

Торзиони производ (Tor)

Def. $A \in \mathcal{AB}$

Слободна резолвента (резолюција) групе A је КТН

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \rightarrow 0 \quad \text{код кога су } F_0 \text{ и } F_1 \text{ слободне абелеве групе.}$$

За сваку аб. групу постоји слободна резолвента

КАНОНИКА РЕЗОЛВЕНТА: $F_0 := \mathbb{Z}\langle A \rangle = \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}\langle a \rangle$ - слободна аб. група генерисана са A

$f_0: F_0 \rightarrow A$ дефинисана генераторима: $a \in A \quad f_0(a) := a$
 $\rightarrow$ проширимо $\rightarrow$ хомоморфизам, на $\checkmark$

$F_1 := \ker f_0$, $f_1 =$ инклузија ($\ker f_0$ је слободна као абелева група F_0)

$$0 \rightarrow \ker f_0 \hookrightarrow F_0 \xrightarrow{f_0} A \rightarrow 0 \quad \text{КТН } \checkmark$$

Примери: 1) F -слободна $\rightarrow$ слободна резолвента: $0 \rightarrow 0 \rightarrow F \xrightarrow{1_F} F \rightarrow 0$

2) $A = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

каноника слоб. резолвента: $F_0 = \mathbb{Z}\langle 0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle 1 \rangle \xrightarrow{f_0} \mathbb{Z}_2 \quad 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$
 $\ker f_0 = \mathbb{Z}\langle 0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle 2 \cdot 1 \rangle$

$$\leadsto 0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle 0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle 2 \cdot 1 \rangle \hookrightarrow \mathbb{Z}\langle 0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle 1 \rangle \xrightarrow{f_0} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

међутим, имамо „лемму“ која није каноника за свако n :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{2n} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

Def $A, B \in \mathcal{AB} \quad 0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_2} A \rightarrow 0$ слободна резолвента групе A

Знамо да тензорисањем са B (сб са Т5) добијемо шатан из:

$$F_1 \otimes B \xrightarrow{f_1 \otimes 1_B} F_0 \otimes B \xrightarrow{f_2 \otimes 1_B} A \otimes B \rightarrow 0$$

Дефинишемо: $\text{Tor}(A, B) := \ker(f_1 \otimes 1_B)$ - торзиони производ група A и B

$$(\leadsto 0 \rightarrow \text{Tor}(A, B) \hookrightarrow F_1 \otimes B \rightarrow F_0 \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow 0 \text{ је шатан})$$

Да ли $\text{Tor}(A, B)$ зависи од избора резолвенте?

НЕ, увек добијемо исту групу (уј. $\cong$), за било коју избор резолвенте.

показује се... (хомолошка алгебра)

=

Особине

- F -свободна л.в. група, $A \in \mathcal{AB}$ произвољна
 $\Rightarrow \text{Tor}(A, F) = 0, \text{Tor}(F, A) = 0$

Д. $0 \rightarrow 0 \rightarrow F \xrightarrow{\text{id}_F} F \rightarrow 0$ свод. резолвента $/ \otimes A$
 $0 \otimes A \cong 0$

$$\begin{array}{c} 0 \otimes A \rightarrow F \otimes A \rightarrow F \otimes A \rightarrow 0 \\ \uparrow \\ 0 \rightarrow \ker \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \text{Tor}(F, A) = 0 \quad \checkmark \end{array}$$

Други доказ:

за A свод. рез: $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \rightarrow 0$

$$\begin{array}{c} \text{сваб-са свр. т.т.} \Rightarrow 0 \rightarrow F_1 \otimes F \xrightarrow{f_1 \otimes \text{id}_F} F_0 \otimes F \xrightarrow{f_0 \otimes \text{id}_F} A \otimes F \rightarrow 0 \quad \text{р. КТН} \\ \uparrow \\ (2) \quad F \text{ свод.} \Rightarrow \ker = 0 \\ \text{нж. } \text{Tor}(A, F) = 0 \quad \checkmark \end{array}$$

Слеђујуће: $\text{Tor}(A, \mathbb{Z}) \cong 0 \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}, A), \forall A \in \mathcal{AB}$

- Показује се да Tor има следеће комутативности:

$$\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(B, A)$$

(није баш лако доказати...)

- $\text{Tor}\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, B\right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Tor}(A_\lambda, B), \text{Tor}(A, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Tor}(A, B_\lambda)$

- $\text{Tor}(A, \mathbb{Z}_n) \cong \ker(A \xrightarrow{n} A)$

показује се заправо: $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, A) \cong \ker(A \xrightarrow{n} A)$

свд. рез $\mathbb{Z}_n$: $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{S_n} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0 / \otimes A$

као у случају о торзионом производу са $\mathbb{Z}_n$ (свр. т.б) имамо комутативан дијаграм из приложених (иначе хоризонталну):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \otimes A & \xrightarrow{n \otimes \text{id}_A} & \mathbb{Z} \otimes A & \xrightarrow{S_n \otimes \text{id}_A} & \mathbb{Z}_n \otimes A \rightarrow 0 \\ \cong \uparrow \psi_A & \subset & \cong \uparrow \psi_A & & \\ A & \xrightarrow{n} & A & & \end{array}$$

$$\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, A) \cong \ker(n \otimes \text{id}_A) \cong \ker(A \xrightarrow{n} A) \quad \square$$

Директна последица је: $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\text{HЗД}(m, n)}$

Ⓜ) из финит лемме са $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ и узрачунаних група за $\mathbb{Z} / \mathbb{Z}_n$

приликом тога уместо да рачунамо $\otimes$ и Tor за све коначно представљене л.в. групе