МАТФ
Универзитет у Београду
Математички факултет

Катедра за вероватноћу и статистику

Биостатистика и анализа података

Марија Цупарић

Први час

Основне информације

Предиспитне обавезе:

- ⋆ четири теста по 20 поена, рачунају се три најбоље урађена

Испит:

- ⋆ усмени испит (40 поена)

Литература:

- ⋆ Б. Милошевић. Основи статистике, Математички факултет, Београд, 2021.
- ⋆ J.S. Milton, J.J. Corbet and P.M. McTeer. Introduction to Statistics, DC Heath & Company, 1986.

Материјали:

- ⋆ http://old.matf.bg.ac.rs/p/-marija-radicevic
- ⋆ ???

Статистика

- ⋆ Статистика је наука о подацима.
- ⋆ Бави се њиховим прикупљањем, приказивањем, анализом и закључивањем на основу њих.
- ⋆ Задатак статистичара је да предложи одговарајући математички модел којим би се подаци адекватно описали.
- ⋆ Статистички модел је заправо скуп претпоставки, а једна од најзначајнијих јесте везана за расподелу обележја.

Увек смо заинтересовани за одређену групу објеката.
Желимо да опишемо неке карактеристике те групе или да донесемо неке закључке о њиховом понашању.
Међутим, група је обично велика да бисмо доносили закључке на основу ње целе.
Због тога посматрамо само њен део.

Основни појмови

популација (Ω)**:** скуп објеката који се проучава у односу на неку променљиву квантитативну (број деце, оцена на испиту, тежина, висина,...) или квалитативну (крвна група, пол, боја,...) особину

Дефинисање циљне популације је важан и често тежак део студије. На пример, у политичкој анкети, да ли би циљна популација требало да буду

- ? сви одрасли људи са правом гласа,
- ? све особе које су гласале на прошлим изборима,
- ? или нешто треће,

зависи од тога шта нам је циљ.

обележје (X)**:** особина или карактеристика која се проучава

Примери

(1) **Популација:** Бактерије у култури (нпр. у лабораторијским условима)

Обележја:

- ⋆ брзина раста популације
- ⋆ време дуплирања
- ⋆ отпорност на антибиотик
- ⋆ просечна величина ћелије
- ⋆ стопа мутације

(2) **Популација:** Пацијенти у клиничкој студији

Обележја:

- ⋆ концентрација биомаркера у крви
- ⋆ време опоравка
- ⋆ одговор на терапију
- ⋆ број нежељених реакција
- ⋆ ниво крвног притиска ✓

Шта је заправо обележје?

Ако као резултат експеримента нека променљива може да узима различите вредности, које унапред нису познате, онда њу зовемо случајна променљива или случајна величина.

- ⋆ означавамо је са $X, Y, Z, \ldots$
- ⋆ скуп реализација случајне величине - скуп свих могућих вредности

Случајна промењива дефинисана на објектима популације назива се и обележјем те популације.

Примери (наставак)

(1) Различите бактерије могу имати различиту брзину раста због генетских разлика или услова средине, време дуплирања зависи од температуре и доступности хранљивих материја,...

(2) Код различитих пацијената концентрација биомаркера може варирати због разлика у метаболизму или стадијуму болести, време опоравка зависи од општег здравственог стања,... ✓

Пре сваког од експеримената из претходних примера не можемо са сигурношћу рећи који ће бити исход, након експеримента променљиве ће имати нумеричку вредност одређену насумично.

Случајне величине се деле на:

дискретне - могу узети највише коначно или пребројиво бесконачно много различитих вредности

апсолутно непрекидне - могу узети било коју вредност из неког интервала реалних бројева

оне које нису ниједно од претходна два

Дискретне случајне величине могу бити:

- категоричке (квалитативне):
  - номиналне (крвна група, пол, сексуално опредељење,...)
  - ординалне (платни разред, степен стручне спреме,...)
- нумеричке (квантитативне)

Непрекидне променљиве све припадају групи нумеричких.

Иако се категоричка обележја често представљају нумерички („кодирају се"), анализа категоричких и нумеричких обележја се не врши на исти начин. Разлика између номиналног и ординалног типа је та што су у првом категорије равноправне док код другог имају поредак.

