

Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције - први колоквијум
30.5.2026.

1. Нека је дат скуп $X = \{1, 2, \dots, 2026\}$ и функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \left| \cos \frac{\pi x}{6} \right|.$$

- а) [3] Наћи минималну σ -алгебру $\mathfrak{M}$ над X такву да је функција f $\mathfrak{M}$ -мерљива. Колико $\mathfrak{M}$ има елемената?
б) [3] Доказати да је $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset, \\ \sum_{\substack{k \in E \\ 3|k}} k, & \text{иначе,} \end{cases}$$

једна мера на $(X, \mathfrak{M})$ и израчунати $\mu(X)$.

- в) [3] Да ли је μ комплетна мера? Ако није, описати комплетирање $(\overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mu})$.
г) [3] Испитати $\mathfrak{M}$ -мерљивост функција $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисаних са

$$g(x) = \cos \frac{\pi x}{6} \quad \text{и} \quad h(x) = \left| \sin \frac{\pi x}{6} \right|.$$

2. [3] Да ли постоји коначна мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ где је $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Борелова σ -алгебра таква да је $\mu(\{a\}) > 0$ за свако $a \in \mathbb{R}$?

Упутство: Уочити низ скупова $A_n = \{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{a\}) \geq \frac{1}{n}\}$.

3. а) [7] Израчунати $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}} \sin\left(ne^{-\frac{1}{x}}\right)}{1 + n^2 x} dx$.

б) [8] Израчунати $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{3n+1}}{\sin\left(\frac{x^{2n}}{n}\right)} dx$. Да ли низ функција $f_n(x) = \frac{x^{3n+1}}{\sin\left(\frac{x^{2n}}{n}\right)}$ има интеграбилну доминанту на $[0, 1]$?

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 135 минута.