

Uvod u finansijsku matematiku

Nikola Vučić

Napomena: Ukoliko nije drugačije naznačeno, godina ima 360 dana, a mesec 30 dana (komercijalni metod).

1 Prosto i složeno kamaćenje

Zadatak 1. Na štednju je uloženo 50 000 dinara uz prostu godišnju kamatnu stopu od 6%. Odrediti ukupnu kamatu i vrednost uloga nakon 3 godine.

Zadatak 2. Kolika je kamata na pozajmicu od 120 000 dinara na 90 dana uz prostu godišnju kamatnu stopu od 8%? Koliko treba vratiti na kraju perioda?

Zadatak 3. Iznos od 80 000 dinara uložen je na 5 godina uz složenu godišnju kamatnu stopu od 4,5% (godišnje ukamaćenje). Odrediti vrednost uloga na kraju perioda i ukupnu kamatu. Uporediti sa kamatom koja bi se dobila prostim kamaćenjem po istoj stopi.

Zadatak 4. Uloženo je 200 000 dinara, a nakon 4 godine isplaćeno je 262 000 dinara. Odrediti godišnju kamatnu stopu ako se

- (a) kamata prosto,
- (b) kamata složeno.

Zadatak 5. Za koliko godina će se uloženi iznos udvostručiti pri godišnjoj kamatnoj stopi od 5% ako se kamati

- (a) prosto,
- (b) složeno?

Zadatak 6. Neka je uloženo $K_0 = 100\,000$ dinara uz godišnju stopu $r = 10\%$. Popuniti tabelu vrednosti uloga za prosto i složeno kamaćenje nakon $t = \frac{1}{2}, 1, 2, 5, 10$ godina. Šta se uočava za $t < 1$, $t = 1$ i $t > 1$? Obrazložiti zašto je tako (npr. preko nejednakosti $(1+r)^t$ i $1+rt$).

Zadatak 7. (*) Dokazati da za $r > 0$ i $t > 1$ važi $(1+r)^t > 1+rt$, a za $0 < t < 1$ važi $(1+r)^t < 1+rt$.

2 Višestruko kamaćenje u toku godine

Zadatak 8. Banka obračunava kamatu *četiri puta godišnje* (kvartalno) po godišnjoj stopi r , pri čemu se u svakom periodu primenjuje stopa $r/4$.

- (a) Izračunati $(1 + \frac{r}{4})^4$ i uporediti sa $1 + r$ za $r = 12\%$.
- (b) Dokazati da je $(1 + \frac{r}{4})^4 > 1 + r$ za svako $r > 0$.
- (c) Koliko je veća krajnja vrednost uloga od 100 000 dinara nakon godinu dana u odnosu na godišnje ukamaćenje?

Zadatak 9. Posmatrajmo opšti slučaj: kamata se obračunava n puta godišnje po stopi r/n u svakom periodu.

- (a) Pokazati da je $a_n = (1 + \frac{r}{n})^n \geq 1 + r$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $r > 0$.
- (b) Šta se dešava sa vrednošću a_n kada n raste? Da li je niz ograničen?

Zadatak 10. Za $r = 8\%$ napraviti tabelu vrednosti $(1 + \frac{r}{n})^n$ za $n = 1, 2, 4, 12, 52, 365, 8760$ (godišnje, polugodišnje, kvartalno, mesečno, nedeljno, dnevno, na sat). Šta se primećuje?

Zadatak 11. Neprekidno ukamaćenje.

- (a) Odrediti vrednost uloga od 10 000 dinara nakon 5 godina uz stopu $r = 6\%$ ako se kamata obračunava neprekidno. Uporediti sa godišnjim i mesečnim ukamaćenjem.
- (b) Posle koliko godina će se uloženi iznos udvostručiti pri neprekidnom ukamaćenju sa stopom r ? Izračunati za $r = 5\%$ i uporediti sa rezultatom iz zadatka 5(b).

3 Nominalna i efektivna kamatna stopa

Definicija. *Nominalna* kamatna stopa r je godišnja stopa navedena u ugovoru, pri čemu se kamata obračunava m puta godišnje po stopi r/m . *Efektivna* godišnja kamatna stopa r_{ef} je ona godišnja stopa koja pri godišnjem ukamaćenju daje istu krajnju vrednost nakon godinu dana kao i dati način obračuna.

Zadatak 12. Izvesti vezu između r i r_{ef} ako se kamata obračunava m puta godišnje, kao i za neprekidno kamaćenje. Zatim odrediti efektivnu stopu ako je nominalna stopa 12% , a kamaćenje je

- (a) godišnje, (b) polugodišnje, (c) kvartalno, (d) mesečno, (e) neprekidno.

Zadatak 13. Ulažete novac u banku uz nominalnu godišnju kamatnu stopu r sa mesečnim kamaćenjem.

- (a) Odrediti efektivnu kamatnu stopu u funkciji od r .
- (b) Ako je $r = 7,2\%$, koliko iznosi r_{ef} ? Koliko će biti na računu nakon 2 godine i 6 meseci ako je uloženo 40 000 dinara?