Примери (наставак) Типови случајних величина

(1)
- ⋆ брзина раста популације - непрекидна
- ⋆ време дуплирања - непрекидна
- ⋆ отпорност на антибиотик - дискретна (категоричка номинална, нпр. „осетљива“ / „умерено отпорна“ / „отпорна“)
- ⋆ просечна величина ћелије - непрекидна
- ⋆ стопа мутације - непрекидна

(2)
- ⋆ концентрација биомаркера у крви - непрекидна
- ⋆ време опоравка - непрекидна
- ⋆ број нежељених реакција - дискретна (нумеричка)
- ⋆ ниво крвног притиска - непрекидна
- ⋆ одговор на терапију - дискретна (категоричка номинална са категоријама нпр. „без одговора“ / „делимичан одговор“ / „потпун одговор“) ✓

Узорак $(X_1, ..., X_n)$**:** подскуп популације на основу којег доносимо закључке, представља вредности обележја на изабраним јединкама

- ⋆ случајан - ако се подскуп бира насумично
- ⋆ репрезентативан - добро осликава популацију, на основу њега можемо да доносимо закључке о читавој популацији
- ⋆ прост случајан узорак обима n - $n-$димензиона случајна величина $(X_1, ..., X_n)$ при чему су компоненте независне и све имају исту расподелу као обележје

  Касније током курса ћемо се упознати са појмовима независности и расподеле обележја.

- ⋆ реализовани узорак $(x_1, ..., x_n)$ - конкретан низ вредности обележја добијених на елементима популације који су узети у узорак

Параметар популације (θ): нека описна мера случајне величине (обележја) посматране на целој популацији

Примери (наставак) Параметри популације

(1) μ просечна брзина раста популације, μ_T просечно време дуплирања, p_i вероватноћа i-те категорије отпорности на антибиотик

(2) μ просечна концентрација биомаркера у крви, λ просечан број нежељених реакција, p_i вероватноћа i-те категорије одговора на терапију ✓

Статистика ($T_n = g(X_1, ..., X_n)$): описна мера случајне величине (обележја) посматране само на узорку

Статистика зависи од узорка и константи, а не сме зависити од непознатих параметара.

Кораци у статистичкој анализи

(1) осмишљавање експеримента

- ▷ одредити популацију која се проучава
- ▷ поставити питања у вези популације на која желимо одговор
- ▷ одредити случајне величине (обележја) чије ће проучавање помоћи да дођемо до одговора
- ▷ одредити параметре популације који су од важности

(2) узорковање и прикупљање података

(3) прелиминарна анализа

(4) идентификација аутлајера

(5) конструкција статистичког модела

(6) одговор на питања постављена у кораку (1)

Циљ

- ⋆ пронаћи што једноставнији статистички модел који довољно добро описује популацију
- ⋆ оправдати коришћење модела

Прелиминарна анализа

- ⋆ има улогу да опише податке на једноставан начин
- ⋆ њен саставни део су графички приказ података и приказ сумарних статистика које нам могу дати више информација о нумеричким карактеристикама обележја
- ⋆ једноставније речено у овом кораку користимо дескриптивне статистике

За приказ узорка у случају категоричког обележја можемо користити

табеларни приказ - приказује учесталост по категоријама

тракасти дијаграм (barplot) - фреквенције приказане у табели се приказују у виду трака (стубова) на графику

кружни дијаграм (pie chart) - круг се дели на исечке коју су пропорционални фреквенцијама приказаним у табели

База - попис становништва

База попис

Табеларни приказ

```
> baza$radni.st<-factor(baza$radni.st)
> baza$bracno.st<-factor(baza$bracno.st)
> baza$br.dece<-as.numeric(baza$br.dece)
> baza$godine<-as.numeric(baza$godine)
> baza$obrazov<-factor(baza$obrazov, ordered = TRUE)
> baza$otac.obr<-factor(baza$otac.obr, ordered = TRUE)
> baza$majka.obr<-factor(baza$majka.obr, ordered = TRUE)
> baza$pol<-factor(baza$pol)
> summary(baza)
```

```
   radni.st   bracno.st     br.dece          godine      obrazov otac.obr   majka.obr   pol
1      :237   1:232     Min.   : 1.000   Min.   : 1.00   0: 52   0 :147   1      :179   1:185
2      : 58   2: 31     1st Qu.: 1.000   1st Qu.:16.00   1:208   1 :135   0      :152   2:215
5      : 40   3: 52     Median : 3.000   Median :25.00   2: 29   2 :  5   3      : 24
7      : 29   4:  6     Mean   : 2.868   Mean   :27.14   3: 74   3 : 36   8      : 16
4      : 17   5: 79     3rd Qu.: 4.000   3rd Qu.:36.00   4: 37   4 : 16   2      : 10
3      :  9             Max.   :10.000   Max.   :65.00           8 : 13   4      :  9
(Other): 10                                                      NA: 48   (Other): 10
```

