



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЈ)

ЈАНУАР 2 - 23. август 2025. године

1. На усменом испиту из Вероватноће и статистике А, свака од 10 испитних цедуља садржи по 3 питања која се не понављају. Да би положио испит студент мора да одговори или на сва 3 питања са цедуље коју прву извуче или на 2 питања са цедуље коју прву извуче и на треће питање са цедуље коју другу извуче. Ако сваки студент зна одговор на 20 питања, одредити број студената који треба да полажу испит да би са вероватноћом 0.9 положило бар њих 35.
2. У портфолију банке постоји укупно b кредитних захтева за младе. Тачно a захтева има бар један недостајући документ и сматрају се некомплетним. Синиша на случајан начин проверава захтеве без враћања, један по један, све док не идентификује укупно m ($m \leq a$) некомплетних захтева. Нека је X укупан број прегледаних захтева до тог тренутка. Одредити математичко очекивање случајне величине X .
3. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(2)$ расподелу, а случајна величина Y има расподелу за чију густину $f_Y(y)$ важи да је $f_Y(y) = 2(1 - y)$, $y \in (0, 1)$. Ако су X и Y независне и ако је $Z = 2X + 2025Y + 1$, одредити функцију расподеле случајне величине Z .

Решења задатака

1. Дефинишимо случајне догађаје:

- A - студент зна одговор на прво питање са прве цедуље,
- B - студент зна одговор на друго питање са прве цедуље,
- C - студент зна одговор на треће питање са прве цедуље,
- D - студент зна одговор на треће питање са друге цедуље,
- E - студент је положио испит.

Приметимо да се догађај E може представити као унија дисјунктних догађаја ABC , $\bar{A}BCD$, $A\bar{B}CD$, $AB\bar{C}D$, па важи

$$\begin{aligned} P(E) &= P(ABC \cup \bar{A}BCD \cup A\bar{B}CD \cup AB\bar{C}D) \\ &= P(ABC) + P(\bar{A}BCD) + P(A\bar{B}CD) + P(AB\bar{C}D) \\ &= P(A)P(B|A)P(C|AB) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})P(C|\bar{A}B)P(D|\bar{A}BC) \\ &\quad + P(A)P(\bar{B}|A)P(C|A\bar{B})P(D|A\bar{B}C) + P(A)P(B|A)P(\bar{C}|AB)P(D|AB\bar{C}) \\ &= \frac{20}{30} \frac{19}{29} \frac{18}{28} + \frac{10}{30} \frac{20}{29} \frac{19}{28} \frac{18}{27} + \frac{20}{30} \frac{10}{29} \frac{19}{28} \frac{18}{27} + \frac{20}{30} \frac{19}{29} \frac{10}{28} \frac{18}{27} \\ &= \frac{361}{609} \approx 0.59. \end{aligned}$$

Нека је I_i случајна променљива која описује да ли је i -ти студент положио испит или не, $i = 1, 2, \dots, n$. Случајна променљива $S_n = \sum_{i=1}^n I_i$ представља број студената који су положили испит. Јасно, S_n има биномну $\mathcal{B}(n, 0.59)$ расподелу.

Одредимо $n \in \mathbb{N}$ из услова да је $P\{S_n \geq 35\} = 0.9$. Пошто је n довољно велико, $np = 0.59n \geq 0.59 \cdot 35 = 20.65 > 10$ и $n(1-p) = 0.41n \geq 0.41 \cdot 35 = 14.35 > 10$, можемо извршити апроксимацију нормалном $\mathcal{N}(0.59n, 0.24n)$ расподелом.

$$P\{S_n \geq 35\} = 1 - P\{S_n < 35\} = 1 - P\{S_n \leq 34\} = 0.9 \implies P\{S_n \leq 34\} = 0.1$$

Сада је

$$\begin{aligned} P\{S_n \leq 34\} &= P\{0 \leq S_n \leq 34\} \approx P\left\{\frac{-0.5 - 0.59n}{\sqrt{0.24n}} \leq \frac{Y - 0.59n}{\sqrt{0.24n}} \leq \frac{34.5 - 0.59n}{\sqrt{0.24n}}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{34.5 - 0.59n}{\sqrt{0.24n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5 - 0.59n}{\sqrt{0.24n}}\right) = 0.1, \end{aligned}$$

где је Y случајна величина која има нормалну $\mathcal{N}(0.59n, 0.24n)$ расподелу.

