

Materijali za predmet

B I O M A T E M A T I K A

Matematički fakultet

Zoran Rakić

Beograd, 2023. godine

S A D R Ź A J

1. UVOD	1
1.1 Skupovi	1
1.2 Funkcije	4
1.3 Relacije	7
1.4 Brojevi: celi, racionalni i realni	9
1.5 Kompleksni brojevi	18
1.6 Elementi kombinatorike	23
1.7 Zadaci	25
2. NIZOVI	33
2.1 Limes niza	33
2.2 Tačka nagomilavanja niza i podniz	35
2.3 Broj e	37
2.4 Svojstva limesa	38
2.5 Redovi i njihova konvergencija	42
2.6 Apsolutna i uslovna konvergencija. Alternirani redovi	45
3. NEPREKIDNE FUNKCIJE	49
3.1 Limes funkcije	49
3.2 Svojstva limesa funkcija	51
3.3 Neprekidnost	53
3.4 Globalna svojstva neprekidnih funkcija	55
4. DIFERENCIJALNI RAČUN	59
4.1 Izvod funkcije	59
4.2 Svojstva diferenciranja	63
4.3 Izvodi elementarnih funkcija	68
4.4 Izvodi višeg reda	70

4.5 Osnovne teoreme diferencijalnog računa	72
4.6 Tejlorova formula	75
4.7 Lopitalovo pravilo	78
4.8 Ekstremne vrednosti funkcija	80
4.9 Konveksnost i konkavnost funkcija	82
4.10 Ispitivanje toka funkcija	85
5.11 Zadaci	90
 5. INTEGRALNI RAČUN	 91
5.1 Neodređeni integral	91
5.2 Osnovne metode integracije neodređenog integrala	93
5.3 Integracija racionalnih funkcija	96
5.4 Određeni integral	102
5.5 Svojstva određenog integrala	106
5.6 Fundamentalna teorema	108
5.7 Osnovne metode integracije određenog integrala	111
5.8 Nesvojstveni integral	114
5.9 Primene neodređenog integrala	117
 6. LINEARNA ALGEBRA	 121
6.1 Vektori i vektorski prostor	121
6.2 Baza vektorskog prostora. Dimenzija. Koordinate.	128
6.3 Potprostor. Presek potprostora. Suma i proizvod potprostora	131
6.4 Skalarni proizvod	138
6.5 Vektorski i mešoviti proizvod	142
6.6 Linearni operator	146
6.7 Regularni operatori	150
6.8 Elementarne transformacije	154
6.9 Determinanta	162
6.10 Sistemi linearnih jednačina	169

6.11 Polinomi	180
6.12 Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori	186
7. ANALITIČKA GEOMETRIJA	197
7.1 Linearna analitička geometrija prave i ravni	197
7.2 Jednačina prave u ravni	198
7.3 Koordinatni sistemi u ravni	203
7.4 Jednačina ravni u prostoru	207
7.5 Prave u prostoru. Mimosilazne prave	210
7.6 Koordinatni sistemi u prostoru	215
7.7 Konusni preseki	221
7.8 Zadaci	226
8. DODATAK	229
8.1 Uvođenje vektora	229
8.2 Vektorski prostor	233
8.3 Baza i dimenzija	236
8.4 Paralelno projektovanje	237
LITERATURA	240

Uvod

Ova glava sadrži potrebna predznanja za uspešno savladavanje gradiva koje je izloženo u nastavku ove knjige. Velika većina ovih predznanja trebalo bi da je čitaocima poznata iz srednje škole. Preostalo gradivo predstavlja nešto što je važno, a tome se ne pridaje toliki značaj u srednjim školama, a manji deo su neke generalizacije ili informacije o nekim objektima o kojima više detalja čitaoci mogu naći u literaturi.

1. Skupovi

1.1. U ovoj knjizi nećemo uvoditi pojam skupa formalnom definicijom niti ćemo izlaganja zasnivati na aksiomatskoj teoriji skupova, već ćemo koristiti intuitivan i operativan pristup skupu kao kolekciji datih objekata. Za one koji su skloniji formalnom i apstraktnom jeziku možemo tretirati skup kao osnovni pojam koji ne definišemo.

Uz pojam skupa javlja se i pojam **elementa skupa** (ili **pripadanja skupu**) koji takođe ne definišemo. Za dati element a skupa A , pišaćemo $a \in A$. Negaciju ovog iskaza, tj. a ne pripada (nije element) A zapisujemo $a \notin A$.

Primer. Najvažniji skupovi brojeva koji su nam poznati iz srednje škole su $\mathbb{N}$ –skup prirodnih brojeva, $\mathbb{Z}$ –skup celih brojeva, $\mathbb{Q}$ –skup racionalnih brojeva, $\mathbb{R}$ –skup realnih brojeva i $\mathbb{C}$ –skup kompleksnih brojeva.

Skup koji nema elemenata nazivamo **praznim skupom** i obeležavamo ga sa $\emptyset$. Skup A je **konačan** ako ima konačan broj elemenata. Sa $\|A\|$ ili sa $\text{card} A$ obeležavamo broj elemenata skupa A .

Kako se skupovi sastoje od elemenata skupovi se obično zadaju na dva načina:

- (i1) popisivanjem svih elemenata, npr. $A = \{1, 2, 3, 7\}$,
- (i2) zadavanjem zajedničkom osobinom, tj. $A = \{x \in X \mid P(x)\}$ je skup svih onih elemenata datog skupa X koji zadovoljavaju osobinu P . Tako skup svih realnih brojeva većih od 3 obeležavamo sa $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 3\}$.

Drugi način zadavanja skupova je mnogo prikladniji i uglavnom se koristi u matematici.

1.2. Podskup. Skup B je **podskup** skupa A , ako je svaki element skupa B ujedno i element skupa A , tj. ako iz $x \in B$ sledi da je $x \in A$. To zapisujemo kao $B \subseteq A$ ili ponekad kao $A \supseteq B$, i čitamo A je **nadskup** od B (ili A sadrži B). Skupovi A i B su jednaki ako sadrže iste elemente, preciznije oni su jednaki ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, i tada pišemo $A = B$. Skup B je **pravi podskup** skupa A ako je $B \subseteq A$ i

$A \neq B$. Za pravi podskup koristimo oznaku $B \subsetneq A$ (ili $B \subset A$). Jasno, prazan skup je jedinstven i on je podskup svakog skupa. Očigledno važe tvrdnje,

$$(i1) \quad A \subseteq A,$$

$$(i2) \quad A \subseteq B \text{ i } B \subseteq C \implies A \subseteq C.$$

Primer. Kao što znamo: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$, jer $\mathbb{Z} \ni 0 \notin \mathbb{N}$; $\mathbb{Q} \ni 1/2 \notin \mathbb{Z}$; $\mathbb{R} \ni \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; i $\mathbb{C} \ni i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

U većini primena skupovi sa kojima radimo su podskupovi nekog datog skupa X , koji se ponekad naziva **univerzalnim skupom** (ili kraće **univerzumom**). Skup svih podskupova datog skupa X , obeležavamo sa $\mathcal{P}(X)$ i zovemo ga **partitivnim skupom skupa X** .

1.3. Operacije sa skupovima. Neka je dat skup X . Na skupu svih podskupova skupa X definisane su sledeće (prirodne) operacije,

komplement skupa $A \subseteq X$ je skup $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$.

unija skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$.

presek skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$.

razlika skupova A i $B \subseteq X$ je skup $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$.

Primetimo, da je $A \cup A^c = X$ i $A \cap A^c = \emptyset$, kao i to da je $A \setminus B = A \cap B^c$. Dakle, razlika skupova nije osnovna operacije jer se može izraziti preko drugih. Za skupove A i B kažemo da su **disjunktni** ako je $A \cap B = \emptyset$. **Simetrična razlika skupova A i B** je skup $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.4. Osnovna svojstva unije i preseka. Za proizvoljne skupove $A, B, C \subseteq X$ važe sledeća svojstva:

(asocijativnost)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$
(komutativnost)	$A \cup B = B \cup A,$	$A \cap B = B \cap A,$
(distributivnost I)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$	
(distributivnost II)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$	
(neutral)	$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A,$	$A \cap X = X \cap A = A,$
(idempotentnost)	$A \cup A = A,$	$A \cap A = A,$
(de Morganovi ¹ zakoni)	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

Dokaz. Dokazaćemo osobinu distributivnost II. Ostale osobine dokazuju se analogno. Potrebno je dokazati jednakost dva skupa, a to je ekvivalentno (vidi 1.2) sa pokazivanjem dve inkluzije: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Pokažimo prvu: neka je $x \in A \cap (B \cup C)$, tada je $x \in A$ i $x \in B \cup C$. Kako je $x \in B \cup C$, $x \in B$ ili $x \in C$ i kako je $x \in A$ sledi da je $x \in A \cap B$ ili $x \in A \cap C$. Dakle, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Drugu inkluziju možemo dokazati na isti način, ali dajemo kraći dokaz u kojem smo iskoristili očiglednu osobinu inkluzije skupova.

Kako je $B \subseteq B \cup C$, odmah sledi da je $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$. Slično važi i $A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$. Dakle,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap (B \cup C)) \cup (A \cap (B \cup C)) = (A \cap (B \cup C)). \quad \square$$

¹ Augustus de Morgan, 1806–1871, engleski matematičar i logičar.

1.5. Proširenje osnovnih skupovnih operacija. Neka je dat neki neprazni skup X i neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova skupa X tada definišemo uniju skupova iz $\mathcal{F}$ kao skup svih onih elemenata koji pripadaju barem jednom od skupova familije $\mathcal{F}$. Analogno, presek skupova iz $\mathcal{F}$ je skup koji se sastoji od onih elemenata koji pripadaju svim skupovima familije $\mathcal{F}$. Operativnija realizacija ove konstrukcije sastoji se u tome da elemente familije $\mathcal{F}$ indeksiramo elementima nekog skupa S , tj. $\mathcal{F} = \{A_\alpha \subseteq X \mid \alpha \in S\}$. Ispostavlja se da mnoga od gore pomenutih svojstava važe i za familije skupova. Preciznije, neka je data familija $\mathcal{F}$ i neki $B \subseteq X$

$$\begin{array}{ll} \text{(i1)} \quad \overline{\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in S} \overline{A_\alpha} & \text{(i3)} \quad \left(\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_{\alpha \in S} (A_\alpha \cap B) \\ \text{(i2)} \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in S} \overline{A_\alpha} & \text{(i4)} \quad \left(\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha\right) \cup B = \bigcap_{\alpha \in S} (A_\alpha \cup B) \end{array}$$

1.6. Dekartov² proizvod. Dekartov proizvod dva skupa A i B , je skup

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

pri čemu su uređeni parovi (a_1, b_1) i (a_2, b_2) jednaki ako i samo ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$. Iz same definicije jasno je da Dekartov proizvod nije komutativan, npr. čim $A \neq B$, sledi da $A \times B \neq B \times A$. Dekartov proizvod direktno se uopštava na konačan broj faktora, tj.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}$$

i uređene k -torke $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ se podudaraju ako i samo ako (**=akko**)³ je $a_j = b_j$ ($j = 1, \dots, k$). Direktan proizvod može se generalisati na proizvoljnu familiju skupova $\mathcal{F} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, što ćemo zapisivati kao $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Ako su skupovi A i B konačni tada je i skup $A \times B$ konačan. Specijalno, ako skup A ima n elemenata, a skup B m elemenata, skup $A \times B$ imaće $n \cdot m$ elemenata. Na ovoj jednostavnoj činjenici zasnivaju se osnovne tehnike prebrojavanja skupova.

Skup elemenata

$$\{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A,$$

zove se dijagonala Dekartovog proizvoda $A \times A$.

1.7. Dekartov proizvod i osnovne skupovne operacije. Za svaka tri skupa A , B , i C važi:

²Descartes Rene, 1596–1650, veliki francuski matematičar i filozof, utemeljivač Analitičke geometrije.

³ U buduće ćemo frazu "ako i samo ako" kraće zapisivati "akko".

- (i1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, (i2) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$,
 (i3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, (i4) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
 (i5) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Dokaz. Pokažimo (i1). Ova tvrdnja posledica je sledećeg niza ekvivalencija:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cup B) \times C &\iff x \in A \cup B \text{ i } y \in C \iff (x \in A \text{ i } y \in C) \text{ ili } (x \in B \text{ i } y \in C) \\ &\iff ((x, y) \in A \times C) \text{ ili } ((x, y) \in B \times C) \iff (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C). \end{aligned}$$

Ostala tvrđenja dokazuju se analogno. □

2. Funkcije

1.8. Definicija. Neka su A i B neprazni skupovi tada je **funkcija (preslikavanje)** uređena trojka (A, B, f) čije prve dve komponente su dati skupovi A i B , a treća je 'zakon' f po kojem se svakom elementu skupa A dodeljuje tačno jedan element skupa B . Obično se uređena trojka (A, B, f) poistovećuje sa f , i zapisuje kao $f : A \longrightarrow B$. Postoje razne ekvivalentne definicije pojma funkcije, koja je bez sumnje jedan od najvažnijih objekata u matematici. Tako npr. funkciju sa A u B možemo definisati kao skup $M_f \subseteq A \times B$ takav da za svaki $a \in A$ postoji jedinstven $b \in B$ takav da je uređeni par $(a, b) \in M_f$. Za element b , zbog njegove jedinstvenosti, koristi se oznaka $b = f(a)$. Skup A zove se **domen funkcije** f , a B njen **kodomen**.

Napomenimo da su funkcije (A, B, f) i (C, D, g) jednake akko je $A = C$, $B = D$ i $f = g$ (ekvivalentno: za svaki $x \in A = C$, $f(x) = g(x)$).

1.9. Injekcija. Surjekcija. Bijekcija. Za funkciju $f : A \longrightarrow B$, kažemo da je **injekcija** ili '1–1' ako za bilo koja dva različita elementa $x_1, x_2 \in A$ i njihove slike su različite $f(x_1) \neq f(x_2)$. Formalnije, ovaj uslov zapisujemo:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2) \implies (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Često se u dokazima koristi **obrat po kontrapoziciji**⁴ gornje implikacije, tj. sledeća implikacija,

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2).$$

Za funkciju $f : A \longrightarrow B$, kažemo da je **surjekcija** ili 'na' ako za svaki $b \in B$ postoji $x \in A$ takav da je $b = f(x)$. Formalnije,

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A) \text{ takav da je } b = f(a).$$

Za funkciju koja je istovremeno '1–1' i 'na' kažemo da je **bijekcija**.

⁴ Ako su a i b iskazi tada je iskaz $a \implies b$ ekvivalentan sa $\neg b \implies \neg a$. $\neg a$ je negacija od a .