Пре даље анализе требало би избацити недостајуће податке

```
> baza1<-na.omit(baza)
> summary(baza1)
```

За табелирање једне променљиве користи се

```
> levels(baza1$radni.st)=c("puno radno vreme", "skraceno radno
  vreme", "trenutno ne radi", "nezaposlen, otpusten", "u penziji",
  "ucenik/ca", "domacin/ca", "drugo")
> table(baza1$radni.st)
```

```
puno radno vreme skraceno radno vreme     trenutno ne radi nezaposlen, otpusten           u penziji
             205                    56                    7                   15                  31
       ucenik/ca           domacin/ca                drugo
               6                    23                    3
```

или једне променљиве у односу на другу

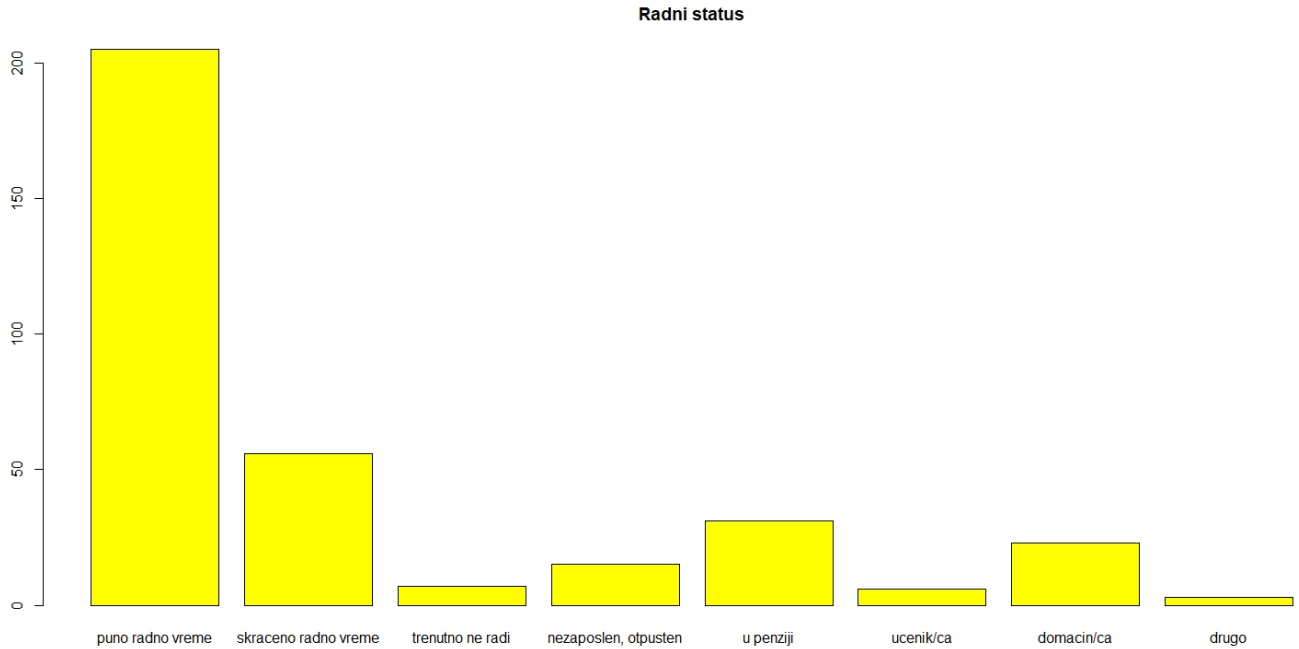
```
> levels(baza1$pol)=c("M","Z")
> table(baza1$radni.st, baza$pol)
```

	M	Z
puno radno vreme	118	87
skraceno radno vreme	14	42
trenutno ne radi	1	6
nezaposlen, otpusten	9	6
u penziji	15	16
ucenik/ca	1	5
domacin/ca	0	23
drugo	3	0