Пошто је $n \geq 35$, то је

$$\frac{-0.5 - 0.59n}{\sqrt{0.24n}} \leq -7.29 \implies \Phi\left(\frac{-0.5 - 0.59n}{\sqrt{0.24n}}\right) \approx 0.$$

Према томе,

$$\Phi\left(\frac{34.5 - 0.59n}{\sqrt{0.24n}}\right) = 0.1 \implies \frac{34.5 - 0.59n}{\sqrt{0.24n}} = \Phi^{-1}(0.1) = -1.28,$$

те је

$$0.59n - 1.28\sqrt{0.24n}\sqrt{n} - 34.5 = 0,$$

одакле, решавањем квадратне једначине и елиминисањем негативног решења добијамо да је $\sqrt{n} = 8.1967$, па је $n = 67.19$. Дакле, потребно је да најмање 68 студената изађе на испит да би са вероватноћом 0.9 бар 35 студената положило.

Напомена: Вероватноћу да студент положи испит можемо добити и као

$$p = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}} + \frac{\binom{20}{2}\binom{10}{1}}{\binom{30}{3}} \cdot \frac{\binom{18}{1}}{\binom{27}{1}} = \frac{361}{609} \approx 0.59.$$

2. Синиша у првих $k - 1$ прегледаних захтева налази тачно $m - 1$ некомплетних и $k - m$ са комплетном документацијом, док је k -ти некомплетан (распоред свих b кредитних захтева у низ). За $k \in \{m, m + 1, \dots, m + (b - a)\}$ следи да је

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{k-1}{m-1} \binom{b-k}{a-m}}{\binom{b}{a}},$$

Одредимо математичко очекивање случајне величине X . Имамо да је

$$E[X] = \sum_{k=m}^{b-a+m} k P\{X = k\} = \frac{1}{\binom{b}{a}} \sum_{k=m}^{b-a+m} k \binom{k-1}{m-1} \binom{b-k}{a-m}.$$

Користимо познати идентитет $\frac{k}{m} \binom{k-1}{m-1} = \binom{k}{m}$:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{m}{\binom{b}{a}} \sum_{k=m}^{b-a+m} \binom{k}{m} \binom{b-k}{a-m} = \frac{m}{\binom{b}{a}} \sum_{r=m+1}^{b-a+m+1} \binom{r-1}{m} \binom{b+1-k}{a-m} \\ &= \frac{m}{\binom{b}{a}} \binom{b+1}{a+1} \sum_{r=m+1}^{(b+1)-(a+1)+(m+1)} \frac{\binom{r-1}{m} \binom{(b+1)-k}{(a+1)-(m+1)}}{\binom{b+1}{a+1}} \\ &= \frac{m}{\binom{b}{a}} \binom{b+1}{a+1} = \frac{m(b+1)}{a+1}, \end{aligned}$$

јер је последња сума једнака 1 као сума вероватноћа из закона расподеле случајне величине X за скуп параметара $(b + 1, a + 1, m + 1)$.

