

Комбинаторика

- **Пермутација** (без понављања) скупа A који има n елемената је сваки низ у коме се тачно по једанпут појављују сви елементи скупа A . Број пермутација n -точланог скупа је $n! = n(n-1) \cdots 1$

Пример: Колико се непарних петоцифрених бројева чије су све цифре различите може формирати од цифара $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

Решење: Последња цифра мора бити 1 или 3.

За прву цифру можемо бирати било коју од преостале 4 цифре осим нуле, што даје 3 могућности. Преостале три цифре можемо распоредити произвољно на средња три места на $3!$ начина.

Укупан број могућности је:

$$2 \cdot 3 \cdot 3! = 36.$$

- Нека је дат скуп $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Сваки низ дужине $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ у коме се елемент a_1 појављује k_1 пута, $\dots$, a_m k_m пута назива се **пермутација са понављањем** скупа A типа $(k_1, \dots, k_m)$. Број оваквих пермутација је $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$.

Пример: Колико се различитих речи може добити пермутовањем слова из речи ИНФОРМАТИКА?

Решење: Реч ИНФОРМАТИКА садржи укупно 11 слова, при чему се слово И појављује 2 пута, слово А се појављује 2 пута, а сва остала слова се појављују по једанпут.

Број различитих пермутација са понављањем је

$$\frac{11!}{2!2!}$$

- **Варијација без понављања** k -те класе скупа A који има n елемената ($n \geq k$) је сваки низ од k међусобно различитих елемената тог скупа. Број варијација k -те класе скупа од n елемената је $n(n-1) \cdots (n-k+1)$.

Пример: На такмичењу у уметничком клизању учествује 20 жена. На колико начина се могу поделити медаље?

Решење: Додељују се три медаље: златна, сребрна и бронзана. Пошто је редослед важан (која је такмичарка прва, друга или трећа), број могућности је:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

- **Варијација са понављањем** k -те класе скупа A од n елемената је сваки низ од k елемената скупа A при чему се елементи могу понављати. Број варијација са понављањем је n^k .

Пример: Гост у хотелу сваког дана бира један од 3 понуђена доручка. Колико има различитих избора ако у хотелу остаје 5 дана?

Решење За сваки од 5 дана гост има 3 могућности избора доручка. Укупан број могућих избора је

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243.$$

- **Комбинација** k -те класе скупа од n елемената ($n \geq k$) је сваки k -точлани подскуп тог скупа. Број комбинације је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример: На колико начина можемо изабрати 3 броја од 1 до 10 тако да они буду у растућем поретку?

Решење: Пошто свака комбинација три различита броја може бити поређана на тачно један начин који је растући, број таквих избора једнак је броју избора 3 различита броја од понуђених 10 бројева:

$$\binom{10}{3} = 120.$$

- Ако се из n -точланог скупа A бира један по један, са враћањем, k елемената и ако није битан редослед већ само који елементи и колико пута су изабрани, онда се резултат избора назива **комбинација са понављањем** k -те класе скупа од n елемената. Број комбинација са понављањем је $\binom{n+k-1}{k}$.

Пример: На колико начина се може 8 идентичних куглица распоредити на 3 кутије тако да у свакој кутији буде бар једна куглица?

Решење: Након што ставимо по једну куглицу у сваку кутију, остаје 5 куглица које треба распоредити. За сваку од тих 5 куглица треба да изаберемо са понављањем једну од 3 кутије, па је укупан број комбинација:

$$\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21.$$

- Њутнова биномна формула

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- Принцип укључења и искључења

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i A_j A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \dots A_n|$$

Задаци:

1. Пет особа треба распоредити на 5 места која чине један ред, тако да особа A не седи на местима која су на крајевима реда, а особа B не седи на месту које је тачно у средини. На колико начина је то могуће урадити?

Решење: Постоје два случаја:

Први случај: Ако особа A седи у средини, преостале 4 особе се могу распоредити произвољно на $4!$ начина.