Тракасти дијаграм

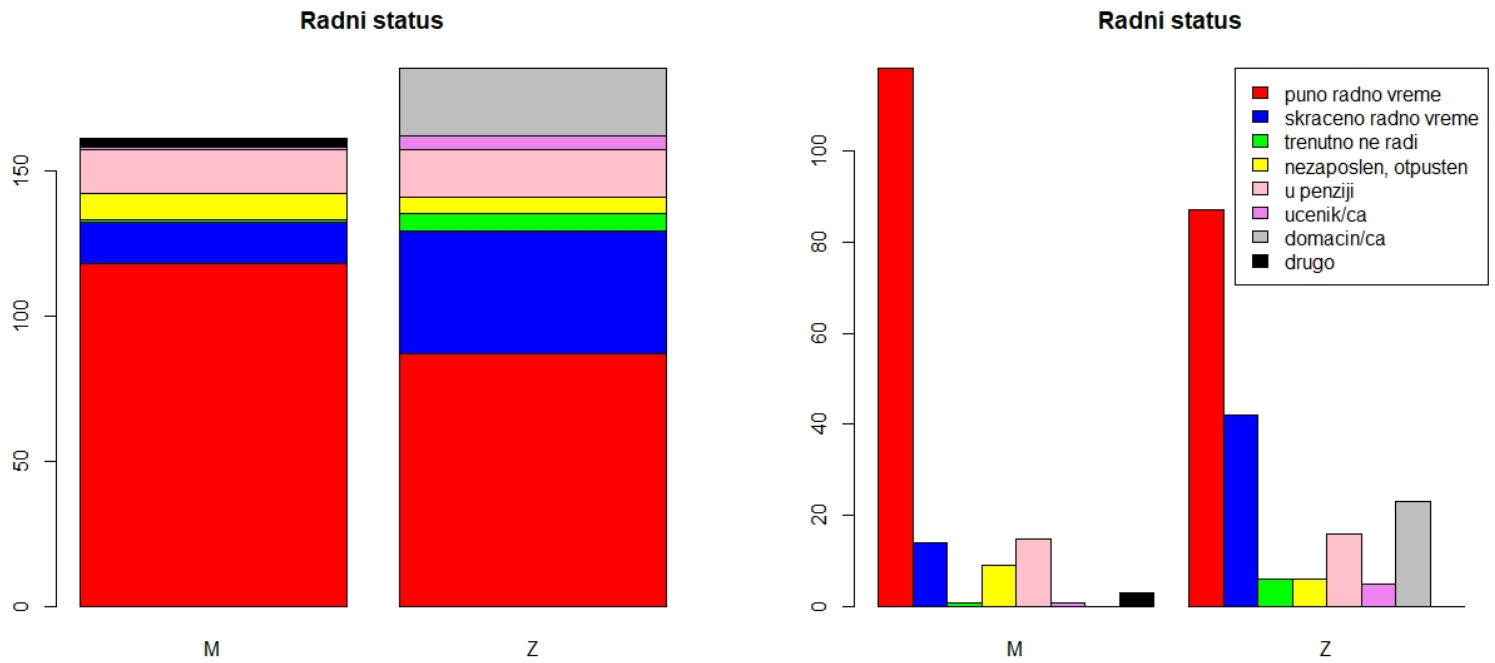
Тракасти дијаграм на $x-$оси приказује категорије, а на $y-$оси фраквенције појављивања елемената из узорка у свакој од категорија

```
> barplot(table(baza1$radni.st), col="yellow", main="Radni status")
```