1.10. Slika i praslika. Inverzna funkcija. Neka je data funkcija $f : A \longrightarrow B$, i neka je $X \subseteq A$ tada skup

$$f(X) = \{y \in B \mid y = f(x), x \in X\} = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B,$$

nazivamo slikom skupa X . Specijalno, ako je $X = A$ tada za $f(A)$ koristimo oznaku $\text{Im} f$ i nazivamo ga slikom funkcije f . Jasno, funkcija f je 'na' akko je $\text{Im} f = B$. Analogno, za $Y \subseteq B$ skup

$$f^{-1}(Y) = \{y \in A \mid f(y) \in Y\} \subseteq A,$$

nazivamo praslikom skupa Y .

Primetimo⁵ da za neki $b \in B$ može postojati više elemenata iz A koje f preslika u b . Tada nije moguće na jedinstven način definisati funkciju $f^{-1} : B \longrightarrow A$, očiglednom formulom $f^{-1}(b) = a$, ako je $b = f(a)$. Da bismo mogli definisati f^{-1} potrebno je da se praslika svakog elementa iz B sastoji od tačno jednog elementa, što je ekvivalentno sa činjenicom da je funkcija f bijekcija. Ispostavlja se da je '1–1' suštinska osobina za egzistenciju inverznog preslikavanja, jer ako f nije 'na' onda možemo suziti kodomen na $\text{Im} f$ i tako dobiti bijekciju $\tilde{f} : A \longrightarrow \text{Im} f$.

Dakle, ako je f bijekcija onda je dobro definisano preslikavanje $f^{-1} : B \longrightarrow A$, formulom: $f^{-1}(b) = a$, za $b = f(a)$. Preslikavanje f^{-1} nazivamo inverznom funkcijom funkcije f .

1.11. Kompozicija funkcija. Neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$, dve funkcije. Tada na prirodan način definišemo funkciju $g \circ f : A \longrightarrow C$ formulom

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)), \quad \text{za sve } x \in A.$$

Funkcija $g \circ f$ zove se kompozicija funkcija f i g . Za kompoziciju funkcija važi svojstvo $(h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ g)(f(x))$, koja se naziva asocijativnost. Preciznije, važi sledeća jednostavna teorema.

Teorema. Kompozicija funkcija je asocijativna kad ima smisla.

Dokaz. Dokaz ove činjenice posledica je sledećeg niza jednakosti (za svako $x \in A$),

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x),$$

što kraće zapisujemo: $((h \circ g) \circ f) = (h \circ (g \circ f))$.

I dokaz je gotov □

Na svakom nepraznom skupu A definišemo funkciju $\text{id}_A(x) = x$ koju nazivamo identitetom na A . Neka je $f : A \longrightarrow B$, funkcija, tada je egzistenciju inverzne funkcije f^{-1} moguće opisati preko kompozicije funkcija na sledeći način:

ako za datu funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoje funkcije $g : B \longrightarrow A$ i $h : B \longrightarrow A$ takve da je

$$f \circ g = \text{id}_B \text{ i } h \circ f = \text{id}_A \text{ tada je } h = g = f^{-1}.$$

⁵ Iz definicije funkcije.

Primer. Navedimo sada nekoliko važnih primera inverznih funkcija, koji su nam poznati iz ranijeg školovanja.

- (i1) Za linearnu funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ odredimo inverznu funkciju. Koristimo relaciju $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ i nalazimo

$$\text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x = (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \underline{2f^{-1}(x) + 3}. \quad \text{Odakle sledi, } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

- (i2) Za stepene funkcije, $f_{2n+1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$, gde je $n \in \mathbb{N}$, inverzne funkcije su:
 $f_{2n+1}^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{2n+1}^{-1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$.

- (i3) Za stepene funkcije, $f_{2n}(x) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f_{2n}(x) = x^{2n}$, gde je $n \in \mathbb{N}$, inverzne funkcije su:
 $f_{2n}^{-1}(x) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f_{2n}^{-1}(x) = \sqrt[2n]{x}$,

- (i4) Eksponecijalna funkcija,⁶ $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ ima inverznu funkciju - logaritamsku funkciju
 $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln(x)$.

- (i5) Inverzne funkcije osnovnih trigonometrijskih funkcija, $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$
i $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \cos(x)$ su $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ i
 $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $g^{-1}(x) = \arccos(x)$, redom.

- (i6) Za funkcije, $f(x) : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$ i $g(x) : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \text{ctg}(x) = \cos(x)/\sin(x)$ inverzne funkcije su $f^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$, $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$, i
 $g^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $g^{-1}(x) = \text{arcctg}(x)$ redom.

Napomenimo da smo u primerima (i3), (i5) i (i6), morali da smanjimo domen funkcija f koje nisu '1-1' na čitavom domenu.

1.12. Neka svojstva kompozicije. Neka su $f : A \rightarrow B$, i $g : B \rightarrow C$, dve funkcije. Tada ako

- (i1) je $g \circ f$ '1-1' onda je f '1-1', (i2) je $g \circ f$ 'na' onda je g 'na',
(i3) su f i g '1-1' onda je $g \circ f$ '1-1', (i4) su f i g 'na' onda je $g \circ f$ 'na',
(i5) su f i g bijekcije onda je i
 $g \circ f$ bijekcija.

Dokaz. (i5) je posledica (i3) i (i4). Dokažimo prvo (i2). Neka je $g \circ f$ 'na' tada za svaki $y \in C$ postoji neki $x \in A$ takav da je $(g \circ f)(x) = y$. Sada iz definicije kompozicije sledi da je $g(f(x)) = y$ i ako stavimo $z = f(x) \in B$ vidimo da je $g(z) = y$, tj. g je 'na'.

Dokažimo još (i3). Neka su f i g '1-1'. Tada za $x, y \in A$ i $x \neq y$ imamo redom,

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y) \implies g(f(x)) \neq g(f(y)) \iff (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y),$$

odakle odmah sledi da je funkcija $g \circ f$ injekcija. □

⁶ Eksponecijalna funkcija je jedna od najvažnijih funkcija u matematici, jer važi poznata formula, $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, koja povezuje dve osnovne operacije u skupu $\mathbb{R}$, sabiranje i množenje realnih brojeva.

1.13. Funkcije i osnovne skupovne operacije. Neka je $f : A \longrightarrow B$ funkcija, neka su $X, X_1 \subseteq A$ i neka su $Y, Y_1 \subseteq B$, tada

- (i1) za $X \subseteq X_1 \implies f(X) \subseteq f(X_1)$, (i2) $f(X \cup X_1) = f(X) \cup f(X_1)$,
 (i3) $f(X \cap X_1) \subseteq f(X) \cap f(X_1)$, (i4) za $Y \subseteq Y_1 \implies f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y_1)$,
 (i5) $f^{-1}(Y \cup Y_1) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y_1)$, (i6) $f^{-1}(Y \cap Y_1) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y_1)$,
 (i7) $f^{-1}(Y \setminus Y_1) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Y_1)$, (i8) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ i $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

Dokaz. Iz same definicije slike i praslike očigledno važi (i1), (i4) i (i8). (i3) sledi iz

$$\begin{aligned} x \in f(X \cap X_1) &\implies \exists y \in X \cap X_1 \text{ takav da } x = f(y) \implies \exists y \in X \text{ i } y \in X_1 \text{ takav da} \\ x = f(y) &\implies x \in f(X) \text{ i } x \in f(X_1) \implies x \in f(X) \cap f(X_1). \end{aligned}$$

Obratna inkluzija ne mora da važi jer npr. za neki $x \in f(X) \cap f(X_1)$ mogu postojati $y \in X \setminus X_1$ i $y_1 \in X_1 \setminus X$ takvi da je $x = f(y) = f(y_1)$ i ne mora da postoji $z \in X \cap X_1$ takav da je $f(z) = x$.

(i5) je posledica sledećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \cup Y_1) &\iff f(x) \in Y \cup Y_1 \iff f(x) \in Y \text{ ili } f(x) \in Y_1 \iff x \in f^{-1}(Y) \text{ ili } x \in f^{-1}(Y_1) \\ &\iff x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y_1). \end{aligned}$$

(i2), (i6) i (i7) analogno kao (i5)

□.

3. Relacije

1.14. Relacija. n -arna relacija ρ na skupu A je svaki podskup Dekartovog proizvoda

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ primeraka skupa } A}.$$

Od svih relacija na skupu A najvažnije su **binarne relacije**, dakle, podskupovi skupa $A \times A$. Za $(a, b) \in \rho$ koristi se i oznaka $a \rho b$. Kako su relacije ρ, σ na A podskupovi jasno je što znače iskazi $\rho \subseteq \sigma$, $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$, ρ^c .

1.15. Operacije na skupu relacija. Neka je dat skup A na njemu postoji specijalna relacija: **dijagonala** $j_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Za proizvoljnu binarnu relaciju ρ na A definišemo i relaciju $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$. Takođe za binarne relacije ρ, σ na A definišemo njihov **proizvod** – relaciju $\rho\sigma$, na sledeći način: $x(\rho\sigma)y$ akko postoji $z \in A$ takav da je $x\rho z$ i $z\sigma y$.

1.16. Svojstva relacija. Najvažnije osobine koju neka binarna relacija ρ na skupu A može imati su:

- (r) **refleksivnost**: $(a, a) \in \rho$ za svaki $a \in A \iff j_A \subseteq \rho$;
- (ar) **antirefleksivnost**: $(a, a) \notin \rho$ za svaki $a \in A \iff j_A \cap \rho = \emptyset$;
- (s) **simetričnost**: iz $(a, b) \in \rho$ sledi $(b, a) \in \rho \iff \rho = \rho^{-1}$;
- (a) **antisimetričnost**: iz $(a, b) \in \rho$ i $(b, a) \in \rho$ sledi $a = b \iff \rho \cap \rho^{-1} = j_A$;
- (t) **tranzitivnost**: iz $(a, b), (b, c) \in \rho$ sledi $(a, c) \in \rho \iff \rho^2 \subseteq \rho$.

1.17. Relacija ekvivalencije. Relaciju ρ na A koja je refleksivna (r), simetrična (s) i tranzitivna (t) zovemo **relacijom ekvivalencije**. Svaka relacija ekvivalencije na skupu A razbija taj skup na međusobno disjunktne i neprazne klase (podskupove),

$$(1.1) \quad A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \quad \text{za } \alpha \neq \beta,$$

pri čemu je I skup kojim su indeksirane klase. Dakle, $A_\alpha = [a_\alpha] = \{x \in A \mid x \rho a_\alpha\}$ je klasa svih onih elemenata iz A koji su u relaciji ρ sa elementom a_α .

Obratno, svako razbijanje (1.1) nepraznog skupa A na disjunktne uniju nepraznih skupova definiše relaciju ekvivalencije ρ (na A) na sledeći način: $x \rho y$ akko x, y pripadaju istoj klasi.

Primer. Relacije ekvivalencije su npr.

- (i1) one relacije u čijoj osnovi je neka jednakost, među nekim objektima, kao što je npr. jednakost skupova; podudarnost trouglova u ravni (dva trougla se podudaraju ako postoji translacija i rotacija u ravni kojom jedan prelazi u drugi); jednakost razlomaka $m/n = m_1/n_1 \iff m \cdot n_1 = n \cdot m_1$, i sl.,
- (i2) biti paralelan na skupu svih pravih u ravni ili prostoru;
- (i3) za fiksni prirodan broj $n > 1$ na skupu $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{Z}$) relacija $x \rho y$ akko x i y daju isti ostatak pri deljenju sa n .

1.18. Relacija parcijalnog poretka. Refleksivna, antisimetrična i tranzitivna binarna relacija ρ na skupu A zove se **relacija parcijalnog poretka**. Obično se relacija poretka označava sa $\leq$.

Antirefleksivna, antisimetrična i tranzitivna binarna relacija ρ na skupu A zove se **relacijom strogog poretka**. Obično se relacija strogog poretka označava sa $<$.

Primer. Relacije parcijalnog (strogog) poretka su npr.

- (i1) $\leq$ ($<$) na skupu realnih brojeva;
- (i2) $\subseteq$ ($\subset$) na skupu svih podskupova datog nepraznog skupa X ;
- (i3) relacija deljivosti ($a \mid b$ a je deljiv sa b) na skupu $\mathbb{N}$.

1.19. Funkcija binarne realcije. Neka je ρ neka binarna relacija na skupu A . Tada na prirodan način definišemo funkciju

$$f_\rho : A \times A \longrightarrow \{0, 1\}, \quad \text{formulom} \quad f_\rho(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{ako } (a, b) \in \rho, \\ 0, & \text{ako } (a, b) \notin \rho. \end{cases}$$

Jasno je da je zadavanje relacije ρ na skupu A ekvivalentno sa zadavanjem funkcije f_ρ na $A \times A$. Ako je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ konačan skup onda funkciju relacije f_ρ možemo predstaviti u obliku sledeće tablice:

f_ρ	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_m
a_1	$f_\rho(a_1, a_1)$	$f_\rho(a_1, a_2)$	$\cdots$	$f_\rho(a_1, a_k)$	$\cdots$	$f_\rho(a_1, a_m)$
a_2	$f_\rho(a_2, a_1)$	$f_\rho(a_2, a_2)$	$\cdots$	$f_\rho(a_2, a_k)$	$\cdots$	$f_\rho(a_2, a_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_j	$f_\rho(a_j, a_1)$	$f_\rho(a_j, a_2)$	$\cdots$	$f_\rho(a_j, a_k)$	$\cdots$	$f_\rho(a_j, a_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_m	$f_\rho(a_m, a_1)$	$f_\rho(a_m, a_2)$	$\cdots$	$f_\rho(a_m, a_k)$	$\cdots$	$f_\rho(a_m, a_m)$

Primetimo da se iz gornje tablice odmah mogu prepoznati neke osobine relacija. Ako je relacija ρ

- **refleksivna**, svi elementi glavne dijagonale su 1,
- **antirefleksivna**, svi elementi glavne dijagonale su 0,
- **simetrična**, tada je tablica simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj.
 $f_\rho(a_k, a_j) = f_\rho(a_j, a_k)$,
- **antisimetrična** onda su na glavnoj dijagonali 1 i tablica je antisimetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. ako je za $k \neq j$, $f_\rho(a_k, a_j) = 0$ tada je $f_\rho(a_j, a_k) = 1$ i obratno.

