

1. [12] Израчунати $\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(1+x) \cdot \ln x}{x^2} \right) dx$.
2. [6] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и нека су $p \in (0, 1)$ и $q \in (-\infty, 0)$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Нека су даље $f, g: X \rightarrow (0, +\infty)$ две $\mathfrak{M}$ -мерљиве функције такве да је $0 < \int_X g^p d\mu < +\infty$. Доказати да је тада

$$\int_X fg d\mu \geq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему $\mathfrak{M}$ Лебегова σ -алгебра, а μ Лебегова мера. Даље нека је низ функција $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисан са

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} \chi_{[0, n]}(x).$$

- а) [2] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ скоро свуда.
- б) [2] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у L^1 -норми.
- в) [2] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ по мери μ .
- г) [2] Наћи све $p \in [1, +\infty)$ за које $f_n \in L^p([0, +\infty))$ за све $n \in \mathbb{N}$.
- д) [2] Наћи све $p \in [1, +\infty)$ за које низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира у L^p -норми.
- ђ) [2] Наћи $\|f_n\|_\infty$ и испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у L^∞ .

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 135 минута.