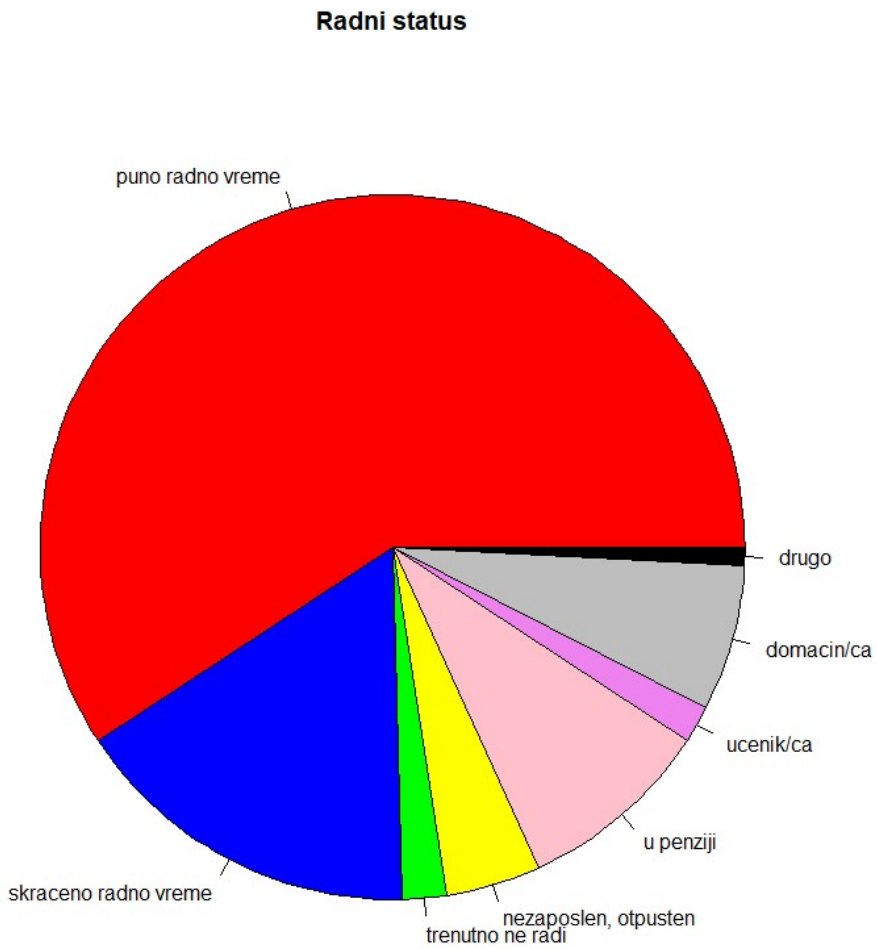
Може се цртати једна променљива у односу на категорије друге променљиве.

```
> boje<-c("red","blue","green","yellow","pink","violet","grey","black")
> barplot(table(baza1$radni.st, baza1$pol), main="Radni status", col=boje)
> barplot(table(baza1$radni.st, baza1$pol), main="Radni status", col=boje,
beside=TRUE)
> legend("topright", legend=levels(baza1$radni.st), fill=boje,cex=0.8)
```



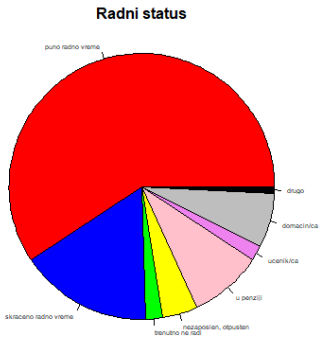
Кружни дијаграм

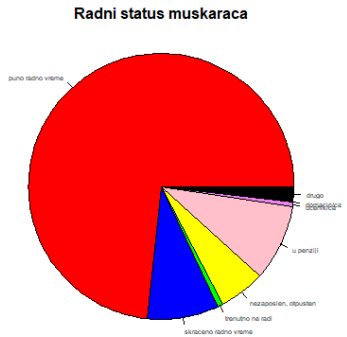
```
> pie(table(baza1$radni.st), main="Radni status", col=boje)
```

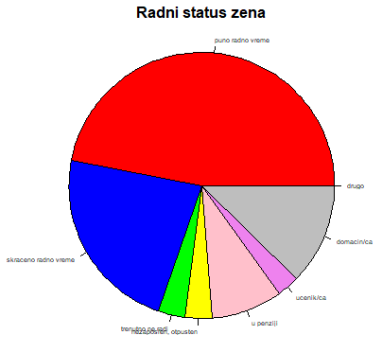


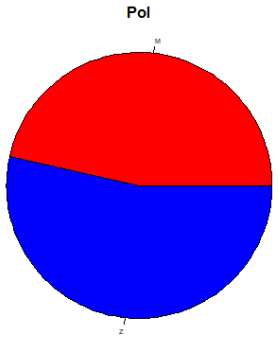
R

```
> par(mfrow=c(2,2))
> pie(table(baza1$radni.st), main="Radni status", col=boje, radius=1,
    cex=0.5)
> pie(table(baza1$radni.st[baza1$pol=="M"]), main="Radni status
    muskaraca", col=boje, radius=1, cex=0.5)
> pie(table(baza1$radni.st[baza1$pol=="F"]), main="Radni status
    zena", col=boje, radius=1, cex=0.5)
> pie(table(baza1$pol), main="Pol", col=boje, radius=1, cex=0.5)
```









