

УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ 2025/26

испитна питања 18–22

Небојша Икодиновић

18. Директне и индиректне слике

(е) Задатак: Одредити директне и индиректне слике дате функције **Ипр**. Одредити директне и индиректне слике функције $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ дате са $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & c & a \end{pmatrix}$.

(у) Директне и индиректне слике; особине и докази особина

Било која функција $f : X \rightarrow Y$, одређује две нове функције:

- једну из $\mathcal{P}(X)$ у $\mathcal{P}(Y)$, коју називамо **ко- f** ('ко еф'), и за коју користимо исту ознаку f , али аргумент (подскуп од X) наводимо у угластим заградама:

$$f[A] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid (\exists a \in A) f(a) = y\}, \text{ за } A \subseteq X.$$

- другу из $\mathcal{P}(Y)$ у $\mathcal{P}(X)$, коју називамо **контра- f** ('контра еф'), и за коју користимо ознаку f^{-1} (која у овом контексту нема никакве везе са појмом инверзне функције), а аргумент (подскуп од Y) наводимо у угластим заградама:

$$f^{-1}[B] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \text{ за } B \subseteq Y.$$

Скуп $f[A] = \{y \in Y \mid (\exists a \in A) f(a) = y\} \subseteq Y$ називамо **директна слика** скупа $A \subseteq X$; $f[A]$ је подскуп од Y који садржи само оне елементе који су f -слике елемената из A . Будући да су сви елементи скупа $f[A]$ облика $f(a)$, $a \in A$, пишемо и $f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}$.

Скуп $f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$ називамо **индиректна слика** скупа $B \subseteq Y$; $f^{-1}[B]$ је подскуп од X који садржи само оне елементе из X чије f -слике припадају скупу B .

ПРИМЕР 1. Нека $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$:

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ b & a & a \end{pmatrix}.$$

Одредимо директне слике свих подскупова домена:

$$f[\emptyset] = \emptyset \quad f[\{0\}] = \{b\} \quad f[\{1\}] = \{a\} \quad f[\{2\}] = \{a\}$$

$$f[\{0, 1\}] = \{a, b\} \quad f[\{1, 2\}] = \{a\} \quad f[\{0, 2\}] = \{a, b\} \quad f[\{0, 1, 2\}] = \{a, b\}$$

Одредимо и индиректне слике свих подскупова кодомена:

$$f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \quad f^{-1}[\{a\}] = \{1, 2\} \quad f^{-1}[\{b\}] = \{0\} \quad f^{-1}[\{c\}] = \emptyset$$

$$f^{-1}[\{a, b\}] = \{0, 1, 2\} \quad f^{-1}[\{a, c\}] = \{1, 2\} \quad f^{-1}[\{b, c\}] = \{0\} \quad f^{-1}[\{a, b, c\}] = \{0, 1, 2\}$$

Посебно наглашавамо да се, на пример, $f^{-1}[\{a\}]$ битно разликује од записа $f^{-1}(a)$, који у овом случају нема смисла јер f није бијекција.

Теорема 1. Нека $f : X \rightarrow Y$. За произвољне $A, A_1, A_2 \subseteq X$ и $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ важи:

- (1) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$; (2) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$;
- (3) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f[A_1] \subseteq f[A_2]$; (4) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$;
- (5) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$; (6) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$;
- (7) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$; (8) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$.

ДОКАЗ. (1) Ако $x \in A$, онда је очигледно $f(x) \in f[A]$. Како је $f(x) \in f[A]$ еквивалентно са $x \in f^{-1}[f[A]]$, непосредно изводимо жељени закључак.

(2) Ако $y \in f[f^{-1}[B]]$, онда је $y = f(x)$, за неко $x \in f^{-1}[B]$. Како је $x \in f^{-1}[B]$ еквивалентно са $f(x) \in B$, следи $y = f(x) \in B$.

(3) Нека је $A_1 \subseteq A_2$. Претпоставимо да $y \in f[A_1]$. Тада је $y = f(x)$, за неко $x \in A_1$. Будући да је $A_1 \subseteq A_2$, из $y = f(x)$ и $x \in A_1 \subseteq A_2$ закључујемо да $y \in f[A_2]$.

(4) Нека је $B_1 \subseteq B_2$. Претпоставимо да $x \in f^{-1}[B_1]$, односно $f(x) \in B_1$. Из $f(x) \in B_1 \subseteq B_2$, закључујемо да $x \in f^{-1}[B_2]$.

(5) Ова инклузија директно следи из (3). Како је $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ и $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$, из (3) следи $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1]$ и $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_2]$, а одавде и $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$.

(6) Инклузију $f^{-1}[B_1 \cap B_2] \subseteq f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$ директно добијамо из (4). Докажимо да је и $f^{-1}[B_1 \cap B_2] \supseteq f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$. Ако $x \in f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$, онда $x \in f^{-1}[B_1]$ и $x \in f^{-1}[B_2]$, односно $f(x) \in B_1$ и $f(x) \in B_2$. Дакле, $f(x) \in B_1 \cap B_2$, што је еквивалентно са $x \in f^{-1}[B_1 \cap B_2]$.

