

ГЕОМЕТРИЈА 2

задачи по којима се држе вежбе

ПОДУДАРНОСТ

1. (Средња линија троугла) Ако су B_1 и C_1 средишта дужи CA и BA троугла ABC , онда су праве BC и B_1C_1 паралелне и важи $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.
2. Ако су A, B, C, D четири различите тачке и M, N, K, L, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, DB редом, доказати:
 - а) MN и KL , MP и QK , NP и QL су међусобно подударне дужи;
 - б) дужи LN, MK, PQ имају заједничко средиште;
 - в) сваки од углова $\angle PMQ, \angle PNQ, \angle LMN$ подударан је једном од углова којег одређују праве BC и AD , AB и CD , AC и BD .
3. Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на:
 - а) странице троугла;
 - б) средишта страница троугла;припадају кругу описаном око тог троугла.
4. (Ојлерова права) Средиште описаног круга O , ортоцентар H и тежиште T произвољног троугла су колинеарне тачке и важи $HT = 2TO$. Доказати.
5. (Ојлеров круг) Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.
6. (Симсонова права) Подножја нормала из произвољне тачке круга описаног око неког троугла, на правама које садрже странице тог троугла, припадају једној правој.
7. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки S .
 - а) Права која садржи тачку S и нормална је на правој AB садржи средиште дужи CD . Доказати.
 - б) Ако су A', B', C', D' пројекције тачке S на правама AB, BC, CD, DA , редом, тада је четвороугао $A'B'C'D'$ тетиван и тангентан. Доказати.
8. (Микелова теорема) Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.
9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.
10. Нека су P и Q средишта лукова AB и AC круга описаног око троугла ABC и s_α бисектриса угла $\angle BAC$. Доказати да је $PQ \perp s_\alpha$.
11. Нека су A', N и O редом подножје висине из A , пресек бисектрисе угла $\angle BAC$ са описаном кругом троугла ABC ($AB < AC$) и центар описаног круга, доказати $\angle A'AN = \angle ANO = \angle NAO = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$.
12. (Велики задатак) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC ($b > c$), са p полубим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB , са P_i, Q_i, R_i ($i = a, b, c$) тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB , са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l , при чему је M на луку BAC , са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB , са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c , доказати да је:
 - 1) $\mathcal{B}(A, P', P_a), \mathcal{B}(A, P, P'_a), \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;
 - 2) $AQ_a = AR_a = p, QQ_a = RR_a = a, Q_bQ_c = R_bR_c = a$;
 - 3) $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$;
 - 4) $PP_a = b - c, P_bP_c = b + c$;
 - 5) $PA_1 = P_aA_1, P_cA_1 = P_bA_1$;
 - 6) $NS = NS_a = NB = NC, MS_b = MS_c = MB = MC$;
 - 7) $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$;
 - 8) $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c), NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$;
 - 9) $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$;
 - 10) $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN', AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$;
 - 11) $M'N' = b$.

СЛИЧНОСТ

- (Теорема о симетрали угла)** Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла $\angle BAC$ троугла ABC ($AB < AC$) секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.
- Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:
 - $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;
 - $AE : SE = (AB + BC + CA) : BC$, $AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$;
 - $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

- Доказати (важе ознаке из Великог задатка):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} SA \cdot SN = 2r\rho; & \text{в)} S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b; \\ \text{б)} S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a; & \text{г)} S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c. \end{array}$$

- Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, M и N редом средишта страница AB и CD , O пресек дијагонала AC и BD , а P и Q нормалне пројекције тачке O редом на AD и BC . Доказати да је $MN \perp PQ$.
- (Птоломејева теорема)** Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да важи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

(Чевина теорема) Ако су P, Q, R редом тачке правих BC, CA, AB где су A, B, C три неколинеарне тачке, тада праве AP, BQ, CR припадају једном прамену ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

(Менелајева теорема) Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла ABC су колинеарне ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

- Ако су P, Q, R тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB , доказати да су праве AP, BQ, CR конкурентне.
- Доказати да се бисектриса једног унутрашњег и два спољашња угла троугла ABC секу у једној тачки.
- Доказати да, уколико постоје тачке у којима бисектрисе спољашњих углова код темена A, B и C секу праве одређене наспрамним страницама троугла ABC , оне су колинеарне.
- Доказати да тачке P, Q, R у којима тангенте описаног круга троугла ABC у његовим теменима секу праве одређене наспрамним страницама, уколико постоје, припадају једној правој.