Прелиминарна анализа нумеричких обележја:

- ⋆ хистограм
- ⋆ дескриптивне статистике
  - ⋆ мере централне тенденције (мере положаја)
  - ⋆ мере расејања

Занима нас:

- ? Какав је облик расподеле? Да ли вредности случајне промењљиве чине неку препознатљиву структуру? Који је положај података, тј. око које централне вредности су они распоређени?
- ? Колико има одступања међу подацима? Да ли су они прилично расејани или згуснути око централне вредности?

Хистограм

Графички приказ учесталости елемената узорка по категоријама.
Поступак цртања

- ⋆ податке груписати у категорије (интервале), тако да сваки елемент из узорка припада тачно једној категорији
  - ▷ препорука је да буде бар 5 категорија и да је број категорија $\lceil \log_2 n \rceil + 1$, где је n обим узорка
  - ▷ за леву границу првог интервала узети вредност мало мања од минималног елемента узорка
  - ▷ стварна ширина стуба је заокружену вредност (на већу вредност и са истим бројем децимала као подаци) количника између распона (разлика између минималне и максималне вредности у узорку) и броја категорија
- ⋆ одредити број елемената из узорка који се налазе у свакој категорији
- ⋆ уцртати положај категорија
- ⋆ нацртати „правоугаонике” у одговарајућем облику

Врсте хистограма:

хистограм апсолутних фреквенција: на $y-$оси су фреквенције, односно висина $i-$тог правоугаоника је број елемената из узорка који се налазе у $i-$тој категорији, n_i;

хистограм релативних фреквенција: на $y-$оси су фреквенције подељене величином узорка, односно висина $i-$тог правоугаоника је $\frac{n_i}{n}$;

хистограм густине: висина $i-$тог правоугаоника је $\frac{n_i}{nd_i}$, где је d_i дужина $i-$тог интервала.

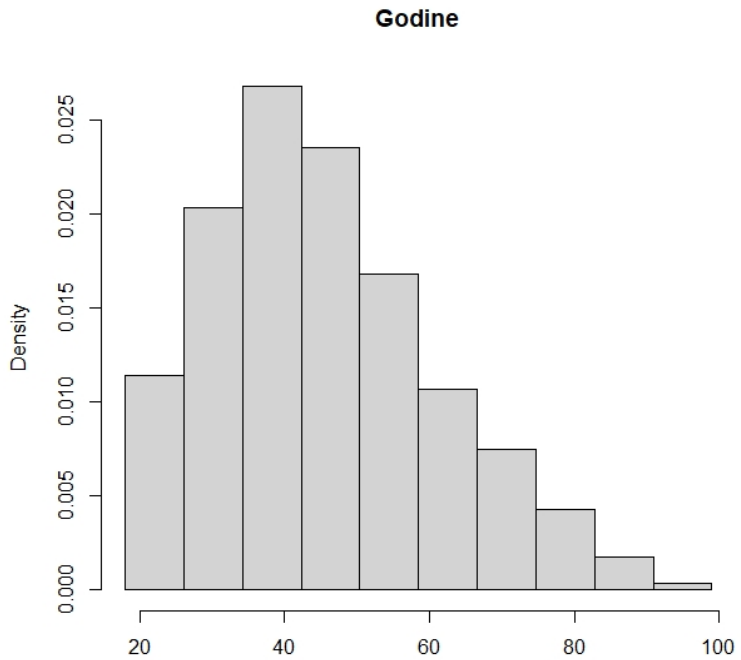
Проблеми хистограма:

- ⋆ његов изглед зависи од положаја и броја категорија,
- ⋆ функција која се црта је део-по-део константна а не непрекидна.