(7) Једнакост доказује следећи еквиваленцијски ланац:

$$\begin{aligned} y \in f[A_1 \cup A_2] &\Leftrightarrow \exists x(x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\ &\Leftrightarrow \exists x(x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee \exists x(x \in A_2 \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in f[A_1] \vee y \in f[A_2] \\ &\Leftrightarrow y \in f[A_1] \cup f[A_2]. \end{aligned}$$

(8) Једнакост доказује следећи еквиваленцијски ланац:

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}[B_1] \vee x \in f^{-1}[B_2] \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]. \quad \square\end{aligned}$$

19. Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; скуп природних бројева

(u) Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; индуктиван скуп; најмањи индуктиван скуп

▼ Схема замене

Важан метод дефинисања функција омогућава нам нова схема – **схема замене**. Пре него што је наведемо, описаћемо ситуације у којима је корисимо. Претпоставимо да смо, за неку формулу $\varphi(x, y)$, доказали $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$. Ако је A било који скуп, тада мора да важи и $(\forall x \in A) \exists! y \varphi(x, y)$, што значи да за сваки x из A постоји јединствен y за који је $\varphi(x, y)$. Све ово указује на могућност да се формулом φ дефинише једна функција са доменом A . Међутим, да би на овај начин била дефинисана функција, неопходно је да знамо у ком скупу се налазе те јединствене „слике” елемената из A . Схема замене нас ослобађа сваке бригае по овом питању, јер тврди да за сваку формулу $\varphi(x, y)$ за коју се може утврдити $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ и сваки скуп A постоји скуп који садржи само оне скупове y за које $(\exists x \in A) \varphi(x, y)$.

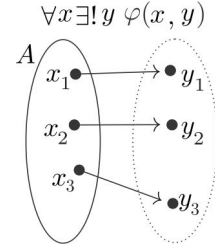


СХЕМА ЗАМЕНЕ

$$\forall x \exists! y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall A \exists B \forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(x, y)))$$

▼ Аксиома регуларности

Аксиомом регуларности се тврди да сваки непразан скуп садржи елемент са којим нема заједничких елемената.

АКСИОМА РЕГУЛАРНОСТИ

$$\forall X (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x (x \in X \wedge x \cap X = \emptyset))$$

Теорема 2. (1) Не постоји скуп x такав да $x \in x$.

(2) Не постоје скупови x и y такви да $x \in y$ и $y \in x$.

Доказ. (1) Ако би постојао скуп x такав да $x \in x$, онда скуп $\{x\}$ не би садржао елемент са којим нема заједничких елемената, јер $x \in x \cap \{x\}$, што је супротно аксиоми регуларности. (2) Претпоставимо да постоје скупови x и y такви да је $x \in y$ и $y \in x$. Тада, супротно аксиоми регуларности, скуп $\{x, y\}$ не садржи елемент са којим нема заједничких елемената: $x \cap \{x, y\} \neq \emptyset$, јер $y \in x \cap \{x, y\}$, и $y \cap \{x, y\} \neq \emptyset$, јер $x \in y \cap \{x, y\}$. $\square$

Теорема 3. За било које скупове x и y , из $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$ следи $x = y$.

ДОКАЗ. Нека је $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$. Претпоставимо супротно ономе што треба доказати да је $x \neq y$. Како $x \in y \cup \{y\}$ и $x \neq y$, закључујемо да $x \in y$. Слично томе, из $y \in x \cup \{x\}$ и $x \neq y$ следи $y \in x$. Међутим, није могуће да $x \in y$ и $y \in x$, према претходној теорему (2). Дакле, $x = y$. $\square$

Скуп $x \cup \{x\}$ називамо **следбеник** скупа x и обележавамо га x' . Полазећи од празног скупа, редом уводимо *следбенике* добијених скупова које из разумљивих разлога можемо идентификовати са природним бројевима:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset & 1 &= 0' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{0\} \\ 2 &= 1' = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \\ 3 &= 2' = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\ 4 &= 3' = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Интуитивно је јасно да генерисање нових скупова на описани начин неограничено можемо продужавати – за сваки добијени скуп, поступак можемо наставити увођењем његовог следбеника. Наредна аксиома заправо тврди да постоји скуп у коме ће се наћи сви скупови који се могу добити на описани начин. Будући да је описани поступак веома близак *бројању*, наредна аксиома ће бити кључна за увођење скупа природних бројева.

▼ Аксиома бесконачности. Скуп природних бројева

АКСИОМА БЕСКОНАЧНОСТИ

Постоји скуп који садржи 0 (тј. $\emptyset$) и следбеника сваког свог елемента.

$$\exists I(0 \in I \wedge \forall x(x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I))$$

Сваки скуп који садржи 0 и следбеника сваког свог елемента називамо **индуктивним скупом**. Аксиомом бесконачности се тврди да постоји бар један индуктиван скуп. Не можемо тврдити да постоји јединствен индуктиван скуп, али колико год да их има сви садрже као подскуп један исти индуктиван скуп, тзв. *најмањи индуктиван скуп*.

