



1. Дефинисати следеће појмове (а-д):

б) [2п] Нека су u и v међусобно ортогонални вектори. Доказати $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2$;

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2 \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0 \text{ зер } u \perp v} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

е) [3п] Одредити једначину нормале n из тачке $A(7,3)$ на праву $p: -3x + 4y = 6$, као и растојање тачке A од праве p .

$$A(7,3) \in n \quad n \perp p \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_p = (-3, 4) \Rightarrow n: \frac{x-7}{-3} = \frac{y-3}{4}, \quad d(A, p) = \frac{|-3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

2. [10п] Нека су U и W векторски потпростори од $M_2(\mathbb{R})$ дати са

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b + c + d = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 0, c - 2d = 0 \right\}.$$

Одредити базе и димензије потпростора U , W , $U \cap W$ и $U + W$.

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -b-c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right), \quad \dim U = 3$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ 2d & d \end{bmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad \dim W = 2$$

$$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} b + c + d = 0 \\ a + b = 0 \\ c - 2d = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} c = 2d \Rightarrow b = -3d \\ a = -b = 3d \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 3d & -3d \\ 2d & d \end{bmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad \dim U \cap W = 1$$

$$\dim(U+W) = \underbrace{\dim U}_3 + \underbrace{\dim W}_2 - \underbrace{\dim(U \cap W)}_1 = 4 \Rightarrow U+W = M_2(\mathbb{R})$$

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$. Израчунати A^{2026} .

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_A(\lambda) = (\lambda+1)\lambda(\lambda-1) \text{ нема вишеструке нуле} \Rightarrow A \text{ дијагон. тип}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = -1 & \lambda_2 = 0 & \lambda_3 = 1 \\ (A+E)u = 0 & Au = 0 & (A-E)u = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 & \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 & \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \\ \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=c & \Rightarrow b=0 \Rightarrow c=0 & \Rightarrow b=c \Rightarrow a=2c \\ u_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & u_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & u_3 = \begin{bmatrix} 2c \\ c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{2026} = P D^{2026} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. [10п] Нека је

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid 2a + b + c + 3d = 0, \quad 3a + 2b + 2c + d = 0, \quad a + 2b + 2c - 9d = 0\}.$$

Одредити базу и димензију векторских простора U и $U^\perp$ у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$. Ком од потпростора U и $U^\perp$ је вектор $v = (7, -4, -1, 2)$ ближи?

$$\begin{aligned} 2a + b + c + 3d &= 0 \quad \text{---} 2 \\ 3a + 2b + 2c + d &= 0 \quad \text{---} 1 \\ a + 2b + 2c - 9d &= 0 \quad \text{---} 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2a + b + c + 3d &= 0 \\ -a &= -5d \\ -3a &= -15d = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow b = 7d - c \\ &\Rightarrow a = -5d \\ &\Rightarrow \dim U = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = \{(-5d, 7d - c, c, d) \mid c, d \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0, -1, 1, 0), (-5, 7, 0, 1))$$

$$U = \mathcal{L}((2, 1, 1, 3), (3, 2, 2, 1), (1, 2, 2, -9))^\perp = \mathcal{L}((2, 1, 1, 3), (3, 2, 2, 1))^\perp$$

$$\Rightarrow U^\perp = \mathcal{L}((2, 1, 1, 3), (3, 2, 2, 1)), \quad \dim U^\perp = 2$$

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U, \quad u_2 \in U^\perp$$

$$u = u_1 + \alpha f_1 + \beta f_2 \quad / \circ f_1 \quad / \circ f_2$$

$$15 = 15\alpha + 13\beta \quad / \cdot (-13) \quad \Rightarrow 101\beta = 0$$

$$13 = 13\alpha + 18\beta \quad / \cdot 15 \quad \Rightarrow 13 = 13\alpha \quad \Rightarrow \alpha = 1$$

$$u_2 = f_1 = (2, 1, 1, 3)$$

$$u_1 = u - u_2 = (5, -5, -2, -1)$$

$$d(u, U) = \|u_2\| = \sqrt{15} < d(u, U^\perp) = \|u_1\| = \sqrt{55} \quad \Rightarrow u \text{ ближе } U$$

5. Дате су праве $p: \frac{x-7}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и $q: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ и тачка $L(2, -3, 1)$.