Хистограм густине заправо представља оцену густине обележја за које претпостављамо да има апсолутно непрекидну расподелу, па се идејно може видети које расподеле долазе у обзир за посматране податке

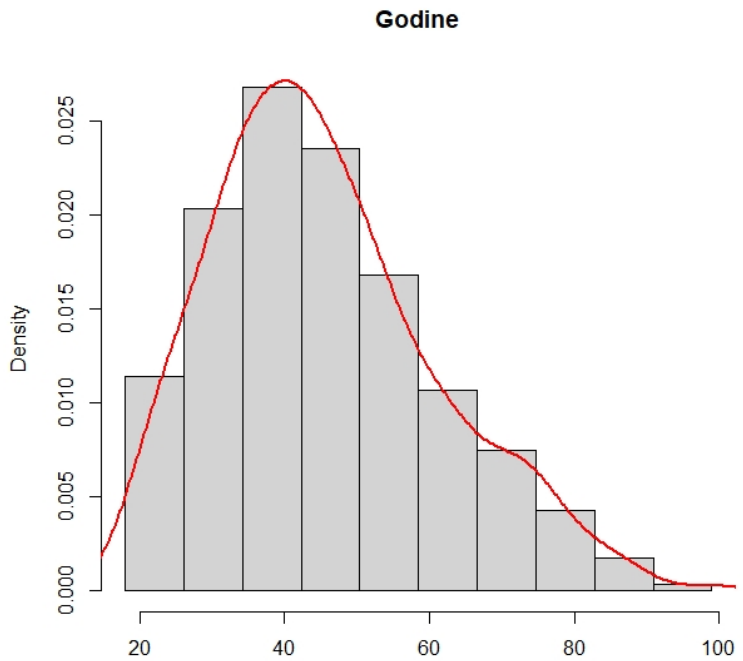
Одређивање граница хистограма по формули

```
> broj.kategorija <-ceiling(log(length(baza1$godine),2))+1
> d<-(max(baza1$godine)-min(baza1$godine))/broj.kategorija
> granice<-min(baza1$godine)-1+(0:broj.kategorija)*(d+0.1)
> hist(baza1$godine, breaks=granice, prob=TRUE)
```



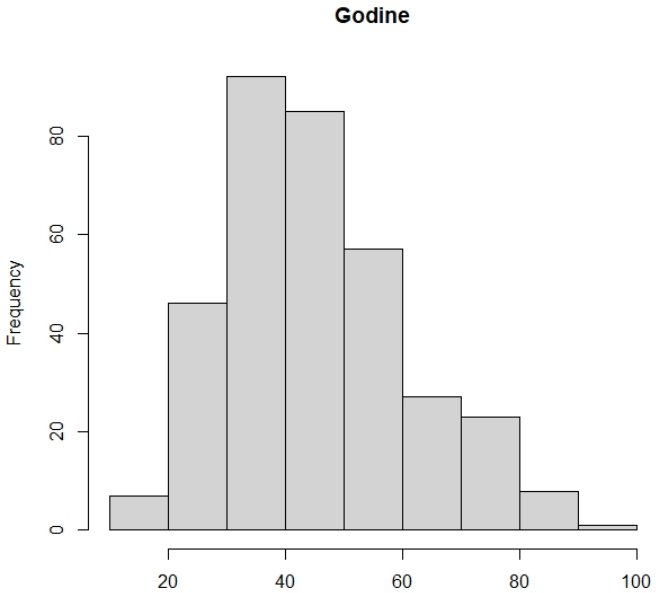
Додавање оцене густине на хистограм

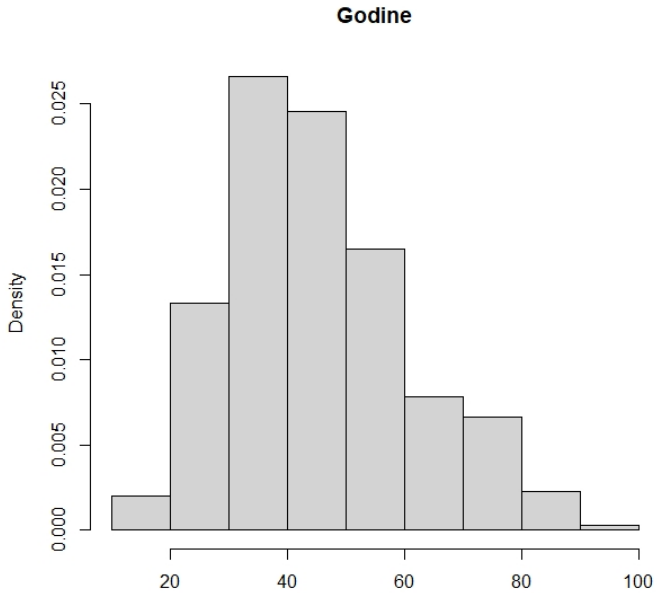
```
> broj.kategorija <-ceiling(log(length(baza1$godine),2))+1
> d<-(max(baza1$godine)-min(baza1$godine))/broj.kategorija
> granice<-min(baza1$godine)-1+(0:broj.kategorija)*(d+0.1)
> hist(baza1$godine, breaks=granice, prob=TRUE)
> lines(density(baza1$godine), col="red", lwd=2)
```