Ако је I неки индуктиван скуп, означимо са $\mathcal{I}(I)$ непразан скуп свих индуктивних подскупова од I :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(I) &= \{X \mid X \subseteq I \wedge \text{„}X \text{ је индуктиван“}\} \\ &= \{X \mid X \subseteq I \wedge 0 \in X \wedge \forall x(x \in X \Rightarrow x' \in X)\}. \end{aligned}$$

Нека је $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \mathcal{I}(I)$. Доказаћемо да је ω индуктиван скуп и то најмањи у следећем смислу: ако је S индуктиван и $S \subseteq \omega$,

онда је $S = \omega$, односно не постоји строги подскуп од ω који је индуктиван.

Теорема 4. (1) ω је индуктиван скуп.

(2) Ако је $S \subseteq \omega$ и важи:

(БИ) $0 \in S$,

(ИК) ако $x \in S$, онда $x' \in S$,

онда је $S = \omega$

ДОКАЗ. (1) Будући да за сваки $X \in \mathcal{I}(I)$, $0 \in X$, следи да мора бити и $0 \in \bigcap \mathcal{I}(I) = \omega$.

Остаје још да се покаже да ω садржи следбеника сваког свог елемента. Нека је $x \in \omega$ произвољан. Из $x \in \omega = \bigcap \mathcal{I}(I)$, следи да $x \in X$, за сваки $X \in \mathcal{I}(I)$. Како је сваки $X \in \mathcal{I}(I)$ индуктиван, сваки од њих садржи и x' . Дакле, $x' \in \bigcap \mathcal{I}(I) = \omega$. (2) Нека је $S \subseteq \omega$ такав да важе услови (БИ) и (ИК) – значи S је индуктиван подскуп од ω . Како је $\omega \subseteq I$, скуп S је и индуктиван подскуп од I , тј. $S \in \mathcal{I}(I)$, па је $\bigcap \mathcal{I}(I) \subseteq S$, тј. $\omega \subseteq S$, одакле следи да је $S = \omega$. $\square$

Остаје још да покажемо да за било који (други) индуктиван скуп I_1 важи $\omega \subseteq I_1$, или еквивалентно $\omega \cap I_1 = \omega$. Очигледно је $\omega \cap I_1 \subseteq \omega$. Једноставно је уверити се да скуп $\omega \cap I_1$ задовољава услове (БИ) и (ИК), па према претходној теореме (2) мора бити $\omega \cap I_1 = \omega$. Одавде непосредно закључујемо и да је $\omega = \bigcap \mathcal{I}(I_1)$. Скуп ω називамо **скупом природних бројева** и обележавамо га и $\mathbb{N}$. Будући да је ова друга ознака много уобичајенија, углавном ћемо њу користити у наставку. Знамо да $\mathbb{N}$ садржи 0, 1, 2, 3, 4, итд. и да функција *следбеник* $': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ има следеће особине:

- за свако $n \in \mathbb{N}$, $n' \neq 0$ (следбеник није на функција);
- за све $m, n \in \mathbb{N}$, из $m' = n'$ следи $m = n$ (следбеник јесте 1-1 функција).

Основно својство скупа природних бројева изражено је особином (2) теореме 4 – **принципом математичке индукције**. Принцип математичке индукције користимо за доказивање формула облика $(\forall n \in \mathbb{N}) \varphi(n)$. Прво формирамо одговарајући скуп $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$ и настојимо да докажемо:

(БИ) базу индукције, тј. $0 \in S$ и

(ИК) индуктивни корак, тј. да из $n \in S$ следи $n' \in S$. Пошто у индуктивном кораку треба доказати импликацију, претпостављамо $n \in S$, што се назива *индуктивна претпоставка* и настојимо да докажемо $n' \in S$.

Доказ применом принципа математичке индукције можемо скратити тако што не формирамо скуп S већ доказујемо формуле:

$$(БИ) \quad \varphi(n/0)$$

$$(ИК) \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\varphi \Rightarrow \varphi(n/n')).$$

Није тешко уочити и математчком индукцијом доказати да важе следећа својства природних бројева.

Теорема 5. (1) За све природне бројеве m, n , $m \in n \Rightarrow m \subseteq n$.

(2) За све природне бројеве m, n , $m \in n \Leftrightarrow m \subset n$.

(3) За све природне бројеве m, n , $m \in n \vee m = n \vee n \in m$.