Деф. Нека су P, Q, R, S четири разне колинеарне тачке. Пар тачака (P, Q) је хармонијски спрегнут са паром (R, S) ако важи $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Тада пишемо $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Деф. Праве a, b, c, d једног прамена су хармонијски спрегнуте ако постоји права p која их сече у хармонијски спрегнутим тачкама. Тада пишемо $\mathcal{H}(a, b; c, d)$. Ова особина не зависи од избора праве p .

Особине:

- Ако важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, тада важи и $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$.
 - Ако су P, Q, R три колинеарне тачке и R није средиште дужи PQ , тада постоји јединствена тачка S таква да је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.
 - $\mathcal{H}(P, Q; R, S) \Rightarrow \mathcal{B}(P, R, Q) \perp \mathcal{B}(P, S, Q)$.
 - Ако су a, b, c, d конкурентне праве и $c \perp d$, важи: $\mathcal{H}(a, b; c, d) \Leftrightarrow c$ и d су симетрале углова одређених правама a и b .
- Нека су $\overline{S}, \overline{S_a}, \overline{S_b}, \overline{S_c}$ пројекције тачака S, S_a, S_b, S_c на праву одређену висином AA' троугла ABC , а $\overline{E}$ пројекција тачке E на праву AC . Доказати:
 - $\mathcal{H}(A, E; S, S_a), \quad \mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a}), \quad \mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a), \quad \mathcal{H}(A', E; P, P_a);$
 - $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c), \quad \mathcal{H}(A', F; P_b, P_c), \quad \mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c}).$
 - Важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ ако и само ако постоје четири тачке A, B, C, D такве да важи $AB \cap CD = \{P\}$, $BC \cap AD = \{Q\}$, $PQ \cap AC = \{R\}$, $PQ \cap BD = \{S\}$.
 - Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB , тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow AO^2 = OC \cdot OD$.

13. Ако су A, B, C, D разне тачке праве p , O тачка ван те праве, E и F тачке у којима права која садржи тачку B и паралелна је OA сече OC и OD , доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B$ је средиште EF .
14. (**Аполонијев круг**) Одредити скуп свих тачака у равни којима су растојања од двеју датих тачака сразмерна датим неподударним дужима.
- Деф.** Ако нека права која садржи тачку P сече круг $k(O, r)$ у тачкама A и B , тада је *потенција* тачке P у односу на круг k дата са $p(P, k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$ и не зависи од избора праве. Потенција тачке P је већа, мања или једнака нули у зависности од тога да ли се тачка налази у спољашњости, унутрашњости круга или на кругу.
- Деф.** Геометријско место тачака равни које имају једнаке потенције у односу на два дата круга $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ је права која се зове *радикална* или *потенцијална оса*.
- Радикална оса је управна на правој O_1O_2 . Радикалне осе трију кругова неке равни припадају једном прамену. Уколико је у питању прамен конкурентних правих, пресечна тачка назива се *радикални центар* тих кругова.
15. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D . Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow k \perp l$.
16. Ако је $l(O, r)$ описан круг, $k(S, \rho)$ уписани круг и $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг који додирује страницу BC датог троугла ABC , доказати да је $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ и $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$.
17. Права одређена висином AD троугла ABC представља радикалну осу кругова којима су пречници тежишне линије BB_1 и CC_1 тог троугла.

КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| 1) t_a, t_b, t_c ; | 7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$; |
| 2) β, γ, p ; | 8) $\alpha, b - c, \rho_a$; |
| 3) $\alpha, a, b + c$; | 9) a, ρ_b, ρ_c ; |
| 4) $\beta, h_c, b \pm c$; | 10) α, ρ, ρ_a ; |
| 5) $t_a, h_b, b \pm c$; | 11) $b - c, h_a, \rho$. |
| 6) $\beta - \gamma, b, c$; | |

2. Конструисати троугао ABC ако су дати теме A , ортоцентар H и центар описаног круга O тог троугла.
3. Дате су тачке A_1, S, F . Конструисати троугао ABC ако је A_1 средиште BC , S центар уписаног круга, а F пресек симетрале спољашњег угла у темену A и праве BC .

ИНВЕРЗИЈА

Деф. Нека је $k(O, r)$ произвољни круг равни $\mathbb{E}^2$. *Инверзија у односу на круг k* је пресликавање $\psi_k : \mathbb{E}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ којим се тачка P слика у тачку P' такву да P и P' припадају истој полуправој са теменом у O и важи $OP \cdot OP' = r^2$.

Особине

- $\psi_k^2 = \mathcal{E}$.
- $\psi_k(P) = P \Leftrightarrow P \in k$.
- ψ_k слика унутрашњост круга у спољашњост и обрнуто.
- Ако ψ_k слика A у A' и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.
- Ако права p садржи тачку O , тада се $p \setminus \{O\}$ слика у $p \setminus \{O\}$.
- Ако права p не садржи тачку O , онда се слика у $l \setminus \{O\}$ где је l круг који садржи O .
- Ако круг l садржи тачку O , онда се $l \setminus \{O\}$ слика у праву која не садржи O .
- Ако круг l не садржи тачку O слика се у круг l_1 који такође не садржи O . При том се центар круга l НЕ ПРЕСЛИКАВА у центар круга l_1 .
- $\psi_k(A)\psi_k(B) = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.
- ψ_k чува углове између кривих.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.
2. Нека се инверзијом ψ_k тачка A која не припада кругу k слика у A' и нека је l произвољан круг који садржи A и A' . Доказати да је $l \perp k$.
3. Нека је O центар описаног круга l троугла ABC . Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ доказати да је $OA \perp B'C'$.
4. Нека је $ABPQ$ нететивни четвороугао. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABP и ABQ једнак углу између кругова описаних око троуглова PQA и PQB .
5. Нека се кругови k_1, k_2, k_3 међусобно додирују у тачкама P, Q, R . Доказати да је круг описан око троугла PQR ортогоналан на сва три круга.
6. Кругови k_1, k_2, k_3 су међусобно ортогонални, при чему се k_1 и k_2 секу у тачкама A и B , k_2 и k_3 у тачкама C и D , k_3 и k_1 у тачкама E и F . Доказати да се кругови описани око троуглова ACE и ADF додирују у тачки A .
7. У равни су дата четири круга од којих сваки додирује тачно два круга од преосталих. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.
8. Конструисати круг k који садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p .
9. Конструисати круг k који садржи дату тачку A и додирује дате кругове k_1 и k_2 .
10. Конструисати круг који споља додирује три дата круга k_1, k_2, k_3 .