Коришћење подразумеваних граница функције hist

```
> hist(baza1$godine, main="Godine", xlab="")
> hist(baza1$godine, main="Godine", prob=TRUE, xlab="")
```





Процена удела популације чија је старост мања од 40 година

```
> H<-hist(baza1$godine, prob=TRUE, plot=FALSE)
> cumsum(H$density*diff(H$breaks))
  [1] 0.02023121 0.15317919 0.41907514 0.66473988 0.82947977 0.90751445
  0.97398844 0.99710983 1.00000000
```

Тражена процена је 0.42.

Мере положаја

О положају расподеле се може сазнати и из следећих параметара

- ⋆ средња вредност популације
- ⋆ медијана популације
- ⋆ мода популације

Ови параметри су непознати и сваки од њих процењујемо одговарајућом статистиком.

Средња вредност

- ⋆ Други називи: очекивана вредност, математичко очекивање
- ⋆ Најчешћа ознака μ
- ⋆ Процењујемо га узорачком средином $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

```
mean(x)
```

Пример. Број упамћених речи за два минута: 8 2 4 9 7 2 12 5 5 7

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{61}{10} = 6.1.$$

Комбиновање више узорачких средина

Пример. Број хитних случајева у једној болници је $\overline{x}_1 = 3$ за $n_1 = 5$, а у другој болници $\overline{x}_2 = 15$ за $n_2 = 100$.

$$\overline{x} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{5 \cdot 3 + 100 \cdot 15}{5 + 100} = 14.4$$

```
> sredine <- c(3,15)
> tezine <- c(5,100)/105
> weighted.mean(sredine, tezine)
```

Медијана

- ⋆ Медијана је средишња тачка, односно вредност од које је пола популације веће, а пола мање
- ⋆ Ознака m_e
- ⋆ Узорачка медијана је она тачка која се налази на средини узорка, односно, за варијациони низ $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$, то је

$$\widehat{m}_e = \begin{cases} X_{(k+1)}, & n = 2k+1, \\ \frac{X_{(k)}+X_{(k+1)}}{2}, & n = 2k. \end{cases}$$

R `median(x)`

Пример. Године старости купаца у једној продавници гардеробе

Жене	12	15	17	20	24	27	30	35	42	60
Мушкарци	17	29	37	40	72					

Медијана старости жена је $\frac{24+27}{2} = 25.5$, а мушкараца је 37 година.

Пример. Узорак тржишне вредности (у хиљадама доларима) десет кућа у једном насељу: 82 91 78.5 86 80.5 85 82.5 80 77 850.
Какав је ово крај?

Средња вредност је 159.25, а медијана је 82.25.

Из вредности $\overline{x}$ извлачимо погрешан закључак о вредности кућа у крају, медијана нам даје много бољу информацију. То је због утицаја неуобичајене вредности 850 коју називамо аутлајером (енгл. outlier - онај који се ту налази али не припада).

Мода

- ⋆ Мода је најчешћа вредност у популацији
- ⋆ Ако постоји више (локалних) максимума, кажемо да је расподела више модална па самим тим ова величина није јединствена.
- ⋆ Процењујемо је узорачком модом која је најфреквентнији елемент у узорку.
- ⋆ У случају апсолутно непрекидних расподела све вредности су различине (свима је фреквенција 1) па ова оцена није добра.
- ⋆ Ова оцена нема уграђену функцију у $R-$у.

Ако је расподела симетрична, медијана и очекивана вредност се поклапају. Ако је расподела додатно и унимодална, онда се све три мере централне тенденције поклапају. Одговарајуће статистике, наравно неће се поклапати, али ће имати блиске вредности.