4. Brojevi: celi, racionalni i realni

1.20. Prirodni brojevi. Skup $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, nazivamo skupom prirodnih brojeva. U ovom skupu dobro su definisane dve uobičajene binarne operacije ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$): sabiranje i množenje prirodnih brojeva, koje imaju sledeća svojstva ($\forall a, b, c \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} \text{(A1)} \quad a + (b + c) &= (a + b) + c, & \text{(A5)} \quad a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, \\ \text{(A4)} \quad a + b &= b + a, & \text{(A8)} \quad a \cdot b &= b \cdot a. \end{aligned}$$

Primetimo da za množenje postoji istaknuti broj 1, koji ima osobinu ($\forall a \in \mathbb{N}$),

$$\text{(A6)} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Ako skup $\mathbb{N}$ proširimo brojem 0, dobijamo skup $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ u kojem važi analogon svojstva (A6) za operaciju sabiranja prirodnih brojeva,

$$\text{(A2)} \quad a + 0 = 0 + a = a.$$

Operacije sabiranja i množenja povezane distributivnim zakonom ($\forall a, b, c \in \mathbb{N}$):

$$\text{(A9)} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

1.21. Matematička indukcija. Skup prirodnih brojeva može se opisati i Peanovim⁷ aksiomama:

⁷ Peano Giuseppe, 1858–1932, italijanski matematičar, jedan od osnivača matematičke logike i teorije brojeva.

- (i1) 1 je prirodan broj, dakle skup prirodnih brojeva nije prazan,
- (i2) dobro je definisano preslikavanje $\xi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, formulom $\xi(n) = n + 1$,
- (i3) 1 nije u slici preslikavanja ξ , tj. ne postoji prirodan x takav da je $\xi(x) = 1$,
- (i4) preslikavanje ξ je '1-1',
- (i5) (aksioma matematičke indukcije) za $M \subseteq \mathbb{N}$ takav da važi
 - (bi) $1 \in M$,
 - (ki) ako iz $n \in M$ sledi da je i $\xi(n) \in M$,
 tada je $M = \mathbb{N}$.

Primetimo da aksioma matematičke indukcije funkcioniše na sledeći način: $1 \in M$, zbog (bi), zatim (ki) primenimo na $n = 1$ i dobijamo da je $\xi(1) = 2 \in M$, zatim (ki) primenimo na $n = 2$ i dobijamo da je $\xi(2) = 3 \in M$, itd.

Napomenimo da se proverava (bi) iz gornje definicije zove **baza indukcije**, implikacija (ki) zove se **korak indukcije**, a $n \in M$ iz (ki) zove se **pretpostavka indukcije** koju ćemo obeležavati sa (pi). Aksiomu matematičke indukcije koristimo onda kada neku tvrdnju treba pokazati za svaki prirodan broj, a to ćemo raditi u mnogim glavama ove knjige.

Primer 1. Pokažite da za svaki prirodan broj n važi sledeća formula

$$(1.2) \quad 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dokaz. Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid (1.2) \text{ važi za } n\}$. Tada je očigledno $1 \in M$ jer je $1 = (1(1+1))/2$. Pretpostavimo da je neki prirodan broj $n \in M$, tada redom imamo,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \stackrel{\text{(pi)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 \\ &= \frac{n+1}{2} (n+2) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}, \end{aligned}$$

tj. i $n+1 \in M$. Sada AMI (aksioma matematičke indukcije) implicira da je $M = \mathbb{N}$, tj. (1.2) važi za sve prirodne brojeve. $\square$

Primer 2. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\forall \beta > -1$ važi Bernoullijeva nejednakost: $(1 + \beta)^n \geq 1 + n\beta$,

Dokaz. Baza indukcije je trivijalna, jer je $(1 + \beta)^1 \geq 1 + 1 \cdot \beta$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n , sada imamo redom

$$(1 + \beta)^{n+1} = (1 + \beta)(1 + \beta)^n \stackrel{\text{(pi)}}{\geq} (1 + \beta)(1 + n\beta) = 1 + (n+1)\beta + n\beta^2 \geq 1 + (n+1)\beta. \quad \square$$

1.22. Fibonačijev⁸ niz. Niz definisan rekurzivnom formulom,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad \text{uz} \quad a_1 = a_2 = 1,$$

⁸Fibonacci Leonardo, 1170–1240 (?), poznat i kao Leonardo iz Pise, italijanski matematičar.

zove se **Fibonaccijev niz**. Nekoliko prvih članova niza su: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Pokažite da

(i1) su svaka dva uzastopne člana niza uzajamno prosta.

(i2) da je svaki četvrti član niza deljiv sa 3.

Dokaz. (i2) Baza indukcije. $n = 1$ $a_{4 \cdot 1} = 3$, i jasno $3 \mid a_{4 \cdot 1}$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ $3 \mid a_{4n}$, tj. $a_{4n} = 3\alpha$, tada imamo redom

$$\begin{aligned} a_{4(n+1)} &= a_{4n+4} = a_{4n+3} + a_{4n+2} = 2a_{4n+2} + a_{4n+1} = 3a_{4n+1} + 2a_{4n} \stackrel{\text{pi}}{=} 3a_{4n+1} + 2 \cdot 3\alpha \\ &= 3 \underbrace{(a_{4n+1} + 2\alpha)}_{\in \mathbb{N}} \implies 3 \mid a_{4(n+1)}. \end{aligned} \quad \square$$

1.23. Celi brojevi. U skupu prirodnih brojeva nije moguće rešiti jednačinu $x + a = b$, za proizvoljni izbor $a, b \in \mathbb{N}$, npr. $a = 5, b = 2$. Zbog toga se pitamo da li je moguće proširiti skup $\mathbb{N}_0$ tako da u tom proširenom skupu svojstva sabiranja (A1), (A2) i (A4) ostanu sačuvana i da možemo rešiti jednačinu $x + a = b$, za svaki izbor a, b iz tog novog skupa. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i najmanji takav skup je skup celih brojeva $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0$. Primetimo da u skupu $\mathbb{Z}$ važi i svojstvo: za svaki $a \in \mathbb{Z}$ postoji jedinstveni broj $-a \in \mathbb{Z}$ takav da je,

$$(A3) \quad a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Broj $-a$ zove se **suprotni element** od a ili **inverzni element** od a s obzirom na sabiranje. Na skupu $\mathbb{Z}$ (ali već i na $\mathbb{N}$) postoji relacija poretka $\leq$ ('biti manji ili jednak'). Ako uvedemo uobičajenu oznaku $a < b$, koja znači $a \leq b$ i $a \neq b$, vidimo da na skupu $\mathbb{Z}$ važi,

$$(A10) \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a \leq a,$$

$$(A11) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \leq b \text{ i } b \leq a \implies a = b,$$

$$(A12) \quad a \leq b \text{ i } b \leq c \implies a \leq c.$$

$$(A13) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \text{ tačna je barem jedna od relacija } a \leq b \text{ ili } b \leq a.$$

$$(A14) \quad a \leq b \text{ i } c \in \mathbb{Z} \implies a + c \leq b + c,$$

$$(A15) \quad a > 0 \text{ i } b > 0 \implies a \cdot b > 0.$$

Primetimo da svojstva (A10)-(A13) pokazuju da je relacija $\leq$ relacija totalnog poretka na $\mathbb{Z}$; a svojstva (A14) i (A15) pokazuju da se relacija poretka slaže sa sabiranjem i množenjem celih brojeva.

Iz dosada evidentnih svojstava vidimo da su ona podeljena na tri dela: svojstva (A1)-(A9)⁹ su algebarska svojstva, (A10)-(A13) su svojstva relacije ' $\leq$ ' i (A14)-(A15) predstavljaju kompatibilnost relacije ' $\leq$ ' i operacija sabiranja i množenja celih brojeva.

⁹Primetimo da je (A7) zasada preskočeno.

Napomenimo da se uređeni par $(G, \star)$ gde je G neki neprazan skup, a $\star$ binarna operacija za koju važe aksiome (A1)-(A3) zove **grupa**, a ako još važi i aksioma (A4) tada govorimo o **komutativnoj ili Abelovoj**¹⁰ grupi. Slično za uređenu trojku $(G, +, \cdot)$ za koju važe aksiome (A1)-(A6) i (A8)-(A9) kažemo da je **komutativni prsten sa jedinicom**. Dakle, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je prototip komutativnog prstena sa jedinicom.

1.24. Deljivost i prosti brojevi. Pretpostavljamo da oznake $a < b$, $a \leq b$, $|a|$ imaju uobičajeno značenje. Kažemo da a **deli** b što zapisujemo kao $a \mid b$, ili da je b **deljiv** sa a akko postoji $t \in \mathbb{Z}$ takav da je $b = at$. Prirodan broj $p > 1$ koji je deljiv samo sa 1 i sa samim sobom zove se **prost broj**.

Skup svih prostih brojeva $\mathcal{Pr} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ je beskonačan.

1.25. Teorema o deljenju. Za svaki $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ postoje jedinstveni brojevi $t \in \mathbb{Z}$ i $0 \leq r < n$ takvi da je

$$m = n \cdot t + r.$$

Dokaz. Egzistencija. Pretpostavimo da je $m \in \mathbb{N}$, i posmatrajmo niz

$$q_0 = m, q_1 = m - n, q_2 = q_1 - n = m - 2n, \dots, q_k = q_{k-1} - n = m - kn, \dots$$

Kako je ovaj niz strogo opadajući postoji najmanji indeks t takav da je $q_{t+1} < 0$. Tada je $0 \leq r = q_t = m - tn < n$ odakle sledi tvrdnja za $m \geq 0$. Ako je $m \leq 0$ onda je $-m \geq 0$, i na osnovu upravo dokazanog imamo

$$\begin{aligned} -m = n \cdot t + r_1, \quad 0 \leq r_1 < n &\implies m = n \cdot (-t) - r_1 + n - n = n \cdot (-t - 1) + (n - r_1) \\ &= n \cdot (-t - 1) + r, \quad 0 \leq r = n - r_1 < n. \end{aligned}$$

Jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dva para takvih brojeva (t_1, r_1) i (t_2, r_2) , tj. $m = n \cdot t_1 + r_1 = n \cdot t_2 + r_2$. Ako ih oduzmemo odmah dobijamo

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 = n \cdot (t_1 - t_2) &\implies |r_2 - r_1| = n \cdot |t_2 - t_1| \implies n > |r_2 - r_1| \mid n \\ &\implies |r_2 - r_1| = 0 \implies r_2 = r_1 \text{ i } t_2 = t_1. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

1.26. Svojstva deljivosti. Iz definicije odmah sledi da za relaciju deljivosti važi:

- (i1) tranzitivnost, tj. $a \mid b$ i $b \mid c \implies a \mid c$,
- (i2) $a \mid b$ i $a \mid c \implies a \mid b \pm c$,
- (i3) ako $a \mid b$ onda za svako $c \in \mathbb{Z}$ važi $a \mid b \cdot c$,
- (i4) ako $a \mid b_1, a \mid b_2, \dots, a \mid b_k$ onda za sve $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{Z}$ važi $a \mid b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \dots + b_k \cdot c_k$.

1.27. Najveći zajednički delitelj (divizor). Najveći zajednički delitelj celih brojeva a i b , u oznaci $\text{NZD}(a, b)$, je prirodan broj d koji ima sledeća svojstva

- (d) $d \mid a$ i $d \mid b$ (d je zajednički delitelj),
- (n) ako $d_1 \mid a$ i $d_1 \mid b \implies d_1 \mid d$ (d je najveći zajednički delitelj).

¹⁰ Abel Niels Henrik, 1802–1829, norveški matematičar.

Ako je $\text{NZD}(a, b) = 1$ onda kažemo da su brojevi a i b uzajamno prosti.

1.28. Namanji zajednički sadržalac. Najmanji zajednički sadržalac celih brojeva a i b , u oznaci $\text{NZS}(a, b)$, je prirodan broj s koji ima sledeća svojstva

- (s) $a \mid s$ i $b \mid s$ (a je zajednički sadržalac),
- (n) ako $a \mid s_1$ i $b \mid s_1 \implies s \mid s_1$ (d je najmanji zajednički sadržalac).

1.29. Euklidov algoritam. Neke su $a, b \in \mathbb{N}$, onda iz Teoreme o deljenju imamo niz jednakosti ($a > b$)

$$\begin{array}{llll} a = b \cdot q_1 + r_1, & r_{k-3} = r_{k-2} \cdot q_{k-1} + r_{k-1}, & & \\ b = r_1 \cdot q_2 + r_2, & r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_k + r_k, & \text{Tada je } \text{NZD}(a, b) = r_k. & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & r_{k-1} = r_k \cdot q_{k+1}. & & \end{array}$$

Posledica 1. Neke su $a, b \in \mathbb{N}$, neka je $\text{NZD}(a, b) = d$ i neka je $d_1 \in \mathbb{N}$ takav da $d \nmid d_1$. Tada jednačine (po x i y)

$$a \cdot x + b \cdot y = d, \quad \text{ima rešenja u } \mathbb{Z}.$$

$$a \cdot x + b \cdot y = d_1, \quad \text{nema rešenja u } \mathbb{Z}.$$

Specijalno, ako su a i b uzajamno prosti onda postoje $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$a \cdot x + b \cdot y = 1.$$

Dokazi prethodnih teorema i njihovih posledica mogu se naći u Glavi 3, reference [5] u kojoj analogne teoreme dokazujemo za polinome ili u knjigama koje se bave deljivošću celih brojeva.

Posledica 2. Neke su a i b uzajamno prosti brojevi. Ako $a \mid b \cdot c$ tada $a \mid c$. Specijalno, ako prost broj deli proizvod celih brojeva tada on mora deliti barem jedan od njih.

1.30. Relacija kongruencije. U poglavlju o relacijama spomenuli smo kao primer relacije ekvivalencije, tačka **1.17 (i3)**, o kojoj ćemo sada nešto više reći. Za dati $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ i za $a, b \in \mathbb{Z}$ kažemo da je a kongruentno b po modulu n i pišemo

$$a \equiv b \pmod{n} \iff \exists t \in \mathbb{Z} \quad \text{takav da je } a - b = n \cdot t,$$

tj. a i b daju isti ostatak pri deljenju sa n .

Teorema. Relacija kongruencije po modulu $n > 1$ je relacija ekvivalencije na $\mathbb{Z}$. Ova relacija razbija skup $\mathbb{Z}$ na sledeće klase

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= [0]_n \cup [1]_n \cup \dots \cup [n-1]_n, \quad \text{gde je} \\ [k]_n &= \{k, k-n, k+n, k-2n, k+2n, \dots, k-jn, k+jn, \dots\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Refleksivnost. $a \equiv a \pmod{n}$ jer za $t = 0$ važi $a - a = 0 \cdot n$.

Simetričnost. Ako je $a \equiv b \pmod{n} \implies \exists t \in \mathbb{Z}$ takav da je $a - b = n \cdot t$, odakle je $b - a = n \cdot (-t)$, tj. $b \equiv a \pmod{n}$.