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ РАВНИ

1. Доказати: $S_p \circ S_q = S_q \circ S_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.
2. Доказати: $S_p \circ S_q \circ S_r = S_r \circ S_q \circ S_p$ ако и само ако су p, q, r праве једног прамена.
3. Доказати: $S_B \circ S_p \circ S_A = S_A \circ S_p \circ S_B \Leftrightarrow AB \perp p$.
4. Ако нека фигура равни има тачно две осе симетрије, доказати да је она и централно-симетрична.
5. Нека је $ABCDE$ петоугао уписан у круг такав да је $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да D припада медијатриси стране AB .
6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\angle BAD = 60^\circ$ и нека права p сече редом стране AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.
7. Над ивицама троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB, BEC, CFA .
 - а) (Торичелијева тачка) Доказати да су дужи AE, BF, CD међусобно подударне и да се секу у једној тачки.
 - б) (Наполеонов троугао) Доказати да центри конструисаних троуглова чине темена правилног троугла.
8. Нека је у равни $\mathbb{E}^2$ дат троугао ABC и нека су B', C' тачке правих AB и AC такве да важи $\mathcal{B}(A, B, B')$ и $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ако је P_a тачка у којој споља уписани круг који одговара темену A додирује страницу BC тог троугла, доказати да је $\mathcal{R}_{C, \angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A, \angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B, \angle CBB'} = S_{P_a}$.
9. Нека је t тангента описаног круга троугла ABC у темену A . Доказати да важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = S_t$.
10. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CB}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.
11. Дата су два круга који имају пресечну тачку A . Конструисати праву која садржи A и на којој дати кругови одсецају подударне дужи.
12. Дат је круг k и праве p, q, r које се секу у центру тог круга. Конструисати троугао ABC који има уписани круг k , а праве p, q, r садрже бисектрисе унутрашњих углова код темена A, B, C редом.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

- Постоји јединствена права нормална на два мимоилазни правама.
- Права је нормална на раван ако и само ако је нормална на два правама те равни које се секу.
- (Теорема о три нормале) Ако је права p нормала из тачке O на раван π и продире је у тачки P , а Q подножје нормале из P на праву $q \subset \pi$, тада је $OQ \perp q$.

- Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 - Одредити угао између правих AB_1 и BC_1 .
 - Одредити угао између равни ACD_1 и $AB_1 C_1 D$.
 - Доказати да је раван $B_1 CD_1$ нормална на дуж AC_1 и дели је у размери $2 : 1$.
- Збир два угла при врху триедра већи је од трећег. Доказати.
- Равни од којих је свака одређена ивицом и симетралом наспрамне стране триедра имају заједничку праву. Доказати.
- Нека су углови при врху триедра једнаки редом $60^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. Доказати да је диедар наспрам највеће стране прав.
- Доказати да се око сваког тетраедра може описати сфера, као и да се у сваки тетраедар може уписати сфера.
- (Тежиште тетраедра) Дужи одређене средиштима наспрамних ивица тростране пирамиде (тетраедра) секу се у једној тачки која их полови. Доказати.
 - Доказати да тежиште тетраедра дели дужи одређене теменима и тежиштима наспрамних страна у односу $3 : 1$.
- Две наспрамне ивице неког тетраедра су међусобно подударне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно нормалне.
 - Две наспрамне ивице тетраедра су нормалне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно подударне.
- Доказати да је права одређена средиштима страница AC и BD тетраедра $ABCD$ уједно и њихова заједничка нормала ако и само ако је $AB = CD$ и $AD = BC$.
Деф. Тетраедар $ABCD$ је *ортогоналан* ако важи $AB \perp CD, AC \perp BD, AD \perp BC$.
- Висине AA' и BB' тетраедра $ABCD$ се секу ако и само ако је $AB \perp CD$. Доказати.
- Доказати да подножја висина из темена тетраедра представљају ортоцентре наспрамних пљосни ако и само ако је тетраедар ортогоналан.

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОСТОРА

- Доказати $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$.
- Доказати да је композиција непарног броја централних симетрија простора поново централна симетрија.
- Ако су A, B, C три тачке равни π , доказати да важи $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$.
- Одредити тип изометрије $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$.
- Доказати да је композиција три раванске рефлексije којима су основе одређене бочним пљоснима тростране призме $ABCA'B'C'$ клизајућа рефлексija тог простора.
- Одредити тип и компоненте изометрије која представља композицију двеју осних рефлексija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ еуклидског простора, у зависности од узајамног положаја правих p и q .
- Нека су OP, OQ, OR три међусобно нормалне дужи простора. Доказати да је композиција $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$ транслација.
- Доказати да је у еуклидском простору композиција састављена од три раванске рефлексije којима су основе одређене пљоснима триедра осноротациона рефлексija.

ХИПЕРБОЛИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

- Праве одређене основицом и противосновицом Сакеријевог четвороугла су хиперпаралелне. Доказати.
- Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су подударни и оштри. Доказати.
- Доказати да су два Ламбертова четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са оштрим угловима D и D' подударна ако је:

а) $AB = A'B', BC = B'C';$

б) $AB = A'B', AD = A'D';$

в) $AD = A'D', BC = B'C';$

г) $AD = A'D', CD = C'D';$

д) $AD = A'D', \angle D = \angle D';$

ђ) $AB = A'B', \angle D = \angle D'.$

4. Доказати да су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са основама AB и $A'B'$ подударна ако је:
- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| а) $AB = A'B', BC = B'C';$ | г) $AB = A'B', \angle C = \angle C';$ |
| б) $AB = A'B', CD = C'D';$ | д) $BC = B'C', \angle C = \angle C';$ |
| в) $BC = B'C', CD = C'D';$ | ђ) $CD = C'D', \angle C = \angle C';$ |
5. Ако су тачке P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC , доказати да су праве BC и PQ међу собом хиперпаралелне.
6. Ако су A, B, C три разне тачке неке праве l и O тачка изван те праве, доказати да средишта A', B', C' дужи OA, OB, OC не припадају једној правој.
7. Доказати да је у Сакеријевом четвороуглу противосновица већа од основице.
8. Ако су P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC , доказати да је $PQ < \frac{1}{2}BC$.
9. Нека је A_1 средиште хипотенузе BC правоуглог троугла ABC . Доказати да је дуж AA_1 мања од половине хипотенузе.
10. Ако је висина еквидистанте већа од нуле тада та еквидистанта није права. Доказати.
11. Праве p и q секу се у тачки S . Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .
12. Праве p и q су паралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .
13. Праве p и q су хиперпаралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .
14. Нека су a, b и c међусобно паралелне праве, али не све у истом смеру. Нека су b' и c' управне из тачке A праве a на правама b и c . Одредити угао између правих b' и c' .
15. Два разна параболичка прамена имају заједничку праву. Доказати.
16. Нека су A, B, C, D тачке такве да су редом полуправе AB и DC , односно BC и AD паралелне. Доказати да су симетрале унутрашњих углова код темена A и C и спољашњих углова код темена B и D праве истог прамена.
17. Доказати да за три неколинеарне тачке A, B, C важи $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$.
18. Ако је у равни Лобачевског дат троугао ABC код кога је $\angle C$ прав, тј. $\angle C = R$, затим $\angle A = \Pi(a')$, $\angle B = \Pi(b')$, $BC = a$ и $AB = c$, доказати да је:
- | |
|--|
| а) $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b');$ |
| б) $\angle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & , \text{ за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c), & \text{ за } b' > c \end{cases};$ |
| в) $\angle A = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)], & \text{ за } b' > c \end{cases};$ |
| г) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)], & \text{ за } b' > c \end{cases};$ |
| д) $\Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R, \quad \Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R.$ |

ПОЕНКАРЕОВ ДИСК МОДЕЛ

- У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -права a и h -тачка A . Одредити h -праву n која садржи тачку A и управна је на праву a .
- У Поенкареовом диск моделу дате су h -тачке A и B . Одредити h -симетралу дужи AB .
- У Поенкареовом диск моделу дате су тачке X и Y . Конструисати h -круг l са центром у тачки X који садржи тачку Y .
- У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -тачке A и B . Конструисати h -тачку C такву да је h -троугао ABC правилан.
- У Поенкареовом диск моделу дате су две праве које се секу. Одредити h -бисектрису угла којег одређују.
- У Поенкареовом диск моделу конструисати h -дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.