20. Уређење и аритметичке операције скупа $\mathbb{N}$

(u) Уређење природних бројева; принцип потпуне индукције и последице (добро уређење); принцип рекурзије (без доказа); индуктивне дефиниције сабирања, множења и степеновања

Претходна теорема показује да припадање ($\in$), односно строга инклузија ($\subset$) на уобичајени начин уређују скуп природних бројева:

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in 4 \in 5 \cdots, \text{ односно } 0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset 4 \subset 5 \cdots$$

Заиста, знамо да:

- за сваки природан број n важи $n \notin n$ (ово је последица аксиоме регуларности – теорема 2 (1), али се може извести и без ове аксиоме, математичком индукцијом);
- за све природне бројеве k, m, n , ако $k \in m$ и $m \in n$, онда $k \in n$ (ово је директна последица претходне теореме (2)).

Дакле, бинарна релација $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \in n\}$ јесте *строга уређење скупа природних бројева* и обележава се $<$. Релацију $\leq$, тзв. *уређење скупа $\mathbb{N}$* уводимо на следећи начин:

$$m \leq n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} m < n \vee m = n.$$

Према претходној теореме (3) закључујемо да је $\leq$ и линеарно уређење.

Последица 1. *За све природне бројеве m, n важи²*

- (1) $m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n$;
- (2) $m \leq n \vee n \leq m$ (поредак $\leq$ је линеаран);
- (3) $m < n \Leftrightarrow m' \leq n$;
- (4) $m < n' \Leftrightarrow m \leq n$;
- (5) $m < n \Leftrightarrow m' < n'$ (функција следбеник је монотона).

Доказ. (1) Према претходној теореме (2) имамо да је:

$$m \leq n \Leftrightarrow m < n \vee m = n \Leftrightarrow m \subset n \vee m = n \Leftrightarrow m \subseteq n.$$

(2) Директно из тврђења (3) претходне теореме.

(3) Ако је $m < n$, тј. $m \in n$, онда је $\{m\} \subseteq n$ и, према теореме 5 (1), $m \subseteq n$, па је $m' = m \cup \{m\} \subseteq n$, тј. $m' \leq n$.

Из $m' \leq n$ следи $m' < n$ или $m' = n$, и у оба случаја, будући да је $m < m'$, закључујемо $m < n$.

(4) и (5) Доказе остављамо за вежбу. $\square$

² Наравно, $\leq$ наслеђује основна својства инклузије $\subseteq$. За све $k, m, n \in \mathbb{N}$:

- $n \leq n$;
- $m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$;
- $k \leq m \wedge m \leq n \Rightarrow k \leq n$.

Теорема 6. [**Принцип потпуне индукције**] Нека је $S \subseteq \mathbb{N}$.
Ако важи

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k < n) k \in S \Rightarrow n \in S),$$

онда је $S = \mathbb{N}$.

ДОКАЗ. ³ Формулу $(\forall k < n) k \in S$ можемо записати и на следећи начин: $(\forall k \in n) k \in S$.

Приметимо најпре да важи

$$(БИ) \quad (\forall k < 0) k \in S.$$

Ова формула је заправо скраћење за $\forall k (k \in 0 \Rightarrow k \in S)$ и једноставно се доказује, јер знамо да за свако k важи $k \notin 0$.

Није тешко уочити, а ни формално доказати, да је формула

$$(\forall k < n) k \in S \Rightarrow n \in S$$

еквивалентна формули

$$(ИК) \quad (\forall k < n) k \in S \Rightarrow (\forall k < n') k \in S.$$

Из (БИ) и (ИК), према принципу математичке индукције, следи

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k < n) k \in S.$$

Најзад, из последње формуле и претпоставке $S \subseteq \mathbb{N}$ закључујемо $S = \mathbb{N}$. $\square$

Теорема 7. Сваки непразан подскуп скупа природних бројева има најмањи елемент.

ДОКАЗ. Нека је X подскуп од $\mathbb{N}$ који нема најмањи елемент. Доказаћемо да X мора бити празан, тј. да је $\mathbb{N} \setminus X = \mathbb{N}$. Ову једнакост доказујемо применом принципа потпуне индукције.

Нека је n природан број такав да је $(\forall k < n) k \in \mathbb{N} \setminus X$. Ако би број n припадао X , онда би он био најмањи елемент скупа X , јер сваки k мањи од n припада $\mathbb{N} \setminus X$. Дакле, $n \in \mathbb{N} \setminus X$. Према принципу потпуне индукције закључујемо $\mathbb{N} \setminus X = \mathbb{N}$, односно $X = \emptyset$. $\square$

Принцип потпуне индукције заправо тврди да за сваки $S \subseteq \mathbb{N}$ важи:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k < n) k \in S \Rightarrow n \in S) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) n \in S.$$

Наравно, за сваки $S \subseteq \mathbb{N}$ важи и

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k < n) k \in S^{\complement} \Rightarrow n \in S^{\complement}) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) n \in S^{\complement},$$

одн. применом закона контрапозиције:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N}) n \in S^{\complement} \Rightarrow \neg(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k < n) k \in S^{\complement} \Rightarrow n \in S^{\complement}).$$

³ Уопштено говорећи, „обичном” индукцијом (по n) доказујемо формулу

$$(\forall k < n) k \in S.$$

Из $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k < n) k \in S$ следи $S = \mathbb{N}$.