а) [3п] Одредити пројекцију M тачке L на праву p .

б) [7п] Одредити једначину праве ℓ која садржи тачку L и сече праве p и q .

а) 1) α т.д. $L \in \alpha, \alpha \perp p \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} = (1, -1, 1)$
 $\Rightarrow \alpha: 1(x-2) - 1(y+3) + 1(z-1) = 0 \Rightarrow \alpha: x - y + z - 6 = 0$
 2) $M = p \cap \alpha: p: \begin{cases} x = t+7 \\ y = -t-4 \\ z = t+1 \end{cases} \Rightarrow t+7 - (-t-4) + t+1 - 6 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow M(5, -2, -1)$

б) $L(2, -3, 1) \in \ell, \vec{\ell} = (a, b, c), P(7, -4, 1) \in p, \vec{p} = (1, -1, 1)$
 $Q(-1, -2, 1) \in q, \vec{q} = (3, -3, 2)$
 1) ℓ сече $p \Rightarrow 0 = [\vec{\ell}, \vec{p}, \vec{LP}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a + 5b + 4c = 0 \quad / \cdot 2$
 2) ℓ сече $q \Rightarrow 0 = [\vec{\ell}, \vec{q}, \vec{LQ}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow -2a - 6b - 6c = 0 \quad / +$
 $\Rightarrow \ell: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}$
 $\Rightarrow 4b + 2c = 0 \Rightarrow c = -2b \Rightarrow a = 3b \Rightarrow \vec{\ell} = b(3, 1, -2)$

6. За линеарно пресликавање $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ важи

$$L(\overset{u_1}{1, -1, 1}) = (0, 2, 1), \quad L(\overset{u_2}{2, 0, a}) = (-2, 6, 4), \quad L(\overset{u_3}{a, 2, a}) = (2, 2, 0).$$

а) [3п] Одредити вредности реалног параметра a за које је пресликавање L јединствено одређено.

б) [7п] За $a = 0$ одредити $L(x, y, z)$, а затим наћи $\text{Im} L$ и $\text{Ker} L$.

а) L јединствено $\Leftrightarrow u_1, u_2, u_3$ чине базу $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ a & 2 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 + 4 - 2a + 2a = -a^2 + 4 \neq 0$
 $\Rightarrow a^2 \neq 4 \Rightarrow a \neq \pm 2$

б) $a = 0 \neq \pm 2 \Rightarrow L$ јединствено
 $(x, y, z) = (\alpha, -\alpha, \alpha) + (2\beta, 0, 0) + (0, 2\gamma, 0)$
 $\alpha + 2\beta = x \Rightarrow \beta = x/2 - \alpha/2$
 $-\alpha + 2\gamma = y \Rightarrow \gamma = y/2 + \alpha/2$
 $\alpha = z \Rightarrow \alpha = z$
 $L(x, y, z) = L(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2) + \gamma L(u_3)$
 $= z(0, 2, 1) + (x/2 - z/2)(-2, 6, 4) + (y/2 + z/2)(2, 2, 0)$
 $= (-x + y + 2z, 3x + y, 2x - z)$
 $\text{Ker} L = \{(x, y, z) \mid (-x + y + 2z, 3x + y, 2x - z) = (0, 0, 0)\}$
 $= \{(x, y, z) \mid y = -3x, z = 2x\}$
 $\text{Ker} L = \mathcal{L}((1, -3, 2))$
 $a = 0 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3) \Rightarrow \text{Im} L = \mathcal{L}(Lu_1, Lu_2, Lu_3)$
 $\text{Im} L = \mathcal{L}((0, 2, 1), (-2, 6, 4), (2, 2, 0))$
 $\text{Im} L = \mathcal{L}((0, 2, 1), (-2, 6, 4))$