Tranzitivnost. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $b \equiv c \pmod{n} \implies \exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a - b = n \cdot t_1$, i $b - c = n \cdot t_2$, odakle je

$$a - c = (a - b) + (b - c) = n \cdot t_1 + n \cdot t_2 = n \cdot (t_1 + t_2) = n \cdot t,$$

gde je $t = t_1 + t_2 \in \mathbb{Z} \implies a \equiv c \pmod{n}$.

Preostale tvrdnje posledica su činjenice da svaka relacija ekvivalencija razbija skup na disjunktne unije nepraznih podskupova. $\square$

1.31. Teorema (Osnovni stav aritmetike). *Za svaki prirodni broj a jedinstveno su određeni prosti brojevi $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ i prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ takvi da je*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

Dokaz. Egzistencija. Ako je a prost broj onda je dokaz gotov. Ako nije onda postoji najmanji prost broj q_1 takav da $q_1 \mid a$ tada je $a = q_1 \cdot a_1$ i $a > a_1$ jer je $q_1 \geq 2$. Sada analogno razmatranje primenimo na a_1 . Dakle, ako je a_1 prost broj dokaz je gotov jer je $a = q_1 \cdot a_1$, ako a_1 nije prost onda postoji minimalni prost broj $q_2 \geq q_1$ (jer u suprotnom q_1 ne bi bio minimalan koji deli a) takav da $q_2 \mid a_1$ tada je $a_1 = q_2 \cdot a_2$ i $a_1 > a_2$ jer je $q_2 \geq 2$, itd. Tako dolazimo do niza prirodnih brojeva $a = a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_k > 1$ i algoritam staje kada je a_k prost. To se mora desiti jer između a i 1 ima konačno mnogo prostih brojeva. Ako sada među prostim brojevima $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_k \leq a_k$ skupimo iste dobijamo traženu dekompoziciju.

Jedinstvenost. Pretpostavimo da imamo dva predstavljanja broj a kao proizvoda prostih brojeva, tj.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n} = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_m^{\beta_m},$$

takvi da je $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ i $q_1 < q_2 < \dots < q_m$. Sada pretpostavimo da postoji najmanji indeks i takav da je

$$p_1 = q_1, \alpha_1 = \beta_1; \quad p_2 = q_2, \alpha_2 = \beta_2; \quad \dots \quad p_{i-1} = q_{i-1}, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}; \quad \text{i}$$

$$p_i \neq q_i \quad \text{ili} \quad p_i = q_i, \quad \text{ali} \quad \alpha_i \neq \beta_i.$$

jer je u suprotnom dokaz gotov. Pretpostavimo da je npr. $p_i < q_i$ onda je i $p_i < q_j$ ($j = i, \dots, m$), sada imamo sa jedne strane $p_i \mid a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ a sa druge $p_i \nmid a = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_m^{\beta_m}$ što je nemoguće. Slično dobijamo i u slučaju da je $p_i > q_i$. Neka je sada $p_i = q_i$ ali je npr. $\alpha_i > \beta_i$ odakle

$$a = p_i^{\alpha_i} \cdot a_1 \implies p_i^{\alpha_i} \mid a \quad \text{i} \quad p_i \nmid a_1 \quad a = p_i^{\beta_i} \cdot a_2 \implies p_i^{\beta_i} \mid a \quad \text{i} \quad p_i \nmid a_2,$$

tj. sa jedne strane $p_i^{\alpha_i} \mid a$ a sa druge strane $p_i^{\alpha_i} \nmid a$, što je nemoguće. $\square$

1.32. Racionalni brojevi. Kako u skupu celih brojeva jednačina $a \cdot x = b$, nema rešenja za proizvoljne $a, b \in \mathbb{Z}$, npr. $a = 2, b = 1$, postavlja se slično pitanje kao i kod sabiranja u skupu prirodnih brojeva (1.23), tj. da li je moguće proširiti skup $\mathbb{Z}$ tako da u tom proširenom skupu svojstva (A1)-(A6) i (A8)-(A15) ostanu sačuvana i da možemo rešiti jednačinu $a \cdot x = b$, za svaki izbor $a \neq 0$ ¹¹, b iz tog novog skupa. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan i najmanji takav skup je skup racionalni brojeva $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Primetimo da u skupu $\mathbb{Q}$ važi i svojstvo: za $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, postoji jedinstveni broj $1/a = a^{-1} \in \mathbb{Q}$ takav da je,

$$(A7) \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Broj a^{-1} zove se inverzni element od a s obzirom na množenje.

Skup racionalnih brojeva ima jednu osnovnu osobinu koja ga izdvaja od ostalih skupova, a ta je da su **rezultati svih fizičkih merenja racionalni brojevi**, tj. mi živimo u

¹¹ jer ako je $a = 0$ i b proizvoljan ceo broj različit od 0 onda jednačina $a \cdot x = b$ očigledno nema rešenja.

racionalnom svetu. Uređena trojka $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je polje, tj. algebarska struktura za koju važe aksiome

(i1) $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelova grupa.

(i2) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa.

(i3) važi distributivnost $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}), a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Štaviše $\mathbb{Q}$ je najmanje polje koje ima beskonačno mnogo elemenata.

1.33. Skup realnih brojeva. Sada nastavljamo na sličan način, tj. pokušavamo da rešimo u skupu racionalnih brojeva jednačinu $x^2 = 2$. Sledeća teorema pokazuje da rešenje te jednačin ne postoji u skupu $\mathbb{Q}$.

Teorema. $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada on dozvoljava zapis u vidu $\sqrt{2} = p/q$, gde je $NZD(p, q) = 1$ (tj. razlomak p/q smo maksimalno skratili). Ovu relaciju prepisemo u ekvivalentnom vidu kao $2q^2 = p^2$, odakle sledi da $p = 2l$ jer je leva strana poslednje jednakosti parna, tako da p mora biti paran. Sada imamo

$$2q^2 = (2l)^2 \iff q^2 = 2l^2.$$

Odavde sledi da $2 \mid q$, tj. $NZD(p, q) \geq 2$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $NZD(p, q) = 1$. Dobijena kontradikcija pokazuje da je naša polazna pretpostavka, $\sqrt{2}$ je racionalan broj, pogrešna. $\square$

Inspirisani prethodnom teoremom, posmatrajmo sada skupove $A = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 < 2\}$ i $B = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 > 2\}$. Očigledno je da su A, B neprazni skupovi. Primetimo da su npr. $1, 1.4, 1.41, \dots \in A$ i postoji racionalni broje M (npr. $2, 3, 4, \dots$) takvi da $\forall q \in A$ važi da je $q \leq M$. Brojeve M sa ovakvim svojstvom zovemo **majorantama** (gornjim granicama) skupa M . Od svih gornjih granica od posebnog je interesa **najmanja gornja granica** koja se zove **supremum skupa** A i obeležava se sa $\sup A$. Analogno, skup B nema majorantu, ali zato ima **minorantu** $m \in \mathbb{Q}$ (npr. $0, 1/2, 1, 1.2, \dots$), tj. broj takav da $\forall q \in B$ važi da je $q \geq m$. Od svih minoranti od posebnog je interesa **najveća donja granica** koja se zove **infimum skupa** B i koja se obeležava sa $\inf B$.

Iz prethodne teoreme sledi da je $\sup A = \inf B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, tj. npr. skup A nema supremuma u $\mathbb{Q}$, tj. u nekom smislu je šupalj. Tako se opet nameće pitanje da li je moguće skup $\mathbb{Q}$ proširiti tako da da sva svojstva (A1)-(A15) ostanu sačuvana i u tom proširenju, ali da važi da svaki neprazan podskup A tog proširenja koji je odozgo ograničen ima supremum u tom proširenju. Odgovor i na ovo pitanje je pozitivan, najmanji takav skup je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Dakle, skup realnih brojeva je skup u kojem važe svojstva (A1)-(A15), ali još važi i,

(A16) Svaki neprazan i odozgo ograničen skup $A \subset \mathbb{R}$ ima supremum u skupu $\mathbb{R}$.

Važi sledeća teorema,

Teorema. Skup $\mathbb{R}$ jedinstveno je određen aksiomama (A1)-(A16) (do na izomorfizam).

Dakle, za polje $\mathbb{Q}$ važe sve aksiome kao i za $\mathbb{R}$ osim aksiome (A16). Napomenimo da je proširenje sa $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ znatno komplikovanije od prethodnih proširenja, sa $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$ i sa $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Q}$. Skup $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zove se skup iracionalnih brojeva. Napomenimo da je skup $\mathbb{Q}$ gust u skupu $\mathbb{R}$ u sledećem smislu:

Teorema. *Za bilo koja dva realna broja $r_1 < r_2$ postoji racionalni broj q takav da je $r_1 < q < r_2$.*

1.34. Algebarski brojevi. Izraz $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, zove se polinom n -tog stepena (ako je $a_n \neq 0$) nad poljem $\mathbb{Q}$ ako su svi koeficijenti $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ racionalni brojevi. Skup $\mathcal{N}_f = \{x_0 \mid f(x_0) = 0\}$ zove se skup svih nula polinoma f . Skup $\mathcal{N}_f$ ne mora biti podskup od $\mathbb{R}$.

Za broj $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je algebarski nad $\mathbb{Q}$ ako postoji polinom f sa racionalnim koeficijentima takav da je $f(a) = 0$. Za skup svih polinoma sa racionalnim koeficijentima koristimo oznaku $\mathbb{Q}[x]$. Skup svih algebarskih brojeva nad $\mathbb{Q}$ obeležavamo sa $\mathbb{A}$. Jasno je da je $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$. Realni brojevi iz skupa $\mathcal{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, tj. koji nisu algebarski nazivaju se transcendentnim brojevima, takvi su npr. $\pi, e, \sqrt{\pi}, \dots$

1.35. Decimalni zapis realnog broja. Kao što znamo iz svakodnevnog iskustva u praksi koristimo dekadski brojni sistem, tj. sve brojeve predstavljamo pomoću cifara 0, 1, 2, $\dots$, 9. Tako npr. oznaka 12345 predstavlja prirodni broj

$$12345 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0,$$

ili u opštem obliku svaki celi broj¹² može se predstaviti u obliku polinoma ($x = 10$) na sledeći način:

$$M = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0, \quad a_n \neq 0.$$

Postoje i drugi brojevi sistemi, a veoma su popularni oni koji se koriste u računarstvu čije su osnove 2, 8 ili 16.

Primetimo da proizvoljne razlomke (npr. $1/2$) ne možemo predstaviti kao polinome sa osnovom 10 (ili bilo kojom drugom). Ovaj problem se prevazilazi tako da dozvoljavamo i negativne stepene broja 10 i tamo gde počinju negativni stepeni uvodimo decimalni zarez. Tako je npr.,

$$(1.3) \quad \frac{1}{2} = 0,5 = 0 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1},$$

ali se ispostavlja, kao što pokazuje sledeći primer,

$$(1.4) \quad \frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,\dot{3} = 0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + \dots = \sum_{n=-1}^{-\infty} 3 \cdot 10^n,$$

da moramo dozvoliti da se iza decimalnog zareza pojavljuje beskonačno mnogo članova¹³.

¹² Ako je broj negativan dodamo – ispred broja.

¹³ Pitanjima suma sa beskonačno mnogo članova bavićemo se u 2. glavi Nizovi.

Postavlja se prirodno pitanje kako iz decimalnog zapisa realnog broja prepoznati da je on racionalan. Primeri (1.3) i (1.4) su tipični tj. broj je racionalan ako i samo ako je njegov decimalni zapis konačan (tj. sve cifre nakon nekog mesta su 0, npr. u slučaju broja $1/2$, cifre $a_{-2} = a_{-3} = \dots$ su jednake 0) ili nakon nekog mesta postoji konačan niz cifara koji se ponavlja (primer je broj $1/3$, kod kojeg je $3 = a_{-1} = a_{-2} = \dots$).

Primer. Predstaviti broj $17/7$ u decimalnom obliku.

$$17/7 = 2, \underbrace{428571}_{\text{ponavlja}} \underbrace{428571}_{\text{ponavlja}} \dots$$

Iz gore rečenog sledi da decimalni zapisi iracionalnih brojeva nisu konačni i ne postoji konačan niz cifara koji se ponavlja. Drugim rečima cifre u decimalnom zapisu iracionalnog broja ređaju se bez nekog reda, npr. prvih 50 cifara u decimalnim zapisima brojeva π i $\sqrt{2}$ su:

$$\begin{aligned}\pi &= 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751 \\ \sqrt{2} &= 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769.\end{aligned}$$

1.36. Brojnost (Kardinalni broj) skupa. Za svaki prirodan broj n obeležimo sa $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ skup prvih n prirodnih brojeva. Kažemo da je skup A **konačan** ako postoji bijekcija sa nekog od skupova $\mathcal{S}_n$ u A . Npr. ako je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{55}\}$ onda je A u bijekciji sa skupom $\mathcal{S}_{55}$ i jedna od bijekcija je npr. $f(i) = a_i, i = 1, 2, \dots, 55$ ¹⁴.

Niz u skupu B je svako preslikavanje sa skupa $\mathbb{N}$ u B . Elemente niza obeležavamo sa $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$. Kažemo da je skup B **prebrojiv** ako se njegovi elementi mogu poređati u niz, tj. ako postoji bijekcija f sa $\mathbb{N}$ u B . Ovo znači da skup B ima 'isti broj' elemenata kao i skup $\mathbb{N}$.

Tako su npr, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ prebrojivi¹⁵ skupovi. Postavlja se pitanje kako npr. sve cele brojeve poređati u niz. Jedno rešenje je:

$$\begin{aligned}0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, \quad \text{što možemo zapisati i formulom} \\ f(1) = 0, \quad f(2k) = k \quad \text{i} \quad f(2k+1) = -k, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Za skup $\mathbb{Q}$ dokaz je komplikovaniji. Dakle, iako skupovi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ imaju beskonačno mnogo elemenata i važi $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ ¹⁶ oni su prebrojivi i u tom smislu imaju isti kardinalni broj. Ipak, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ima bitno više elemenata od prebrojivih skupova, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema. *Skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv.*

¹⁴ Odredite broj bijekcija sa $\mathcal{S}_n$ u A .

¹⁵ Prebrojiv je i skup algebarskih brojeva.

¹⁶ Primetimo da ne postoji bijekcija sa pravog podskupa konačnog skupa na taj isti skup.

