



Универзитет у Београду
Математички факултет

БЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ)

11. јануар 2024. године

1. На столу су правилни октаедар, додекаедар и икосаедар. Сваком од њих странице су нумерисане бројевима од 1 до m , где је m број страница које тај полиедар има. На столу су и три новчића за које су вероватноће добијања писма при бацању, редом, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и 1. Михајло на случајан начин бира новчић са стола, баца га и уочава да ли је добијено писмо или глава. Ако је при бацању новчића добијено писмо, Михајло баца октаедар и икосаедар, а ако је добијена глава, додекаедар и икосаедар. Уколико се, при бацањима тих полиедара, производ добијених бројева завршава цифром нула, он добија један поен, а иначе добија нула поена, и тај број поена записује на папир. Цео поступак понавља 10 пута. Израчунати очекивани број добијених поена, као и очекивани број промена броја који је Михајло записао у односу на претходно записани број.
2. Случајна величина X има нормалну $\mathcal{N}(0, 1)$ расподелу. Ако је $Y = X^{2023}$, одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y .
3. Случајна величина X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. За случајну величину Y при услову $X = x$ важи да је

$$P\{Y = y \mid X = x\} = \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!} e^{-\lambda}, \quad y \in \{x, x+1, \dots\}.$$

Одредити расподелу случајне величине X при услову $Y = y$.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ) - Писмени испит 11. јануар 2024.

Решења задатака

1. Означимо са A догађај да при једном бацању два правилна полиедра Михајло региструје да се производ палих бројева завршава цифром нула и тако освоји један поен. Дефинишимо следеће догађаје:

- C_i догађај да је одабрано новчић c_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, за које су вероватноће добијања писма при бацању, редом, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и 1,
- Π и Γ догађај да је на новчићу пало писмо или глава, редом.

Вероватноћу догађаја A можемо одредити користећи потпун систем догађаја:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C_1 \Pi A) + P(C_1 \Gamma A) + P(C_2 \Pi A) + P(C_2 \Gamma A) + P(C_3 \Pi A) + P(C_3 \Gamma A) \\ &= P(C_1)P(\Pi|C_1)P(A|C_1 \Pi) + P(C_1)P(\Gamma|C_1)P(A|C_1 \Gamma) \\ &\quad + P(C_2)P(\Pi|C_2)P(A|C_2 \Pi) + P(C_2)P(\Gamma|C_2)P(A|C_2 \Gamma) \\ &\quad + P(C_3)P(\Pi|C_3)P(A|C_3 \Pi) + P(C_3)P(\Gamma|C_3)P(A|C_3 \Gamma) \\ &= P(A|C_1 \Pi) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + P(A|C_1 \Gamma) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 \right) \\ &= \frac{2}{3}P(A|C_1 \Pi) + \frac{1}{3}P(A|C_1 \Gamma). \end{aligned}$$

Даље, производ палих бројева се завршава цифром нула ако је производ дељив и са 2 и са 5. Дефинишимо зато нове догађаје:

- A_1 : пао је бар један паран број,
- A_2 : пао је бар један број дељив са 5.

Одавде следи да је:

$$\begin{aligned} P(A|C_i \Pi) &= P(A_1 \cap A_2|C_i \Pi) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c|C_i \Pi) = 1 - P(A_1^c|C_i \Pi) - P(A_2^c|C_i \Pi) + P(A_1^c \cap A_2^c|C_i \Pi) \\ &= 1 - \frac{4}{8} \cdot \frac{10}{20} - \frac{7}{8} \cdot \frac{16}{20} + \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{20} = \frac{1}{5}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A|C_i \Gamma) &= P(A_1 \cap A_2|C_i \Gamma) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c|C_i \Gamma) = 1 - P(A_1^c|C_i \Gamma) - P(A_2^c|C_i \Gamma) + P(A_1^c \cap A_2^c|C_i \Gamma) \\ &= 1 - \frac{6}{12} \cdot \frac{10}{20} - \frac{10}{12} \cdot \frac{16}{20} + \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{20} = \frac{1}{4}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

па је коначно

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{60} \approx 0.21667.$$

Ако случајна величина X представља број добијених поена у 10 бацања, тада X има Биномну $\mathcal{B}(10, 0.22)$ расподелу, па је очекивани број бонус поена које ће Михајло освојити једнак $10 \cdot 0.22 = 2.2$.