Други случај: Ако A седи на месту 2 или 4, тада B може да седи на било којој од 3 столице (осим столице где је A и столице у средини), а преостале 3 особе распоређујемо произвољно, па у овом случају имамо $2 \cdot 3 \cdot 3!$ начина.

Укупно:

$$4! + 2 \cdot 3 \cdot 3! = 24 + 36 = 60.$$

2. На колико начина се могу поређати у низ бројеви $1, 2, \dots, 3n$ тако да сваки број стоји на месту чији редни број при дељењу са 3 даје исти остатак као и сам тај број?

Решење: Бројеве $\{1, 4, 7, \dots, 3n-1\}$ размештамо на $n!$ начина, $\{2, 5, \dots, 3n-2\}$ на $n!$ и $\{3, 6, \dots, 3n\}$ на $n!$ начина, па све укупно

$$(n!)^3.$$

3. Колико се различитих речи може добити пермутовањем слова из речи МАТЕМАТИКА тако да ААА није део речи?

Решење: Укупан број пермутација је:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

Одузимамо оне које садрже низ ААА, (низ ААА третирамо као једно слово):

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!}.$$

Укупно:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{8!}{2! \cdot 2!}.$$

4. Ако је $n \geq k + 2$, колико има пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ у којима је између бројева 1 и 2 тачно k других бројева?

Решење:

Ако $k + 2$ бројева, $1 \dots 2$ (односно $2 \dots 1$), посматрамо као целину, њу можемо да сместимо у низ од n бројева на $n - (k + 2) + 1 = n - k - 1$ начина. Бирамо k бројева који се налази између 1 и 2 на $\binom{n-2}{k}$ начина и распоређујемо их на $k!$ начина, док је број распореда за преостале бројеве $(n - k - 2)!$. Дакле, укупно:

$$2(n - k - 1) \binom{n-2}{k} k! (n - k - 2)! = 2(n - k - 1)(n - 2)!.$$

Приметимо да смо до истог закључка могли доћи не водећи рачуна о одабиру бројева који се налазе између 1 и 2.

5. Од 20 људи треба изабрати 4 човека и распоредити их на 4 различита радна места. На колико начина се то може урадити?

Решење: Како је битно који човек иде на које место, редослед избора је битан. Дакле, број начина је:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280.$$

6. Дато је по 10 белих и црних куглица које су означене бројевима $1, 2, \dots, 10$. На колико начина се може изабрати 6 куглица, тако да међу изабраним куглицама:

а) нема куглица означених истим бројем?

б) има тачно 2 пара куглица означених истим бројем?

Решење:

(а) Бирамо 6 различитих бројева из 10 и за сваку куглицу бирамо боју:

$$\binom{10}{6} \cdot 2^6.$$

(б) Прво бирамо 2 броја који за која извлачимо куглице у обе боје:

$$\binom{10}{2},$$

а затим још 2 куглице различитих бројева од преосталих 8, свака са по 2 могућности боје:

$$\binom{8}{2} \cdot 2^2.$$

Укупно:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot 2^2.$$

7. На колико начина може осам људи сести на шест столица које су поређане у један ред?

Решење: Број могућих распореда је:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160.$$

8. Четири особе стоје у једном реду. На колико начина можемо да их разместимо тако да ниједна особа не остане на истом месту?

Решење: Означимо догађаје:

A — ниједна особа није остала на свом месту

$A_i - i$ — та особа је остала на свом месту, $i = 1, 2, 3, 4$

$A_i^c - i$ — та особа није остала на свом месту, $i = 1, 2, 3, 4$

Приметимо да је

$$A = \bigcap_{i=1}^4 A_i^c.$$

Применом формуле укључења и искључења добијамо

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \bigcap_{i=1}^4 A_i^c \right| = |\Omega| - \left| \bigcup_{i=1}^4 A_i \right| \\ &= 4! - \left(\sum_{i=1}^4 |A_i| - \sum_{i < j} |A_i A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i A_j A_k| - |A_1 A_2 A_3 A_4| \right) \\ &= 4! - \left(4 \cdot 3! - \binom{4}{2} 2! + \binom{4}{3} 1! - 1 \right) = 9. \end{aligned}$$

9. На колико начина се из комплета који садржи 32 различите карте (по 8 карата у 4 различите боје) може изабрати 6 карата тако да међу њима буде бар једна карта из сваке од 4 боје?