Напомена: Закон расподеле случајне величине X можемо одредити и на следећи начин. Како Синиша проверава захтеве без враћања, један по један, то бројањем по секвенцама извлачења, дужине k , имамо следеће:

- на првих $k - 1$ места треба распоредити тачно $m - 1$ некомплетних захтева, а на k -том месту је m -ти некомплетан захтев. Број начина на које Синиша то може учинити је

$$\binom{k-1}{m-1}.$$

- за сваки фиксиран редослед захтева важи: у првих k извлачења, извући ће тачно m некомплетних захтева, док у првих $k - 1$ извлачења имао тачно $k - m$ комплетних; сваким извлачењем укупан број кредитних захтева, број комплетних и некомплетних, смањује се за 1, па је вероватноћа сваке фиксне секвенце дужине k једнака

$$\frac{a \cdot (a - 1) \dots (a - m + 1) \cdot (b - a) \cdot (b - a - 1) \dots (b - a - (k - m) + 1)}{b \cdot (b - 1) \dots (b - k + 1)} = \frac{(a)_m (b - a)_{k-m}}{(b)_k},$$

где је $(x)_r = x(x - 1) \dots (x - r + 1) = r! \binom{x}{r}$.

Одавде следи да је

$$P\{X = k\} = \binom{k-1}{m-1} \frac{(a)_m (b - a)_{k-m}}{(b)_k} = \binom{k-1}{m-1} \frac{m! \binom{a}{m} (k - m)! \binom{b-a}{k-m}}{k! \binom{b}{k}} = \frac{\binom{a}{m} \binom{b-a}{k-m} \binom{k-1}{m-1}}{\binom{b}{k} \binom{k}{m}},$$

за $k \in \{m, m + 1, \dots, m + (b - a)\}$.

Даље, приметимо да због симетрије биномних коефицијената важи да је:

$$\begin{aligned}\frac{\binom{a}{m}\binom{b-a}{k-m}\binom{k-1}{m-1}}{\binom{b}{k}\binom{k}{m}} &= \frac{m}{k} \frac{\binom{a}{m}\binom{b-a}{k-m}}{\binom{b}{k}} = \frac{m}{k} \frac{\frac{a!}{m!(a-m)!} \frac{(b-a)!}{(k-m)!(b-a-k+m)!}}{\frac{b!}{k!(b-k)!}} \\ &= \frac{m}{k} \frac{\frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{(b-k)!}{(a-m)!(b-k-a+m)!}}{\frac{b!}{a!(b-a)!}} = \frac{m}{k} \frac{\binom{k}{m}\binom{b-k}{a-m}}{\binom{b}{a}} \\ &= \frac{m}{k} \frac{\frac{k}{m} \binom{k-1}{m-1} \binom{b-k}{a-m}}{\binom{b}{a}} = \frac{\binom{k-1}{m-1} \binom{b-k}{a-m}}{\binom{b}{a}}. \quad \square\end{aligned}$$

3. Пошто $X \in \mathcal{E}(2)$, следи да је њена густина

$$f_X(x) = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0,$$

а како су случајне величине X и Y независне, то је

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \quad x \geq 0, y \in (0,1).$$

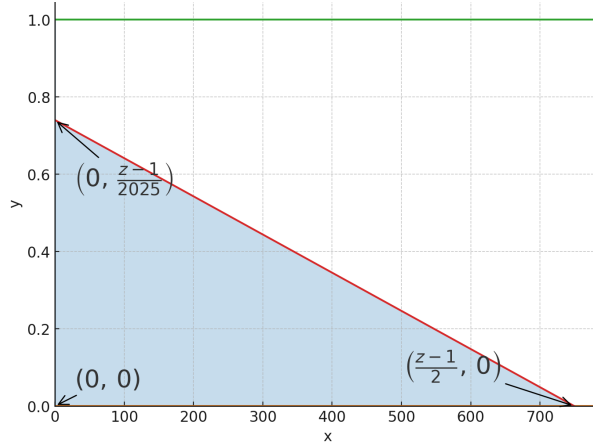
Треба да одредимо функцију расподеле случајне величине $Z = 2X + 2025Y + 1$ за $z \geq 1$, при чему је

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{2X + 2025Y + 1 \leq z\} = P\left\{Y \leq \frac{-2X + z - 1}{2025}\right\} = \iint_D f_{X,Y}(x,y) dx dy,$$