Последња формула се једноставно трансформише у еквивалентну формулу

$$\underbrace{(\exists n \in \mathbb{N}) n \in S}_{S \text{ је непразан}} \Rightarrow \underbrace{(\exists n \in \mathbb{N}) ((\forall k < n) k \notin S \wedge n \in S)}_{S \text{ има најмањи елемент}},$$

којом се тврди да сваки непразан подскуп од $\mathbb{N}$ има најмањи елемент.

Дефиниција 1. Уређење $\leq$ неког скупа X је **добро** ако сваки непразан подскуп од X има најмањи елемент у односу на $\leq$.

Дакле, скуп природних бројева је добро уређен скуп.

Теорема рекурзије омогућава да дефинишемо функције чији је домен $\mathbb{N}$, на начин који потпуно одговара „природи” скупа $\mathbb{N}$.

Теорема 8. [**Принцип рекурзије**] Нека је X неки скуп, $g \in X$ и $h : X \rightarrow X$. Тада постоји јединствена функција $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ таква да је

$$(\text{Rec}) \left| \begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(n') = h(f(n)), n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

БЕЗ ДОКАЗА.

Користећи претходну теорему, уводимо основне аритметичке операције. Ако је $m \in \mathbb{N}$ неки фиксирани природан број, према теорему рекурзије, постоји јединствена функција $f_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, таква да је:

$$\begin{aligned} f_m(0) &= m \\ f_m(n') &= f_m(n)' \end{aligned}$$

Уместо $f_m(n)$ пишемо $m + n$. Уз овакво означавање, горње једнакости постају:

$$\begin{aligned} m + 0 &= m \\ m + n' &= (m + n)' \end{aligned}$$

Није тешко учити да је $n' = n + 1$, за сваки природан број n .

Аналогно се уводе **множење** и **степеновање**:

$$\left| \begin{array}{l} m \cdot 0 = 0, \\ m \cdot n' = m + (m \cdot n). \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} m^0 = 1, \\ m^{n+1} = m \cdot m^n. \end{array} \right.$$

Сва позната својства ових операција и њихове везе са уређењем доказујемо математичком индукцијом.

Скуп природних бројева $\mathbb{N}$ је суштински одређен својим (почетним) елементом 0 и функцијом (следбеник) $' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Теорема рекурзије тврди да за било који скуп X , избрани

Истичемо да је свако добро уређење такође линеарно. Заиста, за свака два елемента x и y доброг уређења, подскуп $\{x, y\}$ има најмањи елемент, па мора бити $x \leq y$ или $y \leq x$. Наравно, обратно није тачно у општем случају: линеарно уређење не мора бити добро.

$$\begin{array}{ccc} 0 \in \mathbb{N} & \xrightarrow{\quad ' \quad} & \mathbb{N} \\ \downarrow f & \downarrow \quad \downarrow & \downarrow f \\ a \in X & \xrightarrow{\quad h \quad} & X \\ f(0) = g & & \\ f \circ '(n) = h \circ f(n) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \in \mathbb{N} & \xrightarrow{\quad ' \quad} & \mathbb{N} \\ f_m \downarrow & \downarrow \quad \downarrow & \downarrow \\ m \in \mathbb{N} & \xrightarrow{\quad ' \quad} & \mathbb{N} \end{array}$$

елемент $a \in X$ и функцију $h : X \rightarrow X$, једнакости (Rec) одређују јединствену функцију $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

$$\begin{array}{ccc} 0 \in \mathbb{N} & \xrightarrow{\quad ' \quad} & \mathbb{N} \\ \downarrow f & \downarrow \quad \uparrow & \downarrow f \\ a \in X & \xrightarrow{\quad h \quad} & X \end{array} \quad \begin{array}{l} f(0) = a \\ f(n') = h(f(n)), \text{ тј. } f \circ ' (n) = h \circ f(n) \end{array}$$

Уколико је X неки скуп, свака функција из $\mathbb{N}$ у X назива се и **низ** у скупу X . Низови су веома важни у свим областима математике, па се усвајају разни договори о ознакама. Аргумент функције (низа) $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ често се записује као индекс слова којим је функција означена: уместо $f(n)$ пише се f_n . У складу са тим, некада се уместо „ $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ ” пише „ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ”. Поред тога, како је $n' = n + 1$, уз претходне договоре, теорема рекурзије тврди да за изабране $a \in X$ и $h : X \rightarrow X$, постоји јединствени низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ одређен једнакостима:

$$(\text{Rec}) \begin{cases} f_0 = a, \\ f_{n+1} = h(f_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

За низ одређен једнакостима (Rec) кажемо да је **рекурзивно** (рекурентно, индуктивно) дефинисан.