Dokaz. Pretpostavimo da je skup $\mathbb{R}$ prebrojiv. Tada je prebrojivi svaki njegov podskup, pa specijalno i interval $[0, 1]$. Svaki element iz intervala $[0, 1]$ možemo predstaviti u dekadskom obliku. Dakle, postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, takva da je

$$\begin{aligned} f(1) &= a_1 = \overline{0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots a_n^1 \dots} \\ f(2) &= a_2 = \overline{0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_n^2 \dots} \\ f(3) &= a_3 = \overline{0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \dots a_n^3 \dots} \\ f(4) &= a_4 = \overline{0, a_1^4 a_2^4 a_3^4 \dots a_n^4 \dots} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Sada posmatrajmo sledeći realni broj,

$$b = \overline{0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots}$$

gde smo izabrali cifre $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ tako da je $b_1 \neq a_1^1, b_2 \neq a_2^2, b_3 \neq a_3^3, \dots, b_n \neq a_n^n, \dots$. Odavde sledi da broj b nije u slici funkcije f jer $b \neq f(j) = a_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ (jer se broj b razlikuje barem u j -toj cifri od broja a_j). Dakle, naša pretpostavka da je $\mathbb{R}$ prebrojiv dovela nas je u kontradikciju, jer upravo opisana procedura¹⁷ pokazuje da ne postoji surjekcija sa $\mathbb{N}$ u interval $[0, 1]$. $\square$

Napomena. Rezimirajmo, kardinalni broj (brojnost) skupa:

- $\mathcal{S}_n$ je n (broj njegovih elemenata),
- $\mathbb{N}$ je $\aleph_0$ (alef 0) (prebrojiv),
- $\mathbb{R}$ je c (kontinuum).

Iz gore rečenoga možemo da zaključimo da se pojam jednakobrojnosti konačnih skupova na prirodan, najjednostavniji način generalise i na skupove koji imaju beskonačno mnogo elemenata sledećom definicijom: skupovi A i B su **istobrojni** ili kažemo da imaju isti kardinalni broj ako postoji barem jedna bijekcija sa A na B .

5. Kompleksni brojevi

1.37. Skup kompleksnih brojeva. Nastavljajući u istom duhu, pokušavamo da rešimo jednačinu $x^2 = -1$ u skupu $\mathbb{R}$. Lako se možemo ubediti, koristeći aksiome (A1)-(A16), da ta jednačina nema rešenja u skupu $\mathbb{R}$. Ako rešenje te jednačine obeležimo sa $i = \sqrt{-1}$, i nazovemo ga **imaginarna jedinica**, možemo posmatrati skup

$$\mathbb{C} = \{z = a + i b \mid a, b \in \mathbb{R}\} \supsetneq \mathbb{R}.$$

Skup $\mathbb{C}$ zove se **skup kompleksnih brojeva**. Realne brojeve $a = \Re(a + i b)$ i $b = \Im(a + i b)$ nazivamo redom **realnim** i **imaginarnim delom** kompleksnog broja $z = a + i b$.

¹⁷ Koja se inače zove Kantorov (Cantor) dijagonalni postupak.

Na skupu $\mathbb{C}$ definisane su binarne operacije sabiranja i množenja, koje su proširenja odgovarajućih operacija sa skupa realnih brojeva, formulama

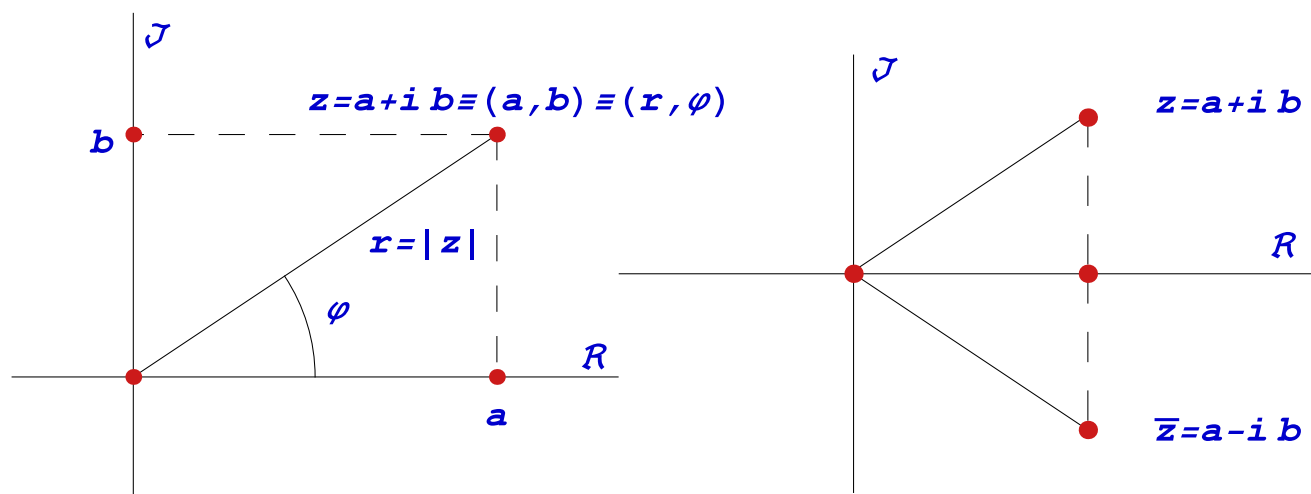
$$(1.5) \quad z_1 + z_2 = (a_1 + i b_1) + (a_2 + i b_2) = (a_1 + a_2) + i (b_1 + b_2),$$

$$(1.6) \quad z_1 z_2 = (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i (a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Ispostavlja se da ovako definisane operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva imaju iste osobine kao kod realnih brojeva (A1)-(A9). To zapravo znači da je skup $\mathbb{C}$ polje s obzirom na operacije (1.5) i (1.6). Može se pokazati da na skupu $\mathbb{C}$ ne postoji relacija parcijalnog poretka ' $\leq$ ' koja bi bila proširenje relacije poretka na $\mathbb{R}$, i koja bi se slagala sa operacijama sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

1.38. Geometrijska interpretacija. Primetimo da su dva kompleksna broja jednaka akko imaju jednake realne i imaginarne delove, što je posledica sledećeg niza implikacija:

$$z_1 = a_1 + i b_1 = z_2 = a_2 + i b_2 \implies a_1 - a_2 = i (b_2 - b_1), \quad \text{kvadriranjem ove relacije} \\ \text{dobijamo redom} \quad (a_1 - a_2)^2 = i^2 (b_2 - b_1)^2 = -(b_2 - b_1)^2 \implies a_1 - a_2 = (b_2 - b_1) = 0.$$



Dekartov i polarni koordinatni sistem

Konjugovanje

Slika 1. Gausova ravan

Ova činjenica nam omogućuje da skup $\mathbb{C}$ identifikujemo sa $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ na sledeći način (Slika 1.):

$$z = a + i b \longmapsto z = (a, b)$$

i onda formule (1.5) i (1.6) odmah prepisujemo kao

$$(1.7) \quad z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(1.8) \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Primetimo da broju i odgovara uređeni par $(0, 1)$.

Ravan $\mathbb{R}^2$ u kojoj predstavljamo kompleksne brojeve zove se **Gausova ravan**, ose odgovarajućeg koordinatnog sistema Gausove ravni nazivaju se realna i imaginarna osa (Slika 1.).

1.39. Konjugovanje. Preslikavanje $^- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definisano formulom

$$\mathbb{C} \ni z = a + i b \longrightarrow \bar{z} = a - i b \in \mathbb{C},$$

zove se konjugovanje kompleksnih brojeva. Geometrijski konjugovanje predstavlja osnu simetriju s obzirom na realnu osu u Gausovoj ravni, Slika 1. Konjugovanje kompleksnih brojeva slaže se sa operacijama sabiranja i množenja kompleksnih kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. Za bilo koje kompleksne brojeve z_1, z_2 važi:

- (i1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$
- (i2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$
- (i3) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 = \|z_1\|^2.$

Dokaz. Neka je $z_1 = a + i b$ i $z_2 = c + i d$, tada imamo,

- (i1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) = (a - i b) + (c - i d) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$
- (i2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + i b) \cdot (c + i d)} = \overline{(a c - b d) + i(a d + b c)} = (a c - b d) - i(a d + b c) = (a - i b)(c - i d) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$
- (i3) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = (a + i b)(a - i b) = \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 = \|z_1\|^2.$

□

Broj $\|z_1\|$ zove se **modul (moduo)** kompleksnog broja z_1 i predstavlja u Gausovoj ravni rastojanje broja z_1 od koordinatnog početka.

1.40. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja. Izraz $z = a + i b$ zove se Dekartov oblik kompleksnog broja. Formule (1.5) i (1.7) pokazuju da je Dekartov oblik kompleksnog broja pogodan za sabiranje, dok je formula za množenje kompleksnih brojeva (1.6) (ili (1.8)) mnogo komplikovanija. Dekartov oblik proizvoljnog kompleksnog broja $z \neq 0$, možemo prepisati na sledeći način,

$$(1.9) \quad z = a + i b = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Primetimo da je

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

odakle sledi da postoji ugao ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) takav da je

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{i} \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

tako da formula (1.9) prima sledeći oblik,

$$(1.10) \quad z = a + ib = \|z\|(\cos \phi + i \sin \phi),$$

koji se zove **trigonometrijski ili polarni oblik kompleksnog broja**.

Ugao ϕ zove se **argument kompleksnog broja** z i pišemo $\phi = \arg(z)$.

Geometrijska interpretacija trigonometrijskog broja vidi se u Gausovoj ravni ako vrh broja $z = a + ib$ ortogonalno projektujemo na koordinatne ose, dobijamo da je $\Re(z) = \|z\| \cos \phi$ i $\Im(z) = \|z\| \sin \phi$, Slika 1. Kako smo skup $\mathbb{C}$ identifikovali sa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tada trigonometrijski oblik kompleksnog broja omogućava da u ravni $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uvedemo koordinatni sistem čije su koordinate r -rastojanje tačke M od koordinatnog početka i ϕ -ugao koji zaklapa poluprava OM (O je koordinatni početak) sa pozitivnim delom ose x . Ovaj koordinatni sistem zove se **polarni koordinatni sistem** u ravni.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja pogodniji za množenje kompleksnih brojeva od Dekartovog kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. Neka su $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$ dva proizvoljna kompleksna broja tada važi formula

$$(1.11) \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

Digresija. Iz ove formule vidimo da se kompleksni brojevi množe tako što se moduli pomnože, a argumenti saberu.

$$\begin{aligned} \text{Dokaz.} \quad z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = r_1 r_2 ((\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) \\ &\quad + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)) = r_1 r_2 ((\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))). \end{aligned}$$

□

Posledica. Za $0 \neq z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$ važe sledeće formule:

$$(i1) \quad z^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)),$$

$$(i2) \quad z^{-n} = r^{-n}(\cos(n\phi) - i \sin(n\phi)),$$

$$(i3) \quad \text{ako je } r = \|z\| = 1 \text{ onda važe i poznate Moavrove}^{18} \text{ formule:}$$

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi),$$

$$(\cos \phi - i \sin \phi)^n = \cos(n\phi) - i \sin(n\phi).$$

Dokaz. (i1) sledi lako indukcijom iz Propozicije za $z = z_1 = z_2$.

(i2) Primetimo da je,

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \phi + i \sin \phi)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \phi + i \sin \phi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos \phi + i \sin \phi} \cdot \frac{\cos \phi - i \sin \phi}{\cos \phi - i \sin \phi} \\ &= r^{-1}(\cos \phi - i \sin \phi), \end{aligned}$$

i primena formule (i1) na broj $z^{-n} = (z^{-1})^n$ uz korišćenje činjenice da je sinus neparna, a kosinus parna funkcija daje traženu formulu.

(i3) Moavrove formule su sada direktna posledica formula (i1) i (i2) za $\|z\| = 1$.

□

¹⁸ Abraham de Moivre, 1667–1754, francuski matemati car.

Napomenimo da se kompleksni brojevi mogu predstaviti i u Eulerovom¹⁹ obliku, tj. važi

$$z = a + ib = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r e^{i\phi}.$$

1.41. n-ti koren iz kompleksnog broja. Neka je $z \in \mathbb{C}$, i

$$\omega^n = z = a + ib = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Tada ω nazivamo n -tim korenom iz kompleksnog broja z . Kako je ω kompleksan broj možemo ga predstaviti u obliku $\omega = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, a zatim primena Posledice (i1) iz prethodne tačke daje,

$$\omega^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad \text{odakle je}$$

$$\rho^n = r, \quad n\alpha = \phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \alpha_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Zbog toga što je osnovni period funkcija $\sin$ i $\cos$ jednak 2π , iz prethodnog izraza za α_k sledi da je $\sin \alpha_0 = \sin \alpha_n = \dots = \sin \alpha_{pn}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}$, ili opštije $\sin \alpha_k = \sin \alpha_{n+k} = \dots = \sin \alpha_{pn+k}$ za svaki $p \in \mathbb{Z}$ i $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Analogne formule važe i za funkciju kosinus. Odakle, onda sledi da svaki kompleksan broj $z \neq 0$ ima tačno n različitih n -tih korena. Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. Neka je $0 \neq z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C}$. Tada postoji tačno n kompleksnih brojeva $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ takvih da je $\omega_k^n = z$ za $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, i pri tome važi

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right).$$

Primer. Odredite sve pete korene iz broja $z = 3 - i4$.