Нека је Y_i резултат i -тог бацања полиедара, $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Тада $Y_i \in \text{Ber}(0.22)$ и

$$Y = \sum_{i=1}^9 |Y_{i+1} - Y_i|$$

је број промена броја који Михајло записује на папир у односу на претходно записани број. Даље,

$$|Y_{i+1} - Y_i| : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.22^2 + 0.78^2 & 2 \cdot 0.22 \cdot 0.78 \end{pmatrix}$$

па је очекивани број промена једнак

$$EY = \sum_{i=1}^9 E|Y_{i+1} - Y_i| = \sum_{i=1}^9 2 \cdot 0.22 \cdot 0.78 = 3.0888$$

2. По дефиницији, имамо да је коефицијент корелације дат са

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}},$$

одакле због $Y = X^{2023}$ и $X \in \mathcal{N}(0, 1)$ добијамо

$$\rho_{XY} = \frac{E(X^{2024}) - E(X)E(X^{2023})}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X^{2023})}} = \frac{E(X^{2024})}{\sqrt{D(X^{2023})}} = \frac{E(X^{2024})}{\sqrt{E(X^{2 \cdot 2023}) - (EX^{2023})^2}}.$$

Одредимо сада n -ти моменат

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Разликујемо два случаја:

- ако је $n = 2k + 1$: $E(X^{2k+1}) = 0$, јер је у питању непарна функција и интеграл на полу-домену конвергира. Заиста, $\int_0^\infty x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^\infty (2u)^k e^{-u} du = 2^k \Gamma(k+1) < +\infty$.
- ако је $n = 2k$:

$$\begin{aligned} E(X^{2k}) &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| \frac{\frac{x^2}{2} = u}{dx = \frac{du}{\sqrt{2u}}} \right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (2u)^k e^{-u} \frac{du}{\sqrt{2u}} \\ &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{k-\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2^k} (2k-1)!! = (2k-1)!!. \end{aligned}$$

Одавде следи да је

$$\rho_{XY} = \frac{E(X^{2024})}{\sqrt{E(X^{2 \cdot 2023}) - (EX^{2023})^2}} = \frac{2023!!}{\sqrt{(2 \cdot 2023 - 1)!!}}$$

3. Закон расподеле случајне величине X је дат са

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \mathbf{N}_0.$$

Закон расподеле случајне величине Y при услову $X = x$:

$$P\{Y = y | X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^{y-x} e^{-\lambda}}{(y-x)!}, & y \in \{x, x+1, x+2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закон расподеле случајног вектора (X, Y) :

$$P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y | X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda}, & x \in \mathbf{N}_0, y \in \{x, x+1, x+2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закон расподеле случајне величине Y за $y \in \mathbf{N}_0$ дат је са

$$\begin{aligned} P\{Y = y\} &= \sum_{x=0}^{\infty} P\{X = x, Y = y\} = \sum_{x=0}^y \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda} \\ &= \lambda^y e^{-2\lambda} \sum_{x=0}^y \frac{1}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{y!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^y \binom{y}{x} \\ &= \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^y \binom{y}{x} \cdot 1^x \cdot 1^{y-x} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} (1+1)^y \\ &= \frac{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}}{y!}. \end{aligned}$$

Дакле, случајна величина Y има Пуасонову $\mathcal{P}(2\lambda)$ расподелу.

Закон расподеле случајне величине X при услову $Y = y$ за $x \in \{0, 1, 2, \dots, y\}$ је

$$\begin{aligned} P\{X = x | Y = y\} &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}} \\ &= \frac{y!}{x!(y-x)!} \cdot \frac{\lambda^y}{(2\lambda)^y} = \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \\ &= \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x. \end{aligned}$$

Према томе, случајна величина X при услову $Y = y$ има биномну $\mathcal{B}(y, \frac{1}{2})$ расподелу.



БЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (ЗР)

11. јануар 2024. године

1. Тамара учествује на турниру преферанса. Турнир је организован на следећи начин: у првом колу се играју три партије и затим се на основу пласмана из првог кола пролази или не пролази у друго коло турнира, при чему се са три победе сигурно пролази у друго коло, са две победе се пролази у друго коло са вероватноћом $\frac{1}{2}$, са једном победом се пролази у друго коло са вероватноћом $\frac{1}{4}$, а без иједне победе се сигурно не пролази у друго коло. Вероватноћа да Тамара победи у једној партији првог кола је p , независно од исхода остале две партије.

(а) (5 поена) Са којом вероватноћом ће се Тамара пласирати у друго коло?

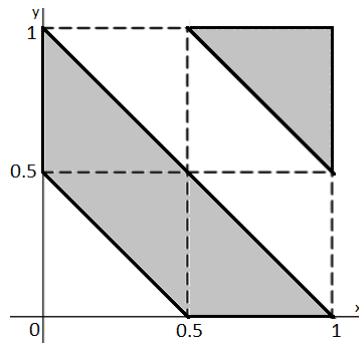
(б) (5 поена) Ако се Тамара није пласирала у друго коло, колико износи вероватноћа да је у првом колу имала 2 победе?

2. Ана баца две правилне коцке за игру. Нека случајна величина X представља број шестика, а случајна величина Y број јединица које су пале.

(а) (6 поена) Одредити расподелу случајног вектора (X, Y) , а затим испитати независност случајних величина X и Y .

(б) (4 поена) Одредити коефицијент корелације случајних величина X и Y .

3. Случајни вектор (X, Y) има равномерну расподелу на освенченој области.



(а) (4 поена) Одредити маргиналне расподеле случајних величина X и Y , а затим испитати њихову независност.

(б) (6 поена) Ако је $Z = |X - Y|$, одредити расподелу случајне величине Z .

4. Случајна величина X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. Случајна величина Y при услову $X = x$ има расподелу са законом

$$P\{Y = y | X = x\} = \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!} e^{-\lambda}, \quad x \in \mathbf{N}_0, y = x, x+1, x+2, \dots$$

(а) (7 поена) Одредити расподелу случајне величине Y .

(б) (3 поена) Одредити расподелу случајне величине X при услову $Y = y$.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р) - Писмени испит 11. јануар 2024.

Решења задатака

1. Дефинишимо следеће догађаје:

- A : Тамара се пласирала у друго кола турнира,
- $H_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$: Тамара је у првом колу остварила i победа,
- 1 и 0 представљају победу односно пораз у појединачној партији.

Тада вреди

$$\begin{aligned} P(H_0) &= P(\{0, 0, 0\}) = (1-p)^3, \\ P(H_1) &= P(\{0, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}) = 3p(1-p)^2, \\ P(H_2) &= P(\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}) = 3p^2(1-p), \\ P(H_3) &= P(\{1, 1, 1\}) = p^3. \end{aligned}$$

Даље, из текста задатка имамо да је

$$P(A|H_0) = 0, \quad P(A|H_1) = \frac{1}{4}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A|H_3) = 1.$$

(а) $\{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ је потпун систем догађаја па користећи формулу потпуне вероватноће добијамо:

$$P(A) = \sum_{i=0}^3 P(H_i)P(A|H_i) = \frac{3}{4}p(1-p)^2 + \frac{3}{2}p^2(1-p) + p^3.$$

(б) Користећи Бајесову формулу добијамо:

$$\begin{aligned} P(H_2|\bar{A}) &= \frac{P(H_2)P(\bar{A}|H_2)}{P(\bar{A})} = \frac{P(H_2)(1-P(A|H_2))}{1-P(A)} \\ &= \frac{3p^2(1-p)(1-\frac{1}{2})}{1-(\frac{3}{4}p(1-p)^2 + \frac{3}{2}p^2(1-p) + p^3)} \\ &= \frac{\frac{3}{2}p^2(1-p)}{1-\frac{3}{4}p(1-p)^2 - \frac{3}{2}p^2(1-p) - p^3} \\ &= \frac{6p^2}{p^2 + p + 4}. \end{aligned}$$

2. (а) Одредимо, у сврху илустрације, $P\{X = 1, Y = 1\}$. Посматрани догађај се догодио једино ако је на првој коцки пала шестлица, а на другој јединица, или обрнуто. Зато је,