21. Коначни скупови; Дирихлеов принцип

(е) Дирихлеов принцип (формулација) и последице; појам коначног скупа и основне особине

(у) Доказ Дирихлеовог принципа

Један од основних комбинаторних принципа познат је под називом *принцип куглица и кутија* или *Дирихлеов принцип*:

Ако m куглица распоредимо у n кутија, при чему је $m > n$, онда се у бар једној кутији налазе бар две куглице; другим речима, распоређивање куглица не може бити 1-1 (једнозначно).

Теорема 9. [*Дирихлеов принцип*] За свака два природна броја m и n , ако је $m > n$, онда не постоји 1-1 функција из m у n .

ДОКАЗ. Доказ изводимо индукцијом по n .

(БИ) Ако је $m > 0$, тада уопште не постоји функција из m у 0 ($m \neq \emptyset$ и $0 = \emptyset$), па тврђење тривијално важи.

(ИК) (ИП) Нека је n природан број такав да за било које $m > n$ не постоји 1-1 функција из m у n . Доказаћемо да тада за свако $m > n'$, такође не постоји 1-1 функција из m у n' .

Претпоставимо супротно: нека је $m > n'$ и $f : m \xrightarrow{1-1} n'$. Одавде следи да n ($n \in n'$) мора бити f -слика неког елемента из m , јер би у супротном постојала 1-1 функција из m у n , што није могуће. Такође, из $m > n'$, следи да постоји природан број k такав да је $m = k'$; $f : k \cup \{k\} \xrightarrow{1-1} n \cup \{n\}$. Како је $k' > n'$, према последици 1 (5) (страна 8) имамо да је $k > n$, па не постоји 1-1 функција из k у n . Разликујемо два случаја: $f(k) = n$ и $f(k) \neq n$.

1. случај: $f(k) = n$. Тада $f|_k : k \xrightarrow{1-1} n$, што је немогуће према (ИП).

2. случај: $f(k) \neq n$. Тада је $f(\ell) = n$, за неко $\ell \in k$, тј. $\ell < k$. Дефинишимо функцију $h : k' \rightarrow n'$ на следећи начин:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in k \wedge x \neq \ell \\ f(k), & x = \ell, \\ n, & x = k. \end{cases}$$

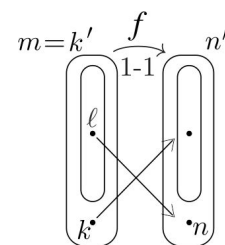
Није тешко уочити да $h : k' \xrightarrow{1-1} n'$ и да је $h(k) = n$. Међутим, тада $h|_k : k \xrightarrow{1-1} n$, што није могуће према (ИП). $\square$

Последица 2. Нека су m и n произвољни природни бројеви.

(1) Постоји 1-1 функција из m у n ако и само ако је $m \leq n$.

(2) Постоји бијекција између m и n ако и само ако је $m = n$.

Густав Лежен Дирихле (1805–1859), немачки математичар



Као што је добро познато, природним бројевима изражавамо „број” („количину”) елемената коначних скупова.

Дефиниција 2. Скуп X је **коначан** ако постоји бијекција између X и неког природног броја n , и у том случају пишемо $|X| = n$.

Према последици 2 (2), за сваки коначан скуп X постоји јединствен природан број n такав да је $|X| = n$ и тада кажемо да је n број елемената скупа X , одн. кардиналност скупа X једнака је n . Очигледно је $|n| = n$ за било који природан број n .

Теорема 10. Нека су X и Y неки коначни скупови. Тада важи:

- (1) $|X| = 0 \Leftrightarrow X = \emptyset$;
- (2) $|X| = |Y|$ ако и само ако постоји бијекција између X и Y .
- (3) $|X| \leq |Y|$ ако и само ако постоји 1-1 функција из X у Y .

Доказ. (1) Тврђење директно следи из разматрања о функцијама из празног и у празан скуп са стране ??.

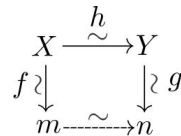
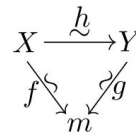
(2) Будући да су X и Y коначни скупови, постоје природни бројеви m и n и бијекције $f : X \xrightarrow{1-1} m$ и $g : Y \xrightarrow{1-1} n$.

($\Rightarrow$) Претпоставимо да је $m = n$. Треба да дефинишемо бијекцију између X и Y . На наредној слици, знаком $\sim$ изнад стрелице означавамо да је одговарајућа функција бијекција.

Функција $h : X \rightarrow Y$, дата са $h(x) = g^{-1} \circ f(x)$, јесте бијекција.

($\Leftarrow$) Нека је $h : X \xrightarrow{1-1} Y$ нека бијекција између X и Y . Тада се, аналогно претходном случају, дефинише бијекција између m и n , што према последици 2 (2) значи да је $m = n$, тј. $|X| = |Y|$.

