

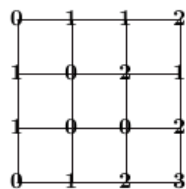
# Konstrucija i analiza algoritama 2

Februar 2024

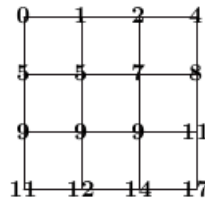
1. Pogadjajući skup: Neka je  $C$  kolekcija skupova.  $H$  je pogadjajući skup za  $C$  ako ima neprazan presek sa svakim skupom iz kolekcije  $C$ . Pogadjajući skup  $H$  je minimalan ako bi uklanjanjem bilo kog elementa iz njega,  $H$  prestao da bude pogadjajući. Pogadjajući skup najmanje kardinalnosti je najmanji pogadjajući skup. Problem najmanjeg pogadjajućeg skupa glasi: Neka je data kolekcija skupova  $C$ , odrediti najmanji pogadjajući podskup za  $C$ .
  - (a) **(2 poena)** Za skup  $C = \{\{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{1, 3, 7\}\}$  dati primer jednog minimalnog pogadjajućeg skupa i jednog najmanjeg pogadjajućeg skupa.
  - (b) **(3 poena)** Dati naivan približan algoritam i oceniti njegov faktor aproksimacije u slučaju da su svi skupovi u kolekciji  $C$  kardinalnosti 3. Osmisliti primer u kome ovaj algoritam daje pogadjajući skup koji nije najmanji.
  - (c) **(3 poena)** Dati jedan pohlepan i jedan randomizovan aproksimativni algoritam za ovaj problem.
  - (d) **(2 poena)** Problem pokrivanja skupova glasi: Data je kolekcija skupova  $S$ , izabrati najmanji mogući broj skupova iz ove kolekcije tako da se svaki element svakog skupa iz  $S$  nalazi u nekom od odabranih skupova. Pokazati da su problem pokrivanja skupova i problem najmanjeg pogadjajućeg skupa suštinski isti.
2. Upotrebom sufiksni nizova odrediti koliko različitih podstringova se nalazi u datom stringu.
  - (a) **(2 poena)** Odrediti elemente sufiksnog niza za string "ababa".
  - (b) **(3 poena)** Objasniti pojam najdužeg zajedničkog prefiksa (engl. *LCP*) i odrediti članove LCP niza za string "ababa".
  - (c) **(5 poena)** Objasniti proceduru za određivanje broja različitih podstringova na primeru stringa "ababa".
3. Razmotrimo strukturu podataka crveno-crna stabla.

- (a) **(3 poena)** Dokazati da je u bilo kom crveno-crnom stablu, svaki put od proizvoljnog čvora  $N$  do proizvoljnog lista najviše dva puta duži od puta od  $N$  do nekog drugog lista.
- (b) **(4 poena)** Prikazati crveno-crno stablo nakon umetanja elemenata 2, 1, 4, 5, 9, 3, 6, 7 u prazno stablo. Nacrtati i objasniti svaki korak.
- (c) **(3 poena)** Koji je najveći mogući broj unutrašnjih čvorova u crveno-crnom stablu visine  $k$ ? Koji je najmanji broj?
4. Problem prefiksa glasi: "Neka je  $*$  proizvoljna asocijativna binarna operacija i neka je dat niz brojeva  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Izračunati vrednosti izraza oblika  $x_1 * x_2 * \dots * x_k$  za  $k = 1..n$ ." Konstruisati paralelni algoritam za rešavanje problema prefiksa na  $n \times m$  mreži. Svaki procesor čuva jedan broj (procesor na poziciji  $(i, j)$  čuva broj  $x_{i*m+j}$  i u njemu na kraju treba da se nalazi vrednost sume  $x_0 + x_1 + \dots + x_{i*m+j}$ ).

- (a) **(5 poena)** Objasniti po koracima algoritam za mrežu dimenzija  $4 \times 4$ .



(a) Ulaz



(b) Izlaz

- (b) **(5 poena)** Upštiti algoritam iz prethodnog dela na mreže proizvoljnih dimenzija.
5. Neka je dat graf  $G = (V, E)$ . Podskup  $S$  grana iz  $E$  takav da nikoje dve grane iz  $S$  nemaju zajednički čvor naziva se uparivanje grafa  $G$ .
- (a) **(3 poena)** Konstruisati algoritam linearne složenosti za odredjivanje optimalnog uparivanja u stablu.
- (b) **(1 poen)** Koliko ima savršenih uparivanja u kompletnom grafu sa 6 čvorova?
- (c) **(3 poena)** Koliko ima savršenih uparivanja u kompletnom grafu sa  $n$  čvorova?
- (d) **(3 poena)** Neka je dat graf  $G$  i proizvoljna njegova dva maksimalna uparivanja  $M_1$  i  $M_2$ . Dokazati da važi  $|M_1| \leq 2|M_2|$ .