Решење: Могуће расподеле броја карата по бојама су: $(3,1,1,1)$ и $(2,2,1,1)$.

Први случај: бирамо једну боју за коју извлачимо три карте, а за остале боје извлачимо по једну карту:

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{8}{1}^3.$$

Други случај: бирамо две боје за које извлачимо по две карте, а за преостале боје извлачимо по две карте:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2}^2 \cdot \binom{8}{1}^2.$$

Укупно:

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{8}{1}^3 + \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2}^2 \cdot \binom{8}{1}^2 = 415744.$$

Домаћи: Решити овај задатак применом формуле укључења и искључења.

10. Шпил од 32 карте садржи 4 двојке. На колико начина се може изабрати 5 карата тако да међу њима буду тачно две двојке?

Решење: Како се у шпиљу налазе укупно 4 двојке, бирамо 2 од те 4 двојке, а преостале 3 карте бирамо од преосталих 28 карата из шпила на

$$\binom{4}{2} \binom{28}{3}$$

начина.

11. Колико се различитих речи може добити пермутовањем слова из речи КОМБИНАТОРИКА тако да никоја два иста слова нису суседна?

Решење: Означимо:

A_1 – речи које садрже пар КК, A_2 – речи које садрже пар ОО,

A_3 – речи које садрже пар ИИ, A_4 – речи које садрже пар АА.

Тада је:

$$|A_i| = \frac{12!}{(2!)^3}, \quad |A_i A_j| = \frac{11!}{(2!)^2}, \quad |A_i A_j A_k| = \frac{10!}{2!}, \quad |A_1 A_2 A_3 A_4| = 9!.$$

Применом формуле укључења и искључења добијамо:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \cdot \frac{12!}{2!2!2!} - \binom{4}{2} \frac{11!}{2!2!} + \binom{4}{3} \frac{10!}{2!} - 9!.$$

Укупан број речи без суседних истих слова:

$$\frac{13!}{4!} - 4 \cdot \frac{12!}{2!2!2!} + \binom{4}{2} \frac{11!}{2!2!} - \binom{4}{3} \frac{10!}{2!} + 9!.$$

12. Хоћемо да направимо шифру која садржи само слова A, B, C тако да се свако слово јавља бар једном. Колико има таквих могућности за шифру која се састоји од 8 слова?

Решење:

Ако означимо догађаје са

A — свако слово се јавља бар једном
 A_1 — слово A се јавља бар једном
 A_2 — слово B се јавља бар једном
 A_3 — слово C се јавља бар једном,

онда је $A = \bigcap_{i=1}^3 A_i = \left(\bigcup_{i=1}^3 A_i^c \right)^c$. Приметимо да је

A_1^c — слово A се не јавља ниједном
 A_2^c — слово B се не јавља ниједном
 A_3^c — слово C се не јавља ниједном,

па је

$$\begin{aligned} |\Omega| &= 3^8 \\ |A_i^c| &= 2^8 \\ |A_i^c A_j^c| &= 1 \\ |A_1^c A_2^c A_3^c| &= 0. \end{aligned}$$

На основу формуле укључења и искључења имамо

$$\begin{aligned} |A| &= |\Omega| - \left| \bigcup_{i=1}^3 A_i^c \right| = |\Omega| - \left(\sum_{i=1}^3 |A_i^c| - \sum_{i < j} |A_i^c A_j^c| + |A_1^c A_2^c A_3^c| \right) \\ &= 3^8 - (3 \cdot 2^8 - 3 + 0) = 3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3. \end{aligned}$$