

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 101) – писмени испит (Јун 2)
4.10.2025.

1. а) [9] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 1} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{3 \cdot n}}{\ln n}$.
б) [7] Да ли је низ $a_n = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 1} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{3 \cdot n}$ монотон?
в) [5] Да ли је низ (a_n) из претходног дела задатка ограничен?
2. [12] Одредити тачке нагомилавања низа $a_n = \cos \left(\frac{(2n^2 + 1)\pi}{3n} \right)$, као и $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
3. Дата је функција $f(x) = x - \sqrt[3]{x(x-4)^2}$.
а) [5] Одредити константе $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_1 \in \mathbb{R}$ такве да важи $f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$ и $f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x}$, $x \rightarrow -\infty$.
б) Испитати диференцијабилност функције f у тачкама 0 и 4.
в) [3] Решити неједначину $4 - 3x > -3\sqrt[3]{x^2(x-4)}$.
г) [16] Испитати ток и скицирати график функције f .
д) [3] Да ли једначина $|f(x)| = 5$ има решења?
4. Нека је низ $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ дат са $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.
а) [4] Доказати да је $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
б) [4] Доказати да је низ $\{I_n\}$ строго опадајући и да су му сви чланови позитивни.
в) [4] Доказати да је $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Чему је једнако $I_n + I_{n-2}$ за свако $n \geq 2$?
г) [4] Доказати да је $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ за свако $n \geq 2$.
д) [4] Одредити константу $c \in \mathbb{R}$ такву да важи $I_n \sim \frac{c}{n}$, кад $n \rightarrow \infty$.
ђ) [10] Испитати апсолутну и условну конвергенцију редова $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n \cos I_n$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.