Zadatak 14. Tri banke nude sledeće uslove: banka A – nominalna stopa 6% uz polugodišnje kamaćenje, banka B – nominalna stopa 5,9% uz mesečno ukamaćenje, banka C – nominalna stopa 5,85% uz neprekidno ukamaćenje. Uporediti ponude preko efektivnih kamatnih stopa i odrediti koja je najpovoljnija za štediše.

Zadatak 15. Student ima 1 000 evra koje želi da orouči na period od godinu dana. Banka nudi istu nominalnu godišnju kamatnu stopu $r = 4\%$ (godišnje ukamaćenje) i na dinarsku i na deviznu štednju. Kamata na deviznu štednju se oporezuje porezom od 15% (porez se obustavlja pri svakom pripisivanju kamate), dok je dinarska štednja oslobođena poreza. Kupovni kurs banke je 1 EUR = 116 RSD, a prodajni kurs 1 EUR = 119 RSD. Ostale troškove (provizije, naknade) zanemariti.

- (a) Koliko evra će student imati nakon godinu dana ako oroči evre na deviznu štednju?
- (b) Koliko evra će imati ako evre proda banci, orouči dobijene dinare na godinu dana, a zatim na kraju perioda ponovo kupi evre? Šta se više isplati?
- (c) Za koje nominalne stope r bi se, pri istim kursevima, na godinu dana isplatilo preći na dinarsku štednju?
- (d) Ako bi se obnavljanje uloga vršilo više godina (kamata i porez se obračunavaju svake godine, a evri se kupuju tek na kraju), posle koliko najmanje godina bi se pri $r = 4\%$ isplatilo preći na dinarsku štednju? Izvesti uslov u opštem obliku.

Zadatak 16. (★) Pokazati da je razlika $r_{ef} - r$ između efektivne i nominalne stope rastuća funkcija od m (broj obračuna kamata na godišnjem nivou), ali da je ograničena veličinom $e^r - 1 - r$. Koliko najviše može iznositi ta razlika za $r = 10\%$?

4 Tokovi novca, sadašnja i buduća vrednost

Definicija. Ako je r_{ef} efektivna godišnja stopa, buduća vrednost iznosa K nakon t godina je $K(1 + r_{ef})^t$, a sadašnja vrednost iznosa K koji se isplaćuje za t godina je $K(1 + r_{ef})^{-t}$. Tok novca je niz parova (t_i, C_i) , gde je C_i iznos u trenutku t_i .

Zadatak 17. Šta je bolje: dobiti 9 500 dinara *sada* ili 10 000 dinara *za godinu dana*, ako je efektivna godišnja kamatna stopa $r_{ef} = 6\%$? Za koju vrednost y bi nam bilo svejedno da li dobijamo 9 500 sada ili y za godinu dana?

Zadatak 18. Dobijena je ponuda: 9 000 dinara odmah, ili 9 700 za godinu dana, ili 10 300 za dve godine, ili 11 000 za tri godine. Efektivna kamatna stopa je $r_{ef} = 5\%$.

- (a) Izračunati sadašnju vrednost svake ponude i odabrati najpovoljniju.
- (b) Isto uraditi za $r_{ef} = 3\%$ i $r_{ef} = 8\%$. Kako izbor zavisi od kamatne stope?
- (c) Šta bi se promenilo ako bi se isplata od 9 700 dinara vršila za 6 meseci umesto za godinu dana?

Zadatak 19. Posmatramo tok novca: u trenutku 0 ulaže se 50 000 dinara, a zatim se isplaćuje 20 000 nakon prve, 25 000 nakon druge i 30 000 nakon treće godine. Efektivna stopa je $r_{ef} = 8\%$.

- (a) Odrediti sadašnju vrednost toka novca (neto sadašnju vrednost).
- (b) Odrediti buduću vrednost toka novca na kraju treće godine.

(c) Da li se ulaganje isplati? Kako su povezani rezultati pod (a) i (b)?

Zadatak 20. Dva projekta imaju sledeće tokove novca (u hiljadama evra):

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Projekat A	-100	50	50	50
Projekat B	-100	0	40	120

Uporediti projekte pri $r_{ef} = 5\%$ i pri $r_{ef} = 15\%$. Da li izbor zavisi od stope? Za koju vrednost stope su projekti jednako vredni (približno)?

Zadatak 21. Dug od 100 000 dinara treba otplatiti u dva dela: 60 000 dinara za godinu dana i iznos x za tri godine. Odrediti x tako da novi raspored otplate bude ekvivalentan (iste sadašnje vrednosti) kao i otplata celog duga odmah, ako je $r_{ef} = 7\%$.

Zadatak 22. (★) Nominalna godišnja stopa je 9% uz kvartalno kamaćenje. Neko vam isplaćuje po 5 000 dinara na kraju svakog kvartala u narednih 2 godine. Odrediti sadašnju vrednost ovog toka novca i buduću vrednost na kraju druge godine.

Zadatak 23. (★) Ulaganje zahteva 1 000 dinara danas, ne donosi ništa nakon godinu dana, a nakon dve godine isplaćuje 1 210 dinara. Odrediti stopu r_{ef} za koju je neto sadašnja vrednost toka jednaka nuli (interna stopa prinosa). Šta se dešava sa isplativošću ako je tržišna stopa veća, a šta ako je manja od ove vrednosti?