Rešenje. Na osnovu prethodne teoreme prvo imamo da je $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, tako da je

$$z = 5 \left(\frac{3}{5} - i \frac{4}{5} \right) \implies \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = -\frac{4}{5} \implies \alpha = -\arcsin \frac{4}{5}.$$

Sada na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da su peti koreni iz $3 - i4$:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt[5]{5} \left(\cos \frac{\alpha}{5} + i \sin \frac{\alpha}{5} \right), \quad \omega_1 = \sqrt[5]{5} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi}{5} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi}{5} \right), \quad \omega_2 = \sqrt[5]{5} \left(\cos \frac{\alpha + 4\pi}{5} + i \sin \frac{\alpha + 4\pi}{5} \right), \\ \omega_3 &= \sqrt[5]{5} \left(\cos \frac{\alpha + 6\pi}{5} + i \sin \frac{\alpha + 6\pi}{5} \right) \quad \text{i} \quad \omega_4 = \sqrt[5]{5} \left(\cos \frac{\alpha + 8\pi}{5} + i \sin \frac{\alpha + 8\pi}{5} \right) \quad \diamond \end{aligned}$$

1.42. Sfera (krug) $\mathbb{S}^1$ i n-ti koreni iz jedinice. Neka je $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ jedinični krug u $\mathbb{R}^2$. Kako je očigledno skup $\mathbb{S}^1$ zatvoren za množenje kompleksnih brojeva (proizvod dva kompleksna broja modula 1 je opet kompleksni broj modula 1) i sadrži broj 1, kako su asocijativnost i komutativnost nasledne osobine (prenose se sa

¹⁹Leonhard Euler, 1707–1783), veliki švajcarski matematičar, fizičar, astronome geograf, logičar, i inženjer. Veći deo svog života proveo je u st. Petersburgu.

skupa na svaki njegov podskup) i kako je inverz kompleksnog broja modula 1 isti takav broj (vidi **1.40 Posledica (i2)**), sledi da je $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ podgrupa grupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Skup K_n je skup n -tih korena iz jedinice i važi, $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$. Na analogan način kao i za krug može se proveriti da je K_n grupa s obzirom na množenje kompleksnih brojeva. Nije teško videti da grupa K_n ima svoju realizaciju kao grupa rotacija ravni koja ostavlja fiksnim pravilni n -ugao, vidi Sliku 2. za $n = 8$. Dakle,

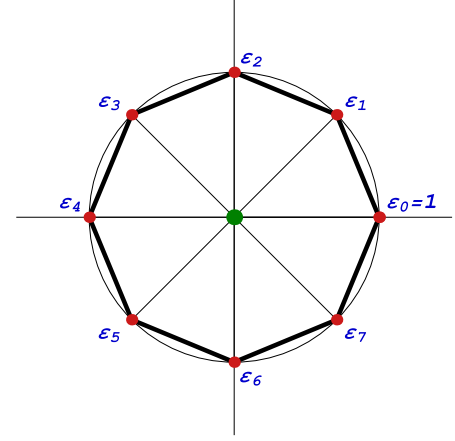
$$K_n = \{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \quad \text{gde je} \quad \varepsilon_k = \cos \phi_n + i \sin \phi_n, \quad \phi_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Sada iz formule za množenje kompleksnih brojeva imamo sledeću propoziciju.

Propozicija. U grupi n -tih korena iz jedinice K_n važe identiteti:

$$(i1) \quad \varepsilon_k = \varepsilon_1^k, \text{ za sve } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

$$(i2) \quad \varepsilon_{n-k} = \overline{\varepsilon_k}.$$



Slika 2. Osmi koreni iz jedinice

6. Elementi kombinatorike

1.42. Varijacije. Permutacije. Kombinacije. Neka je dat neki konačan skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Posmatrajmo skup

$$\text{Var}_k(A) = \{(b_1, b_2, \dots, b_k) \subseteq A^k \mid b_i \neq b_j \text{ za } i \neq j\}.$$

Elementi skupa $\text{Var}_k(A)$ zovu se **varijacije bez ponavljanja** (ili kraće **varijacije**), k -tog reda skupa A .

Teorema. Broj elemenata skupa $\text{Var}_k(A)$, jednak je broju injektivnih preslikavanja sa skupa $S_k = \{1, 2, \dots, k\}$ na skup A .

Dokaz. Neka je $f : S_k \rightarrow A$ i konstruišimo neko '1-1' preslikavanje sa skupa S_k na skup A , tada za izbor slike elementa 1, tj. $f(1) = b_1$ imamo n mogućnosti $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Sada kada smo izabrali $f(1) = b_1 \in A$, za izbor slike $f(2) = b_2$ imamo $n-1 = \text{card}(A \setminus \{f(1)\})$ mogućnost, itd., tako da za izbor $f(k) = b_k$ preostaje $n-k+1 = \text{card}(A \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(k-1)\})$ mogućnost. Kako su izbori za $f(1), f(2), \dots, f(k)$ nezavisni, jer u stvari računamo broj elemenata Dekartovog proizvoda $A \times (A \setminus \{f(1)\}) \times \dots \times (A \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(k-1)\})$, broj svih injekcija sa S_k na A (odnosno $\text{card Var}_k(A)$) je $V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$. $\square$

U slučaju $k = n$ broj varijacije reda n na skupu od n elemenata jednak je broju bijekcija (= injekcija jer je A konačan) sa A na A . Kako se bijekcije nazivaju i **permutacijama**²⁰ i kako možemo izabrati $A = S_n$, vidimo da je broj svih permutacija (bijekcija) skupa od n elemenata P_n jednak

$$P_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Po definiciji se uzima da je $0! = 1$.

Drugi sličan problem je problem određivanja broja svih k -članih podskupova skupa A (koji ima n elemenata), tj.

$$C_k = \{B \subseteq A \mid \text{card } B = k\}.$$

Svaki k -člani podskup od A zove se **kombinacija k -tog reda skupa A** . Da bismo odredili $\text{card}(C_k)$ potrebno je primetiti da svih $k!$ permutacija skupa $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ (uređenih k -torki) definišu isti skup B , tako da je taj broj C_k^n jednak

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Broj $\binom{n}{k}$ zove se binomni koeficijent.

1.43. Binomni koeficijenti. Neka od osnovnih svojstava binomnih koeficijenata su ($0 \leq k \leq n$)

$$(i1) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (i2) \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}, \quad (i3) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Dokaz. (i1) i (i2) direktno iz definicije binomnih koeficijenata.

(i3) sledi iz

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!} = \frac{n!}{k! (n-k+1)!} \\ &\quad \times (n-k+1+k) = \frac{n!(n+1)}{k! (n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k! (n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}. \quad \square \end{aligned}$$

Upravo dokazana formula (i3) poznata je kao i **Paskalova**²¹ **jednakost** za binomne koeficijente.

1.44. Teorema (Binomna formula). Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni realni brojevi, i n proizvoljan prirodan broj tada važi sledeća formula²²,

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n. \end{aligned}$$

²⁰ U slučaju da je A konačan skup.

²¹ Blaise Pascal, 1623–1662, francuski matematičar.

²² Poznata kao binomna formula.

Dokaz: Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ formula je tačna jer je $(a + b)^1 = a^1 + b^1$. Pretpostavimo da je binomna formula tačna za neki $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \stackrel{\text{(pi)}}{=} (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]}_{= \binom{n+1}{k} \text{ (vidi 1.43 (i3))}} a^{n-k+1} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k, \end{aligned}$$

dakle, formula je tada tačna i za $n + 1$. □

1.45. Neke posledice binomne formule. Ako u binomnu formulu prvo uvrstimo $a = b = 1$, a zatim $a = 1, b = -1$, dobijamo sledeća dva identiteta

$$\begin{aligned} (1 + 1)^n &= 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \\ (1 - 1)^n &= 0^n = 0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Posledica. Kako je $\binom{n}{k}$ jednak broju k -članih podskupova skupa A koji ima n elemenata, vidimo da je ukupan broj svih podskupova skupa A , tj. broj elemenata partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ jednak $\text{card } \mathcal{P}(A) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

7. Zadaci

1.46. Neka su dati skupovi

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, i $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
 (b) $A = [0, 2)$, $B = (1, 3] \cup \{5\}$ i $C = [0, 1] \cup (2, 4)$.

Odredite skupove

- (i1) $A \cup B$, $A \cup C$, (i2) $A \cap B$, $B \cap C$, (i3) $X = A \cup B \cup C$, $A^c \cup X$,
 (i4) $A \setminus B$, $B \setminus A$, (i5) $A \setminus C$, $B \setminus C$, (i6) $X \setminus B$, $X \setminus C$,
 (i7) $A \triangle B$, $A \triangle C$, (i8) $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, (i9) $\mathcal{P}(A \cup B)$, $\mathcal{P}(A \cap B)$.

1.47. Pokažite da je $A \cup B = A$ ako i samo ako $B \subseteq A$.

1.48. Dokažite preostale jednakosti iz 1.4.

1.49. Dokažite sve jednakosti iz 1.5.

1.50. Neka su A i B proizvoljna dva skupa. Pokažite da je

- (i1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, (i2) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Dokaz: Pokažimo (i1). Dokaz je posledica sledećeg niza ekvivalencija

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff X \subseteq A \cap B \iff X \subseteq A \text{ i } X \subseteq B \iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ i } \mathcal{P}(B) \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

□

1.51. Dokažite (i2)-(i5) iz **1.7**.

1.52. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Pokažite da važi,

$$\begin{aligned} \text{(i1)} \quad A \setminus B &= A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B, & \text{(i2)} \quad (A \cup B) \setminus C &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C), \\ \text{(i3)} \quad (A \cap B) \setminus C &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C). \end{aligned}$$

1.53. Neka su A i B konačni skupovi i neka je $f : A \longrightarrow B$ neka funkcija. Pokažite da su ekvivalentni sledeći iskazi:

$$\text{(i1)} \quad f \text{ je '1-1'}, \quad \text{(i2)} \quad f \text{ je 'na'}. \quad \text{(i3)} \quad f \text{ je bijekcija}.$$

1.54. Neka su date binarne relacije ρ, σ i τ na A . Pokažite da važi

$$\begin{aligned} \text{(i1)} \quad (\rho\sigma)^{-1} &= \rho^{-1}\sigma^{-1}, & \text{(i2)} \quad (\rho\sigma)\tau &= \rho(\sigma\tau), \\ \text{(i3)} \quad \rho(\sigma \cup \tau) &= \rho\sigma \cup \rho\tau, & \text{(i4)} \quad \rho(\sigma \cap \tau) &\subseteq \rho\sigma \cap \rho\tau. \end{aligned}$$

1.54. Neka su ρ i σ dve binarne relacije na skupu A . Dokažite

$$\begin{aligned} \text{(i1)} \quad (\rho \cup \sigma)^{-1} &= \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}, & \text{(i2)} \quad (\rho \cap \sigma)^{-1} &= \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}, \\ \text{(i3)} \quad (\rho \setminus \sigma)^{-1} &= \rho^{-1} \setminus \sigma^{-1}, & \text{(i4)} \quad (\rho^c)^{-1} &= (\rho^{-1})^c. \end{aligned}$$

1.55. Neka skupovi A i B imaju konačan broj elemenata. Pokažite

$$\begin{aligned} \text{(i1)} \quad &\text{da važi formula, } \text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B). \\ \text{(i2)} \quad &\text{da je } \text{card} \mathcal{P}(A) = 2^{\text{card} A}, \text{ gde je } \mathcal{P}(A) \text{ (partitivni skup od } A) \text{ skup svih podskupova skupa } A. \end{aligned}$$

1.56. Dokažite da je

$$\text{(i1)} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k}, 1 \right] = (0, 1], \quad \text{(i2)} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \left[\frac{k-1}{k}, 1 \right] = \{1\}.$$

1.57. Neka su A i B konačni skupovi i neka je $\|A\| = n$ i $\|B\| = m$. Koliko ima funkcija sa A u B ? Koliko je među njima injekcija, surjekcija i bijekcija.

1.58. Neka je skup A konačan, tj. $\|A\| = m$. Koliko ima relacija na skupu A ? Koliko je među njima refleksivnih, antirefleksivnih, simetričnih i antisimetričnih relacija?

Rešenje: Prema **1.19** svakoj relaciji na A odgovara tačno jedna tablica tipa $m \times m$, funkcije te relacije. Dakle, u tablici ima ukupno m^2 mesta, a na svakom može biti ili 1 ili 0. Prema tome, ukupan broj relacija je 2^{m^2} .

Da bi relacija ρ na A bila refleksivna u tablici njene funkcije (vidi **1.19**) na dijagonali moraju biti sve 1, a na sva preostala mesta nema nikakvih uslova. Dakle, ukupan broj svih takvih relacija je $2^{m(m-1)}$.

Analogno, kao i za refleksivne relacije njihov broj je $2^{m(m-1)}$.

Primetimo da uslov simetričnosti neke relacije ρ implicira da proizvoljno možemo izabrati vrednosti u $f_{\rho}(a_1, a_1), f_{\rho}(a_2, a_1), f_{\rho}(a_2, a_2), \dots, f_{\rho}(a_m, a_1), \dots, f_{\rho}(a_m, a_m)$, i preostale vrednosti od $f_{\rho}(a_i, a_j)$ ($i < j$), su potpuno određene. Kako je broj uređenih parova (i, j) takvih da $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, m$ jednak $1 + 2 + \dots + m = m(m+1)/2$, broj traženih relacija je $2^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

Za antisimetrične relacije analogno kao i za simetrične samo primetimo da je kod antisimetričnih relacija i dijagonala fiksirana, tako da je njihov ukupan broj $2^{\frac{m(m-1)}{2}}$. $\diamond$

1.59. Dokazite da je skup $\mathcal{P}r$ svih prostih brojeva beskonačan.

Dokaz: Pretpostavimo da $\mathcal{P}r = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ konačan i da ima tačno k elemenata. Posmatrajmo broj $\Pi = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$, očigledno ovaj broj nije deljiv niti sa jednim prostim brojem p_i jer pri deljenju sa svakim od njih daje ostatak 1. Prema definiciji ovaj broj deljiv je samo sa 1 i sa samim sobom, tj. on je prost što je kontradikcija sa pretpostavkom da su svi prosti brojevi elementi skupa $\mathcal{P}r = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. $\square$

1.60. Nađite Euklidovim algoritmom $\text{NZD}(a, b)$ ako su

$$(i1) \ a = 125, b = 75, \quad (i2) \ a = 12600, b = 23760, \quad (i3) \ a = 5246, b = 982, \quad (i4) \ a = 2250, b = 2700.$$

1.61. Dokazite da je $\text{NZD}(a, b) \cdot \text{NZS}(a, b) = a \cdot b$.

1.62. Neka je $a = p_{i_1}^{\alpha_1} \cdot p_{i_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{i_n}^{\alpha_n}$ i $b = q_{j_1}^{\beta_1} \cdot q_{j_2}^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_{j_m}^{\beta_m}$. Odredite $\text{NZS}(a, b)$ i $\text{NZD}(a, b)$.

Rešenje: Ako sa $\mathcal{P}(a) = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n}\}$ i $\mathcal{P}(b) = \{q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_m}\}$ obeležimo skupove prostih brojeva koji učestvuju u rastavima brojeva a i b redom.

Ako je $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} = \mathcal{P}(a) \cap \mathcal{P}(b)$ tada je $\text{NZD}(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\gamma_k}$ pri čemu je $p_i = p_{i_s} = p_{j_r}$ i $\gamma_t = \min(\alpha_{i_s}, \beta_{j_r})$.

Slično, ako je $\{p_1, p_2, \dots, p_l\} = \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b)$ tada je $\text{NZS}(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot p_l^{\delta_l}$ gde je $p_i = p_{i_s}$ ili $p_i = p_{j_r}$ i $\delta_t = \max(\alpha_{i_s}, \beta_{j_r})$. $\diamond$

1.62. Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ i neka ima sledeća svojstva

$$(i1) \ n_0 \in M, \quad (i2) \ n \in M \implies n+1 \in M,$$

tada $M \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$.

