Решења:

1. I група Применом Кошијевог критеријума:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{3^{n+1}n^{2016}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{3^n}\,\sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^{2016}} = \frac{4}{3}$$

Користили смо $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Како је $r = \frac{4}{3}$, на основу Кошијевог критеријума ред дивергира.

1. II група Применом Кошијевог критеријума:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+3}}{3^{n+2}n^{666}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^3}\,\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{3^n}\,\sqrt[n]{3^2}(\sqrt[n]{n})^{666}} = \frac{2}{3}$$

Користили смо $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^3} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^2} = 1$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Како је $r = \frac{2}{3}$, на основу Кошијевог критеријума ред конвергира.

2. I група

$$\lim_{x\to 0}(\sin(3x + \frac{\pi}{2}))^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\sin(3x+\frac{\pi}{2}))^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\sin(3x+\frac{\pi}{2})}{x}} =$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin(3x+\frac{\pi}{2})}{x}} \overset{\text{LT}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x+\frac{\pi}{2})}{\sin(3x+\frac{\pi}{2})}} = e^0 = 1$$

2. II група

$$\lim_{x\to 0}(\cos(5x))^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos(5x))^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos(5x)}{x}} =$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos(5x)}{x}} \overset{\text{LT}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{-5\sin(5x)}{\cos(5x)}} = e^0 = 1$$

3. I група Најпре одређујемо домен функције.
D: $x \neq 3$. Тачка $x = 3$ је кандидат за вертикалану асимптоту.

$$\lim_{x\to 3_+}(x-2)e^{\frac{1}{x-3}} = 1e^{\frac{1}{0_+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3_-}(x-2)e^{\frac{1}{x-3}} = 1e^{\frac{1}{0_-}} = 0$$

Функција има вертикалну асимптоту са десне старне. Тражимо косу асимптоту у облику $y = ax + b$, где је:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x}e^{\frac{1}{x-3}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty}(x-2)e^{\frac{1}{x-3}} - x =$$

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x-3}}-1)-2e^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-3}}-1}{\frac{1}{x}} - 2\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x-3}} =$$

$$\stackrel{\text{LT}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-3}}\frac{-1}{(x-3)^2}}{\frac{-1}{x^2}} - 2 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-3)^2}e^{\frac{1}{x-3}} - 2 = 1-2 = -1$$

Функција има косу асимптоту $y = x-1$, нема хоризонталну асимптоту.

3. II група Најпре одређујемо домен функције.
D: $x \neq -4$. Тачка $x=-4$ је кандидат за вертикалану асимптоту.

$$\lim_{x\to -4_+}(x+3)e^{\frac{1}{x+4}} = -1e^{\frac{1}{0_+}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -4_-}(x+3)e^{\frac{1}{x+4}} = 1e^{\frac{1}{0_-}} = 0$$

Функција има вертикалну асимптоту са десне старне. Тражимо косу асимптоту у облику $y = ax+b$, где је:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x}e^{\frac{1}{x+4}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty}(x+3)e^{\frac{1}{x+4}} - x =$$

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x+4}}-1)+3e^{\frac{1}{x+4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x+4}}-1}{\frac{1}{x}} + 3\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x+4}} =$$

$$\stackrel{\text{LT}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x+4}}\frac{-1}{(x+4)^2}}{\frac{-1}{x^2}} + 3 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+4)^2}e^{\frac{1}{x+4}} + 3 = 1+3 = 4$$

Функција има косу асимптоту $y = x+4$, нема хоризонталну асимптоту.

4. I група Прво одређујемо домен функције, а затим и њен први извод:
D : $x > 0$
$y' = 2 - \frac{3}{3x} = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$ Како је $x > 0$ знак првог извода зависи само од знака $2x-1$. Према томе:

- $y' < 0$ за $2x-1 < 0$ тј. $x \in (0, \frac{1}{2})$
- $y' > 0$ за $2x-1 > 0$ тј. $x > \frac{1}{2}$

Функција је опадајућа на интервалу $(0, \frac{1}{2})$, растућа на $(\frac{1}{2}, +\infty)$, а у тачки $x = \frac{1}{2}$ достиже локални минимум.

4. II група Прво одређујемо домен функције, а затим и њен први извод:
D : $x > 0$
$y' = 3 - \frac{2}{2x} = 3 - \frac{1}{x} = \frac{3x-1}{x}$ Како је $x > 0$ знак првог извода зависи само од знака $2x-1$. Према томе:

- $y' < 0$ за $3x-1 < 0$ тј. $x \in (0, \frac{1}{3})$
- $y' > 0$ за $3x-1 > 0$ тј. $x > \frac{1}{3}$

Функција је опадајућа на интервалу $(0, \frac{1}{3})$, растућа на $(\frac{1}{3}, +\infty)$, а у тачки $x = \frac{1}{3}$ достиже локални минимум.

5. I група

$$\int \ln(1+x^2)dx \overset{\text{PI}}{=} v \left\{ \begin{array}{ll} \ln(1+x^2) = u, & dx = dv \\ \frac{2x}{1+x^2}dx = du, & x = v \end{array} \right\} = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}dx =$$

$$x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2+2-2}{x^2+1}dx = x\ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}(x) + C$$

5. II група

$$\frac{1}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

После множења са $x(x^2+3)$ добија се:

$$1 = A(x^2+3) + (Bx+C)x$$

$$1 = x^2(A+B) + Cx + 3A$$

$$x^2 : A + B = 0$$

$$x : C = 0$$

$$1 : 3A = 1$$

Односно: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = 0$. Заменом у интеграл добија се:

$$\int \frac{dx}{x^3+3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{xdx}{x^2+3} = \left\{ x^2+3 = t, \quad xdx = \frac{1}{2}dt \right\} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln|x^2+3| + C$$