [10 поена] Дати су процеси

$$\begin{aligned}(1 - 1.2L + 0.35L^2)x_t &= (1 - 0.4L)w_t, \\ (1 - L)(1 - L^{12})y_t &= (1 + 0.5L)(1 + 0.6L^{12})w_t, \\ z_t &= \nabla \nabla_{12} y_t = (1 - L)(1 - L^{12})y_t,\end{aligned}$$

где је $\{w_t\}$ Гаусов бели шум са дисперзијом 1 и L оператор кашњења.

- (а) Графички приказати серије $\{x_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$, $\{y_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$ и $\{z_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$.
 - (б) Идентификовати модел процеса $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ и $\{z_t\}$, а затим испитати њихову инвертибилност и стационарност.
 - (в) Графички приказати **ACF** и **PACF** датих процеса, а затим интерпретирати добијене оцене коефицијената модела.
4. [6 поена] У бази `gas` (пакет `astsa`) се налазе подаци о цени бензина недељно од 2000. године
- (а) Уклопити серију у линеарни модел са трендом који је линеарна функција времена и са адитивном сезонском индикаторском случајном променљивом.
 - (б) Користећи модел из дела (а) предвидети колика ће бити цена бензина током 2010. и 2011. године.
 - (в) Посматрати резидуале линеарног модела из дела (а) и на основу изгледа **ACF** и **PACF** уклопити их у неки **ARMA** модел. Одговор образложити.

5. [10 поена] Временска серија `unemp` (пакет `astsa`) садржи подакте о незапослености у САД месечно од јануара 1948. године до децембра 1978. године.

(а) Уклопити дату серију у најбољи сезонски $\text{ARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ модел. Детаљно образложити одабир модела. (Напомена: Као решење се не признаје позив функције `auto.arima`)

(б) Испитати независност и нормалност резидуала за одабрани модел.

(в) Извршити предвиђање на основу одабраног модела за период од наредне четири године.

6. [8 поена] У бази података `stockmarket.txt` налазе се берзански подаци за 7 градова у периоду од 6. јануара 1986. до 31. децембра 1997. године. Посматрајмо податке за град Лондон.

(а) Трансформисати оригиналне цене у логаритамске приносе r_t дате са

$$r_t = 100 \cdot \ln \frac{P_t}{P_{t-1}},$$

где је P_t одговарајући берзански податак за тренутак t .

(б) Уклопити временску серију $\{r_t\}$ у следеће моделе и одабрати најбољи: $\text{ARIMA}(0, 0, 0)$, $\text{ARIMA}(1, 0, 0)$, $\text{ARIMA}(0, 0, 1)$, $\text{ARIMA}(1, 0, 1)$, $\text{SARIMA}(1, 0, 0)(1, 0, 0)_{12}$. Приказати графички корелограм серије резидула и корелограм серије квадрата резидуала одабраног модела. Да ли је серија резидуала хетероскедастична? Зашто?

(б) Написати једначине $\text{GARCH}(p, q)$ модела. За моделирање каквих серија се он користи?

(в) Серију резидуала уклопити у следеће моделе и одабрати најбољи: $\text{GARCH}(1, 0)$, $\text{GARCH}(2, 1)$, $\text{GARCH}(1, 1)$, $\text{GARCH}(0, 2)$. Одредити интервале поверења за параметре одабраног модела.