Dokaz: Neka je $\overline{M} = \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$, tada iz Peanovih aksioma sledi da je $\overline{M} \cup M = \mathbb{N}$, tj. $M \supseteq \mathbb{N} \setminus \overline{M}$. $\square$

1.63. Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ i neka važi

$$(i1) \ 1 \in M, \quad (i2) \ m \in M, \forall m \leq n \implies n+1 \in M,$$

tada je $M = \mathbb{N}$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$. Izaberimo minimalni element $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$ (takav uvek postoji jer je $\mathbb{N}$ dobro uređen, pa svaki njegov neprazan podskup ima minimalni element). Zbog (i1) $n_0 \neq 1$, i primena svojstva (i2) za $m = n_0 - 1$ impliciraju $n_0 \in M$ što je nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da je pogrešna polazna pretpostavka $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$, dakle $M = \mathbb{N}$. $\square$

1.64. Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ i neka ima sledeća svojstva

$$(i1) \ 1 \in M, \ 2 \in M, \quad (i2) \ n, n-1 \in M \implies n+1 \in M,$$

tada $M = \mathbb{N}$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$, tada postoji minimalni element $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$. Zbog (i1) $n_0 \neq 1$, i $n_0 \neq 2$, ako je n_0 onda su zbog minimalnosti od n_0 brojevi $n_0 - 1$ i $n_0 - 2 \in M$ i primena svojstva (i2) implicira $n_0 \in M$ što je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom. Dakle, $M = \mathbb{N}$. $\square$

1.65. Dokazite da za svaki prirodan broj n važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} (i1) \quad \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), & (i2) \quad \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2, \\ (i3) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1}, & (i4) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 &= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

$$(i5) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}, \quad (i6) \quad \sum_{k=1}^n k(n-k+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2),$$

$$(i7) \quad \text{za } 1 \neq x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad (i8) \quad \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dvojki pod korenima}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Dokaz: (i1) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n k^2 = 1/6 n(n+1)(2n+1)\}$.

$$(bi) \quad 1^2 = 1 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) \implies 1 \in M.$$

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo redom,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{(pi)}{=} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{1}{6} (n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6} (n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1), \end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$.

(i2) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n k^3 = 1/4 n^2(n+1)^2\}$.

$$(bi) \quad 1^3 = 1 = \frac{1}{4} 1^2(1+1)^2 \implies 1 \in M.$$

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \stackrel{(pi)}{=} \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4} (n+1)^2((n+1)+1)^2 \end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$.

(i3) Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n 1/(k(k+1)) = n/(n+1)\}$.

(bi) za $n=1$ očigledno se leva i desna strana jednakosti podudaraju, tako da je $1 \in M$.

(ki) Neka je neki $n \in M$ tada imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{pi}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)} = \frac{n+1}{((n+1)+1)}, \end{aligned}$$

tj. $n+1 \in M$.

(i4), (i5) i (i7) analogno prethodnim zadacima (i1), (i2) i (i3). Za (i6) iskoristi formulu $\sum_{k=1}^n k = 1/2 n(n+1)$ i (i1).

(i8) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{1+1}} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$, što je tačno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je gornja formula tačna za neki prirodan broj n , tada je

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n+1 \text{ dvojka pod korenima}} = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dvojki pod korenima}}} \stackrel{(\text{pi})}{=} \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \left|2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}\right| = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{(n+1)+1}},$$

jer je $1 + \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha$. Dakle, formula je tačna i za $n+1$ i onda AMI implicira da je formula tačna za sve prirodne brojeve. $\diamond$

1.66. Pokažite da za $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ broj 2^{2^n} u dekadskom sistemu završava cifrom 6.

Dokaz: Neka je $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2^n} \text{ završava brojem } 6\}$. $2 \in M$ jer je $2^{2^2} = 16$. Pretpostavimo da je neki $n > 2$ element iz M , tj. $2^{2^n} = 10 \cdot x + 6, (x \in \mathbb{N})$. Sada imamo,

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2 \cdot 2^n} = (2^{2^n})^2 = (10 \cdot x + 6)^2 = 100 \cdot x^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot x + 36 = 10 \cdot y + 6,$$

pri čemu je $y = 10 \cdot x^2 + 12x + 3$. Time je proveden korak indukcije i dokaz je gotov. $\square$

1.67. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj nastao dopisivanjem dekadskih zapisa brojeva 2^n i 5^n ima $n+1$ cifru.

Dokaz: Za $n=1$ radi se o broju 25 koji očigledno ima 2 cifre. Pretpostavimo sada da je tvrdnja istinita za neki $n \in \mathbb{N}$ i neka broj 2^n ima k cifara, a broj 5^n ima m cifara ($k+m=n+1$). Tada imamo dve mogućnosti

$$(i1) \quad 10^{k-1} < 2^n < 5 \cdot 10^{k-1} \quad \text{ i } \quad (i2) \quad 5 \cdot 10^{k-1} < 2^n < 10^k.$$

Potrebno je pokazati da broj nastao dopisivanjem brojeva 2^{n+1} i 5^{n+1} ima tačno $n+2 = k+m+1$ cifru.

(i1) $2^{n+1} < 10^k$ i broj 2^{n+1} ima k cifara. S druge strane je $2^n \cdot 5^n < 5^{n+1} \cdot 10^{k-1}$, odakle sledi da je $10^{n-k+1} < 5^{n+1}$, tj. broj 5^{n+1} ima barem $n+2-k$ cifri. Više ih ne može imati zbog $5^n < 10^{n-k+1} \implies 5^{n+1} < 5 \cdot 10^{n-k+1} < 10^{n-k+2}$. Tako da u ovom slučaju tvrdnja važi.

(i2) $5 \cdot 10^{k-1} < 2^n < 10^k$, odakle sledi da je $10^k < 2^{n+1}$ i broj 2^{n+1} ima $k+1$ cifru. Iz druge nejednakosti sledi $5^{n+1} \cdot 10^{k-1} < 10^n$, odakle je $5^{n+1} < 10^{n-k+1}$ tako da brojevi 5^n i 5^{n+1} imaju isti broj cifara $m = n - k + 1$. Dakle, ukupan broj cifara broja nastalog dopisivanjem brojeva 2^{n+1} i 5^{n+1} , i u ovom slučaju, je $n+2 = k+m+1$.

1.68. Dokažite da za svaki prirodan broj n važe sledeće nejednakosti:

$$(i1) \quad |\sin nx| \leq n \|\sin x\|, \quad (i2) \quad \text{za } \forall \beta \leq -3 \text{ važi } (1+\beta)^{2n-1} \leq 1 + (2n-1)\beta,$$

$$(i3) \quad (2n)! < \frac{(2n+2)^{2n+1}}{2n+1}, \quad (i4) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Dokaz: (i2) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo, $(1+\beta)^{2 \cdot 1 - 1} = 1 + \beta \leq 1 + \beta = 1 + (2 \cdot 1 - 1)\beta$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n , sada imamo

$$(1+\beta)^{2n+1} = (1+\beta)^2 (1+\beta)^{2n} \stackrel{(\text{pi})}{\leq} (1+\beta)^2 (1 + (2n-1)\beta) = 1 + (2n+1)\beta + 2(2n-1)\beta^2 + \beta^2 + (2n-1)\beta^3 \leq 1 + (2n+1)\beta,$$

jer je $2(2n-1)\beta^2 + \beta^2 + (2n-1)\beta^3 \leq 0$, za $\beta \leq -3$. Pokažimo sada ovu nejednakost. Ako je $\beta = 0$ onda nejednakost važi. Ako $\beta \neq 0$ tada je ova nejednakost ekvivalentna sa $(2n-1)\beta + 4n - 1 \leq 0$ ili $\beta \leq (1-4n)/(2n-1)$. Poslednja nejednakost posledica je sledećeg niza ekvivalencija ($\forall n \in \mathbb{N}$),

$$2n-2 \geq 0 \iff 4n-1 \leq 6n-3 \iff \frac{4n-1}{2n-1} \leq 3 \iff \beta \leq -3 \leq \frac{4n-1}{2n-1}.$$

(i4) Baza indukcije. Za $n=1$ imamo $1/2 \leq 1/\sqrt{3 \cdot 1 + 1}$, što je tačno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za neki prirodan broj n , pa imamo redom

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{2n+1}{2n+3} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k+1} \stackrel{\text{(pi)}}{\leq} \frac{2n+1}{2n+3} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}},$$

jer je poslednja nejednakost ekvivalentna (koren je monotona funkcija pa možemo da kvadriramo poslednju nejednakost) sa

$$(4n^2 + 4n + 1)(3n + 4) \leq (4n^2 + 8n + 4)(3n + 1) \iff \\ 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 \iff n > 0.$$

1.69. Dokažite da za svaki prirodan broj n važi:

$$\begin{array}{ll} \text{(i1)} \quad \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \in \mathbb{N}, & \text{(i2)} \quad 6 \mid n(n+1)(4n+5), \\ \text{(i3)} \quad 9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3, & \text{(i4)} \quad 30 \mid n^5 + 5n^3 - 6n, \\ \text{(i5)} \quad 3 \mid 5^n + 2^{n+1}, & \text{(i6)} \quad 64 \mid 3^{2n+3} + 40n - 27, \\ \text{(i7)} \quad 9 \mid 3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4, & \text{(i8)} \quad 17 \mid 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}. \end{array}$$

Dokaz: (i1) Baza indukcije. Za $n = 1$ imamo $1/6 + 1/3 + 1/2 = 1 \in \mathbb{N}$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ je $n/6 + n^2/2 + n^3/3 = \alpha \in \mathbb{N}$, sada imamo,

$$\frac{n+1}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} = \alpha + \frac{1}{6} + n + \frac{1}{2} + n^2 + n + \frac{1}{3} \in \mathbb{N}.$$

(i2) Definišemo polinom $f(x) = x(x+1)(4x+5)$. Sada je tvrdnja ekvivalentna sa $6 \mid f(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Baza indukcije. Za $n = 1$ imamo $f(1) = 1 \cdot (1+1) \cdot (4 \cdot 1 + 5) = 18$ i $6 \mid 18$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \mid f(n)$, tj. $f(n) = 6\alpha$ za neki $\alpha \in \mathbb{N}$. sada imamo,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1)(n+2)(4n+9) = n(n+1)(4n+9) + 2(n+1)(4n+9) \\ &= n(n+1)(4n+5) + 4n(n+1) + 2(n+1)(4n+9) = f(n) + 4n(n+1) \\ &\quad + 2(n+1)(4n+9) \stackrel{\text{pi}}{=} 6\alpha + 2(n+1)(6n+9) = 6\alpha + 6(n+1)(2n+3) \\ &= 6 \underbrace{(\alpha + (n+1)(2n+3))}_{\in \mathbb{N}} \implies 6 \mid f(n+1). \end{aligned}$$

Korak indukcije u (i3) i (i4) sličan je istom od (i1), a korak indukcije u (i5)-(i7) sličan je koraku indukcije od (i8), tvrdnju koju ćemo sada dokazati.

(i8) Definišemo funkciju $f(x) = 3 \cdot 5^{2x+1} + 2^{3x+1}$. Sada je naša tvrdnja ekvivalentna sa $17 \mid f(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Baza indukcije. Za $n = 1$ imamo $f(1) = 3 \cdot 5^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{3 \cdot 1 + 1} = 3 \cdot 125 + 16 = 391 = 17 \cdot 23$ i $17 \mid f(1)$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \mid f(n)$, tj. $f(n) = 17\alpha$ za neki $\alpha \in \mathbb{N}$. sada imamo,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4}) = 75 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} = 8(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) \\ &\quad + 51 \cdot 5^{2n+1} \stackrel{\text{pi}}{=} 8 \cdot 17 \cdot \alpha + 17 \cdot 5^{2n+1} = 17 \underbrace{(8\alpha + 3 \cdot 5^{2n+1})}_{\in \mathbb{N}} \implies 17 \mid f(n+1). \end{aligned}$$

1.70. Dokažite da

$$\begin{array}{ll} \text{(i1)} \quad \forall n \geq 5, \text{ važi } 2^n > n^2, & \text{(i2)} \quad \forall n \geq 10, \text{ važi } 2^n > n^3, \\ \text{(i3)} \quad \forall n \geq 2, \text{ važi } \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, & \\ \text{(i4)} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq b, \text{ i } n \geq 2, \text{ važi } (a+b)^n < 2^n \frac{a^n + b^n}{2}. & \end{array}$$

(i1) Baza indukcije. Za $n = 5$ imamo $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $4 < n \in \mathbb{N}$, $2^n > n^2$. sada imamo,

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \stackrel{\text{pi}}{<} 2^n + 2n + 1 \leq 2^{n+1},$$

jer je $2n + 1 \leq 2^n$, za svaki $n \geq 3$, što ćemo pokazati takođe indukcijom. Za $n = 3$ tvrdnja važi jer je $2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$. Sada pretpostavimo da je ova nejednakost tačna za neki $3 \leq n \in \mathbb{N}$ i imamo

$$2(n+1) + 1 = (2n+1) + 2 \stackrel{\text{pi}}{<} 2^n + 2 < 2^n + 2^2 = 2^{n+1}.$$

Dakle, time je pokazano da za $3 \leq n \in \mathbb{N}$ je $2n + 1 < 2^n$, a samim tim je dokazana naša tvrdnja.

(i2) analogno kao (i1).

(i4) Baza indukcije. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, tada za $n = 2$ imamo

$$0 < (a-b)^2 \iff (a+b)^2 < 2(a^2 + b^2) = 2^2 \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Korak indukcije. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $2 \leq n \in \mathbb{N}$ i sve $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$. Sada redom nalazimo,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{jer } a+b>0}{<} (a+b)2^{n-1}(a^n + b^n) \leq 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}).$$

Poslednja nejednakost je tačna jer je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} (a+b)(a^n + b^n) \leq 2(a^n + b^n) &\iff a^{n+1} - a^n b + b^{n+1} - a b^n \geq 0 \\ &\iff (a-b)(a^n - b^n) > 0, \end{aligned}$$

što je tačno jer je stepena funkcija monotona.

1.71. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definišemo niz

$$a_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad a_2 = \frac{1}{2}(\beta + a_1), \quad \text{za } n > 2 \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Pokažite da za svaki prirodan broj važi formula

$$a_n = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \beta.$$

Dokaz: Baza indukcije. Kako rekurentna formula uključuje dva susedna člana niza bazu je potrebno proveriti za $n = 1$ i $n = 2$.