(3) Доказ остављамо за вежбу. $\square$



22. Бесконачни скупови; теорема $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

(u) Упоредивање скупова по кардиналности; основна својства; доказ да је $|A| < |\mathcal{P}(A)|$; пребројиви и не-пребројиви скупови

Нису сви скупови коначни. На пример, скуп $\mathbb{N}$ није коначан: ако би за неки природан број n постојала бијекција $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} n$, онда би њена рестрикција на скуп n' била 1-1 функција, $f|_{n'} : n' \xrightarrow{1-1} n$, супротно Дирихлеовом принципу. Скупове који нису коначни називамо **бесконачним**.

Упоредивање бесконачних скупова по „броју” елемената дефинишемо по узору на тврдње (2) и (3) теореме 10, које се односе на коначне скупове.

Дефиниција 3. (1) Скупови A и B су **исте кардиналности** (имају исти број елемената), у ознаци $|A| = |B|$ ако постоји бијекција између A и B .

(2) Кардиналност скупа A је мања од или једнака кардиналности скупа B , у ознаци $|A| \leq |B|$ ако постоји 1-1 функција из A у B .

Теорема 11. За произвољне скупове A, B, C важи:

- (1) $|A| = |A|$;
- (2) ако је $|A| = |B|$, онда је $|B| = |A|$;
- (3) ако је $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, онда је $|A| = |C|$.

ДОКАЗ. (1) $\text{id}_A : A \xrightarrow{1-1} A$.

(2) Ако $f : A \xrightarrow{1-1} B$, онда $f^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$.

(3) Ако $f : A \xrightarrow{1-1} B$ и $g : B \xrightarrow{1-1} C$, онда $g \circ f : A \xrightarrow{1-1} C$. $\square$

Теорема 12. За произвољне скупове A, B, C важи:

- (1) $|A| \leq |A|$;
- (2) ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, онда је $|A| \leq |C|$.

ДОКАЗ. Тврђење (1) директно следи из претходне теореме.

Тврђење (2) је последица чињенице да из $f : A \xrightarrow{1-1} B$ и $g : B \xrightarrow{1-1} C$ следи $g \circ f : A \xrightarrow{1-1} C$. $\square$

Теорема 13. [Кантор-Бернштајнова теорема] Нека су A и B било који скупови. Ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, онда је $|A| = |B|$.

Феликс Бернштајн (1878–1956),
немачки математичар

Најпре доказујемо једну корисну лему.

Лема 1. [Тарски] Нека је A било који скуп и $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ функција која задовољава следећи услов:

$$(*) \quad (\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)) \quad X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y).$$

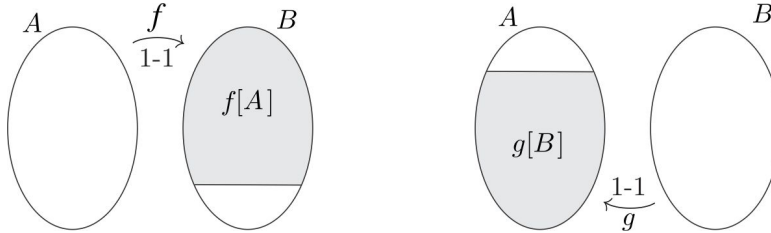
Тада постоји $E \subseteq A$ такав да је $F(E) = E$.

Доказ. Нека је $\mathcal{E} = \{X \mid X \subseteq A \wedge X \subseteq F(X)\}$ и $E = \bigcup \mathcal{E}$. Доказаћемо да је E фиксна тачка функције F , тј. $F(E) = E$. Приметимо најпре да важи:

$$E = \bigcup_{X \in \mathcal{E}} X \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{E}} F(X) \stackrel{(!)}{\subseteq} F\left(\bigcup_{X \in \mathcal{E}} X\right) = F(E).$$

Инклузија означена знаком узвика важи јер за свако $X \in \mathcal{E}$, $X \subseteq \bigcup X$ и $F(X) \subseteq F(\bigcup_{X \in \mathcal{E}} X)$, према (*). Из услова (*) добијамо и да је $F(E) \subseteq F(F(E))$, одакле следи да $F(E) \in \mathcal{E}$, па је $F(E) \subseteq \bigcup \mathcal{E} = E$. Дакле, $F(E) = E$. $\square$

Доказ. [Кантор-Бернштајнова теорема] Нека $f : A \xrightarrow{1-1} B$ и $g : B \xrightarrow{1-1} A$. Очигледно је да се помоћу функције f може дефинисати бијекција између скупова A и $f[A]$, а помоћу функције g бијекција међу скуповима B и $g[B]$. Међутим, могуће је да скупови $f[A]$ и $g[B]$ буду прави подскупови, редом од B и A .