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Слично одређујемо и остале комбинације и тако добијамо закон расподеле дводимензионог случајног вектора (X, Y) дат на следећи начин:

X/Y	0	1	2	$P\{X = \cdot\}$
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{5}{18}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$P\{Y = \cdot\}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

Одавде одмах добијамо и маргиналне расподеле:

$$X, Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Случајне величине X и Y нису независне јер је нпр.

$$P\{X = 1\}P\{Y = 2\} = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{36} \neq 0 = P\{X = 1, Y = 2\}.$$

- (б) Из дела под (а) добијамо да је $EX = EY = \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$, док је $E(XY) = \frac{1}{18}$, па закључујемо да је $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = -\frac{1}{18}$. Са друге стране, $E(X^2) = E(Y^2) = \frac{5}{18} + 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{7}{18}$, па је $DX = DY = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{5}{18}$. Одавде имамо да је трахени коефицијент корелације једнак

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = -\frac{1}{5}.$$

3. (а) Одредимо прво маргиналну расподелу случајне величине X .

- за $x \in (0, \frac{1}{2})$ имамо да је $f_X(x) = \int_{\frac{1}{2}-x}^{1-x} 2dy = 1$,
- за $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ имамо да је $f_X(x) = \int_0^{1-x} 2dy + \int_{\frac{3}{2}-x}^1 2dy = 1$.

Одавде закључујемо да X има униформну $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелу. Такође, због симетрије, исто важи и за случајну величину Y , тј. $Y \in \mathcal{U}(0, 1)$. Приметимо да случајне величине X и Y нису независне, јер је нпр.

$$P\left\{X < \frac{1}{4}, Y < \frac{1}{4}\right\} = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P\left\{X < \frac{1}{4}\right\} P\left\{Y < \frac{1}{4}\right\}.$$

- (б) Нека је $Z = |X - Y|$. Тада је функција расподеле случајне величине Z дата са:

- за $0 < z \leq \frac{1}{2}$ имамо да је

$$F_Z(z) = 2 \left(z\sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - z \right)^2 \right) = 2 \left(-z^2 \frac{1}{2} + z \right) = -z^2 + 2z.$$

- за $\frac{1}{2} < z < 1$ имамо да је

$$F_Z(z) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-z)^2}{2} \right) = -z^2 + 2z.$$

Дакле, функција расподеле случајне величине Z је

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ -z^2 + 2z, & z \in (0, 1), \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

4. (а) Закон расподеле случајне величине X је дат са

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \mathbf{N}_0.$$

Закон расподеле случајне величине Y при услову $X = x$:

$$P\{Y = y | X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^{y-x} e^{-\lambda}}{(y-x)!}, & y \in \{x, x+1, x+2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закон расподеле случајног вектора (X, Y) :

$$P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y | X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda}, & x \in \mathbf{N}_0, y \in \{x, x+1, x+2, \dots\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закон расподеле случајне величине Y за $y \in \mathbf{N}_0$ дат је са

$$\begin{aligned} P\{Y = y\} &= \sum_{x=0}^{\infty} P\{X = x, Y = y\} = \sum_{x=0}^y \frac{\lambda^y}{x!(y-x)!} e^{-2\lambda} \\ &= \lambda^y e^{-2\lambda} \sum_{x=0}^y \frac{1}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{y!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^y \binom{y}{x} \\ &= \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^y \binom{y}{x} \cdot 1^x \cdot 1^{y-x} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} (1+1)^y \\ &= \frac{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}}{y!}. \end{aligned}$$

Дакле, случајна величина Y има Пуасонову $\mathcal{P}(2\lambda)$ расподелу.

(б) Закон расподеле случајне величине X при услову $Y = y$ за $x \in \{0, 1, 2, \dots, y\}$ је

$$\begin{aligned} P\{X = x | Y = y\} &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{(2\lambda)^y e^{-2\lambda}} \\ &= \frac{y!}{x!(y-x)!} \cdot \frac{\lambda^y}{(2\lambda)^y} = \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y \\ &= \binom{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{y-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x. \end{aligned}$$

Према томе, случајна величина X при услову $Y = y$ има биномну $\mathcal{B}\left(y, \frac{1}{2}\right)$ расподелу.