где је

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \in (0,1), y \leq \frac{-2x + z - 1}{2025} \right\}.$$

Из пресека са траком $0 < y < 1$ добијамо два геометријска случаја (прелом када права $2x + 2025y = z - 1$ додирне тачку $y = 1$, тј. на $z = 2026$):



(а) за $1 < z < 2026$ имамо да је

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= \int_0^{\frac{z-1}{2025}} \int_0^{\frac{z-1-2025y}{2}} 2e^{-2x} 2(1-y) dx dy = \int_0^{\frac{z-1}{2025}} 2(1-y) \left(1 - e^{-(z-1-2025y)}\right) dy \\ &= \underbrace{\int_0^a 2(1-y) dy}_{=2a-a^2} - 2e^{-(z-1)} \underbrace{\int_0^a (1-y)e^{ky} dy}_{=:J(a)},\end{aligned}$$

где је $a = \frac{z-1}{2025}$ и $k = 2025$. За $J(a)$ важи

$$\int e^{ky} dy = \frac{1}{k} e^{ky}, \quad \int y e^{ky} dy = e^{ky} \left(\frac{y}{k} - \frac{1}{k^2} \right),$$

па следи да је

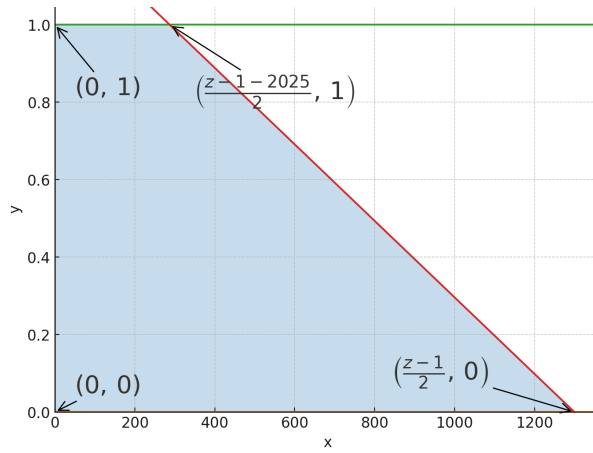
$$J(a) = \left[e^{ky} \left(\frac{1-y}{k} + \frac{1}{k^2} \right) \right]_0^a = \left(\frac{1-a}{k} + \frac{1}{k^2} \right) e^{ka} - \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right),$$

одакле добијамо да је

$$F_Z(z) = 2a - a^2 - 2 \left(\frac{1-a}{k} + \frac{1}{k^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right) e^{-(z-1)}.$$

Сређивањем горњег израза важи

$$F_Z(z) = \frac{4052(z-2 + e^{-(z-1)}) - (z-1)^2}{2025^2}, \quad 1 < z < 2026.$$



(б) за $z \geq 2026$ имамо да је

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^1 2(1-y) \left(1 - e^{-(z-1-2025y)} \right) dy \\ &= 1 - 2e^{-(z-1)} \int_0^1 (1-y) e^{2025y} dy. \end{aligned}$$

Даље,

$$\int_0^1 (1-y) e^{2025y} dy = \left[e^{2025y} \left(\frac{1-y}{2025} + \frac{1}{2025^2} \right) \right]_0^1 = \frac{e^{2025} - 1}{2025^2} - \frac{1}{2025},$$

одакле важи

$$F_Z(z) = 1 - \frac{2e^{2025} - 4052}{2025^2} e^{-(z-1)}, \quad z \geq 2026.$$

Дакле, функција расподеле случајне величине Z дата је са

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 1, \\ \frac{4052(z-2 + e^{-(z-1)}) - (z-1)^2}{2025^2}, & 1 < z < 2026, \\ 1 - \frac{2e^{2025} - 4052}{2025^2} e^{-(z-1)}, & z \geq 2026. \end{cases}$$