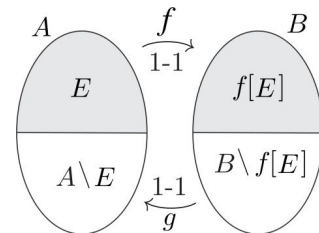


Наравно, слично запажање важи и за подскупове од A , одн. B : ако је $X \subseteq A$, онда f одређује једну бијекцију између X и $f[X]$, а ако је $Y \subseteq B$, онда g одређује бијекцију између Y и $g[Y]$. Кључно питање је да ли постоји подскуп $E \subseteq A$ такав да g одређује бијекцију између $B \setminus f[E]$ и $A \setminus E$, тј. да важи

$$g[B \setminus f[E]] = A \setminus E, \text{ одн. } E = A \setminus g[B \setminus f[E]].$$

Другим речима, треба испитати да ли постоји фиксна тачка функције $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $F(X) = A \setminus g[B \setminus f[X]]$, $X \in \mathcal{P}(A)$. Према претходној лем, довољно је проверити да ли важи услов (*). За било које $X_1, X_2 \subseteq A$ важи:

$$\begin{aligned} X_1 \subseteq X_2 &\Rightarrow f[X_1] \subseteq f[X_2] \\ &\Rightarrow B \setminus f[X_1] \supseteq B \setminus f[X_2] \\ &\Rightarrow g[B \setminus f[X_1]] \supseteq g[B \setminus f[X_2]] \\ &\Rightarrow A \setminus g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[X_2]] \\ &\Leftrightarrow F(X_1) \subseteq F(X_2). \end{aligned}$$



Према претходној лемі, постоји скуп E такав да је $F(E) = E$, тј. $g[B \setminus f[E]] = A \setminus E$. Приметимо да за свако $x \in A \setminus E$, постоји јединствени (јер је g 1-1 функција) елемент из B чија је g -слика једнака x ; тај јединствени елемент из B означимо са $g^{-1}(x)$. Сада није тешко дефинисати жељену бијекцију. Нека је $h : A \rightarrow B$ функција дата са:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ g^{-1}(x), & x \in A \setminus E \end{cases}$$

Доказ да је h бијекција остављамо за вежбу. $\square$

Упоредивање бесконачних скупова по кардиналности (по броју елемената) има смисла, јер се испоставља да постоје разне врсте бесконачности и да од сваког бесконачног скупа постоји неки „бесконачнији”, тј. веће кардиналности.

Дефиниција 4. Кардиналност скупа A је мања од кардиналности скупа B , у ознаци $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Теорема 14. За сваки скуп A , $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

ДОКАЗ. Није тешко уочити да је $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Заиста, функција $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$, $x \in A$, јесте 1-1 функција.

Остаје још да покажемо да не постоји бијекција између A и $\mathcal{P}(A)$. Претпоставимо супротно, да $h : A \xrightarrow{1-1} \mathcal{P}(A)$. Дефинишимо скуп

$$K = \{x \in A \mid x \notin h(x)\}.$$

Очигледно $K \in \mathcal{P}(A)$, па пошто је h на функција, постоји $k \in A$ такав да је $h(k) = K$. Да ли k припада или не припада скупу K ?

1. могућност: $k \in K$. Из $h(k) = K$ следи $k \in h(k)$, што према дефиницији скупа K , значи да $k \notin K$. Контрадикција.

2. могућност: $k \notin K$. Из $h(k) = K$ следи $k \notin h(k)$, што према дефиницији скупа K , значи да $k \in K$. Контрадикција.

Из добијених контрадикција закључујемо да не постоји бијекција између A и $\mathcal{P}(A)$. $\square$

Доказ последње теореме је стар преко сто година. На основу доказане неједнакости можемо конструисати бесконачан, строго растући по кардиналности, низ бесконачних скупова:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \dots < \underbrace{|\mathcal{P}(\dots \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \dots)|}_n < \dots$$

Дефиниција 5. Скуп X је **пребројив** ако је $|X| = |\mathbb{N}|$.

Да је X пребројив означава се и $|X| = \aleph_0$.

Алеф $\aleph$ је прво слово семитских алфабета.

Теорема 15. Сваки подскуп пребројивог скупа је коначан или пребројив.

Дефиниција 6. Скуп је **највише пребројив** ако је коначан или пребројив. Бесконачан скуп је **непребројив** ако није највише пребројив.

Из претходне теореме следи да је сваки подскуп пребројивог скупа највише пребројив.

Теорема 16. Скуп A је највише пребројив ако је $|A| \leq |\mathbb{N}|$.

Теорема 17. Ако постоји функција из $\mathbb{N}$ на скуп A , $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} A$, онда је A највише пребројив.

ДОКАЗ. Нека $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} A$. Тада је за свако $a \in A$, скуп

$$f^{-1}[\{a\}] = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = a\}$$

непразан подскуп од $\mathbb{N}$, па самим тим има најмањи елемент.

Нека је $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ функција дефинисана са: $g(a) = \min f^{-1}[\{a\}]$,

$a \in A$. Функција g је 1-1 функција, јер уколико је $a_1 \neq a_2$, онда мора бити $f^{-1}[\{a_1\}] \cap f^{-1}[\{a_2\}] = \emptyset$, па је $g(a_1) \neq g(a_2)$.

Тиме је доказано $|A| \leq |\mathbb{N}|$, што значи да је A највише пребројив. $\square$