

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 101) – први колоквијум (Јун 2)
4.10.2025.

1. а) [5] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 1} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{3 \cdot n}}{\ln n}$.
б) [4] Да ли је низ $a_n = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 1} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{3 \cdot n}$ монотон?
в) [3] Да ли је низ (a_n) из претходног дела задатка ограничен?
2. [7] Одредити тачке нагомилавања низа $a_n = \cos \left(\frac{(2n^2 + 1)\pi}{3n} \right)$, као и $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
3. Нека је функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} \cos x - 1}{x^2}, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{\sqrt[3]{x+4} + 2\sqrt{x} - 6}{x-4}, & x > 4. \end{cases}$$

- а) [10] Наћи реалне константе a и b такве да функција f буде непрекидна на $\mathbb{R}$.
 - б) [2] Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - в) [3] За вредности a и b из дела а) испитати равномерну непрекидност функције f на скупу $[0, +\infty)$.
4. Нека је функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 2} + 2x$.
 - а) [4] Израчунати $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - б) [4] Испитати монотоност функције f .
 - в) [4] Нека је $A = \left\{ f(x) \mid x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \right\}$. Наћи (ако постоје) $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ и $\min A$.
 - г) [4] Нека је $B = \left\{ \sin(f(x)) \mid x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \right\}$. Наћи (ако постоје) $\sup B$, $\inf B$, $\max B$ и $\min B$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.