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1\right) \beta = \frac{1}{3} \frac{3}{2} \alpha + \frac{1}{3} \frac{3}{2} \beta = a_1, \\ n = 2 &\implies \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) \beta = \frac{1}{3} \frac{3}{4} \alpha + \frac{1}{3} \frac{9}{4} \beta = \frac{1}{4} \alpha + \frac{3}{4} \beta = a_2. \end{aligned}$$

Korak indukcije. Pretpostavimo da je data formula tačna za dva susedna prirodan broja $n-1$ i n , sada imamo redom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_n) \stackrel{\text{pi}}{=} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \left(1 - (-1)^{n-1}\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(1 - (-1)^n\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(2 + (-1)^{n-1}\right) \beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(2 + (-1)^n\right) \beta \right] = \frac{1}{3} \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right) + \frac{1}{3} \beta \left(2 + \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right) = \frac{1}{3} \left(1 - (-1)^{n+1}\right) \alpha + \frac{1}{3} \left(2 + (-1)^{n+1}\right) \beta \\ \text{jer je} \quad &\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

1.72. Pokažite da važe sledeći identiteti,

$$(i1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = 2^{n-1} n, \quad (i2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0,$$

$$(i3) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad m > n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{m}{k} = \binom{m-1}{n},$$

$$(i4) \quad \forall n, k, m \in \mathbb{N}, \quad k, m \leq n, \quad \sum_{j=0}^k \binom{n-m}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n}{k}.$$

Uopštite (i1) i (i2) povećavajući stepen od k u sumama.

Nizovi

1. Limes niza

2.1. Definicija. Niz realnih brojeva, ili kraće niz, je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Broj $a(n) \equiv a_n$ je n -ti član niza. Za niz koristimo oznake (a_n) ili $\{a_n\}$. Pri tome razlikujemo niz $\{a_n\}$ od skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, jer u nizu¹ svaki član ima tačno određeno mesto na kojem se nalazi, što nije slučaj kod skupa, jer u skupu nije bitan redosled elemenata². Ponekad se pod nizom podrazumeva svaka funkcija $a : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, što ćemo i mi ponekad koristiti.

Nizove obično zadajemo: *popisivanjem elemenata*: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, *formulom opšteg člana*, npr: $a_n = n^2 + 1$ ili *rekurentnom relacijom*, npr.: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = a_2 = 1$.

Primer. Ako je niz zadat formulom, lako se može zapisati popisivanjem elemenata. Obratno je obično teže. Npr. niz zadat formulom

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \quad \text{jednak je} \quad (1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots)$$

Za niz $\{a_n\}$ kažemo da je **monoton** (rastući, opadajući, strogo rastući, strogo opadajući) ako je takav posmatran kao funkcija $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Slično, kažemo da je niz **ograničen** ako je $\text{Im } a$ ograničen podskup u $\mathbb{R}$, tj. ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ važi, $|a_n| \leq M$. Analogno se definiše pojam **ograničenosti niza**

$$\text{odozdo:} \quad (\exists m \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \text{je } m \leq a_n$$

$$\text{odozgo:} \quad (\exists M \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \text{je } a_n \leq M.$$

Primer. Niz sa opštim članom $a_n = \frac{1}{n} \equiv (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ je monoton, strogo opadajući, i ograničen jer je

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n, \quad \text{i jer je} \quad |a_n| \leq 1.$$

¹ Niz možemo shvatiti kao uređenu $\mathbb{N}$ -torku.

² tj. skupovi $\{1, 2\}$ i $\{2, 1\}$ su međusobno jednaki, a podudaraju se i sa skupom $\{1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1\}$.

S druge strane, niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \equiv (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots)$ nije monoton,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} > -\frac{1}{2n+1} = a_{2n+1} < a_{2n+2} = \frac{1}{2n+2},$$

ali je ograničen jer je $|a_n| \leq 1$. Postoje nizovi koji nisu monotoni i koji nisu ograničeni, takav je npr. niz $(1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots)$ ³

2.2. Limes (granična vrednost) niza. Realan broj b je granična vrednost ili limes niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da za } n \geq n(\varepsilon) \quad \text{je } |a_n - b| < \varepsilon.$$

Za niz koji ima limes kažemo da je **konvergentan** ili da niz **konvergira**. Niz koji nema limes zove se **divergentan** niz ili kažemo da niz **divergira**.

Iz definicije limesa zaključujemo da konvergentni niz ima svojstvo da svaka ε -okolina tačke b , tj. interval $I_b^\varepsilon = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sadrži **beskonačno mnogo** članova niza i da se izvan toga intervala nalazi **samo konačno mnogo** članova niza. Za skup $A \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da sadrži **skoro sve** članove niza $\{a_n\}$ ako skup $A^c = \mathbb{N} \setminus A$ sadrži samo konačan broj elemenata članove niza $\{a_n\}$. Dakle, ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan i ako je b njegov limes onda **svaka** ε -okolina⁴ tačke b , I_b^ε , sadrži **skoro sve** elemente niza $\{a_n\}$.

Za konvergentne nizove kristimo oznake:

$$a_n \longrightarrow b, \quad \{a_n\} \longrightarrow a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b, \quad \lim a_n = b.$$

Primer. Dokažimo da je $\lim \frac{1}{n} = 0$. Zaista, neka je $\varepsilon > 0$ ⁵ proizvoljan realan broj. Tada je

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n,$$

tako da možemo izabrati $n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, gde $[x]$ predstavlja najveći celi broj manji od x . Npr. za $\varepsilon = 0.12$ je $n(\varepsilon) = [1/0.12] + 1 = [8.333] + 1 = 9$ pa se članovi niza $a_9, a_{10}, a_{11}, \dots$ nalaze unutar intervala $(-0.12, 0.12)$. Primetimo da je $n(\varepsilon)$ opadajuća funkcija od ε , dakle ako smanjimo ε veći broj članova niza ostaće izvan intervala I_b^ε . Interval I_b^ε sadrži **skoro sve** članove niza, tj. I_b^ε sadrži **beskonačno** članova konvergentnog niza, dok izvan I_b^ε uvek ima **konačno** članova niza $\{a_n\}$.

Kažemo da niz $\{a_n\}$ **divergira prema $+\infty$** ako

$$(\forall M > 0)(\exists n(M) \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da za } n \geq n(M) \quad \text{je } a_n > M.$$

³ Da li možete napisati formulu za opšti član ovog niza?

⁴ bez obzira koliko je ε mali pozitivan broj, npr. $\varepsilon = 0.000000000000000001$.

⁵ proizvoljno mali pozitivan realan broj.

Analogno, niz $\{a_n\}$ divergira prema $-\infty$ ako

$$(\forall M > 0)(\exists n(M) \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da za } n \geq n(M) \quad \text{je } a_n < -M.$$

Na primer, niz $a_n = n^3$ divergira u $+\infty$, a niz $a_n = -n$ divergira u $-\infty$.

Napomena. Primetimo da ako proširimo skup $\mathbb{R}$ sa tačkama $-\infty, \infty$ ⁶, tada divergenciju prema $-\infty$ ili ∞ u smislu definicije limesa postaje konvergencija u proširenom skupu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, tako da koristimo oznake $\lim a_n = \pm\infty$. Jedno od osnovnih svojstava konvergentnih nizova sadržano je u sledećoj teoremi.

Teorema. *Niz može imati najviše jedan limes.*

Dokaz. Pretpostavimo da niz ima dva različita konačna limesa b i $\bar{b}$. Neka je $\varepsilon = |b - \bar{b}|/2$. Tada okolina I_b^ε sadrži skoro sve članove niza $\{a_n\}$, tako da se izvan okoline I_b^ε nalazi samo konačno članova niza $\{a_n\}$, pa i okolina $I_{\bar{b}}^\varepsilon$, koja je disjunktna sa okolinom I_b^ε , sadrži konačno mnogo članova niza, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\bar{b}$ limes niza $\{a_n\}$. Dobijena kontradikcija pokazuje da je naša polazna pretpostavka da niz $\{a_n\}$ ima dva limesa b i $\bar{b}$ pogrešna. $\square$

2. Tačka nagomilavanja niza i podniz

2.3. Tačka nagomilavanja niza. Broj b je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako se u svakoj ε -okolini broja b nalazi beskonačno mnogo članova niza, formalno

$b \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \quad \text{takav da je } |a_m - b| < \varepsilon.$$

$+\infty$ je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \quad \text{takav da je } a_m > M,$$

$-\infty$ je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako

$$(\forall M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}, m > n) \quad \text{takav da je } a_m < -M.$$

Najveća tačka nagomilavanja niza zove se **limes superior** i obeležava se sa $\limsup$, a najmanja tačka nagomilavanja niza zove se **limes inferior** i obeležavamo ga sa $\liminf$.

Limes i tačka nagomilavanja niza. Iz definicije je jasno da je limes niza i tačka nagomilavanja niza, obratno ne važi tj. tačka nagomilavanja niza ne mora biti limes niza, kao što pokazuje primer niza: $a_n = (-1)^n$, koji ima dve tačke nagomilavanja 1 i -1 , ali ni jedna od njih nije limes tog niza jer izvan proizvoljne ε -okoline ($\varepsilon < 1$) tačke 1 (ili -1) postoji beskonačno članova niza. Ovaj primer je tipičan i pokazuje razliku između tačke nagomilavanja niza i limesa. Ta razlika se sastoji u tome što se unutar svake ε -okoline tačke nagomilavanja niza nalazi **beskonačno članova** tog niza, ali se i izvan te okoline može nalaziti **beskonačno članova** niza. Npr. u prethodnom primeru u

⁶U čemu se tačke $-\infty, \infty$ razlikuju od ostalih tačaka skupa $\mathbb{R}$?

svakoj dovoljno maloj ε -okolini $\varepsilon < 1$ tačaka 1 i -1 ima beskonačno članova niza sa parnim odnosno neparnim indeksima. Oдавde sledi da ako niz ima barem dve tačke nagomilavanja tada on nije konvergentan. Primetimo da ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tada je $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

Primer (a) Niz $a_n = n^2(1 - (-1)^n)$, odnosno $(2, 0, 18, 0, 50, 0, \dots)$ je divergentan i ima tačke nagomilavanja 0 i $+\infty$ i važi $\liminf a_n = 0$ i $\limsup a_n = +\infty$.

(b) Primetimo da su tačke nagomilavanja niza $(1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots)$ svi prirodni brojevi jer se svaki od njih pojavljuje beskonačno mnogo puta, drugim rečima niz može imati beskonačno tačaka nagomilavanja.

2.4. Podniz. Podniz niza $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ je svaka kompozicija $a \circ \alpha$, gdje je $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. k -ti član podniza $a \circ \alpha$ je

$$(a \circ \alpha)(k) = a(\alpha(k)) = a_{\alpha(k)} = a_{\alpha_k}.$$

Dakle, podniz se dobije ako iz polaznog niza izbacimo beskonačan broj članova polaznog niza. Jasno, podniz je opet niz.

Primer. Podniz $\{a_{2n}\}$ niza $a_n = (-1)^n$ je konstantan niz $(1, 1, 1, \dots)$, a podniz $\{a_{2n-1}\}$ istog niza je konstantan niz $(-1, -1, -1, \dots)$.

2.5. Geometrijski niz. Niz

$$a_n = q^n, q \in \mathbb{R}, \quad \text{ili} \quad (q, q^2, q^3, q^4, \dots, q^n, \dots)$$

zove se **geometrijski niz**. Za $|q| < 1$ niz konvergira prema nuli. Za $q = 1$ niz je konstantan, $(1, 1, 1, \dots)$, i konvergira prema 1. Za $q = -1$ niz postaje $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ pa ima dve tačke nagomilavanja 1 i -1 . Za $|q| > 1$ niz divergira. Posebno, za $q > 1$ niz konvergira prema $+\infty$, dok za $q < -1$ niz ima dve tačke nagomilavanja $+\infty$ i $-\infty$.

2.6. Tačke nagomilavanja niza i podniz. Kombinujući definicije podniza i tačke nagomilavanja zaključujemo:

- (i1) broj b je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ ako i samo ako postoji (barem jedan) njegov podniz $\{a_{\alpha_k}\}$ koji konvergira prema b ,
- (i2) ako je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tada za svaki njegov podniz $\{a_{\alpha_k}\}$ važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\alpha_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

2.7. Ograničenost i konvergencija. Niz $\{a_n = (-1)^n\}$ je svakako ograničen, ali nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja. Sledeća teorema pokazuje da obrat važi.

Teorema. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je $a = \lim a_n$. Izaberimo, npr. $\varepsilon = 1$. Tada se članovi niza $a_{n(1)}, a_{n(1)+1}, a_{n(1)+2}, \dots$ nalaze unutar intervala $(a - 1, a + 1)$. Odatle sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a - 1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a + 1\},$$

i dokaz je gotov. □

2.8. Monotonost i kovergencija. Ispitajmo sada odnos konvergencije nizova i podnizova sa motonošću i ograničenošću istih. U tom cilju imamo prvo sledeću važnu teoremu, jednostavnog iskaza i nešto težeg dokaza.

Teorema 1. *Svaki niz ima monotoni podniz.*

Dokaz. Za dati niz $\{a_n\}$ definišimo skup $A = \{m \in \mathbb{N} \mid \text{za } n \geq m \text{ je } a_n \geq a_m\}$. Skup A može biti konačan ili beskonačan. Ako je A beskonačan tada u njemu možemo odabrati strogo rastući niz $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, odakle zbog definicije skupa A imamo $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \dots \leq a_{n_k} \leq \dots$. Dakle, $\{a_{n_k}\}$ je rastući podniz niza $\{a_n\}$ i u ovom slučaju dokaz je gotov. Ako je skup A konačan, izaberimo $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je veći od svih elemenata od A . Tada opet postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_2 > n_1$ i $a_{n_2} < a_{n_1}$, jer bi u suprotnom $n_1 \in A$. Jasno, opet imamo $n_2 \notin A$. Nastavljajući ovu konstrukciju dolazimo do strogo rastućeg niza $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, koji je podskup skupa $\mathbb{N} \setminus A$. Takođe važi da je $a_{n_1} > a_{n_2} > \dots > a_{n_k} > \dots$, pa je $\{a_{n_k}\}$ strogo opadajući podniz niza $\{a_n\}$. □

Sledeća teorema veoma je važna u primenama, tj. u dokazivanjima da su neki nizovi konvergentni.

Teorema 2. *Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.*

Dokaz. Dokažimo teoremu kada je niz $\{a_n\}$ rastući. Neka je b supremum niza posmatranog kao podskup od $\mathbb{R}$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da $a_{n(\varepsilon)} > b - \varepsilon$, jer bi u suprotnom postojao $\varepsilon_0 > 0$ takav da je $a_n \leq b - \varepsilon_0$ za svako n , odakle bi sledilo da b nije supremum tog niza. Kako je niz $\{a_n\}$ rastući imamo da za $n \geq n(\varepsilon)$ važi $b \geq a_n \geq a_{n(\varepsilon)} \geq b - \varepsilon$, tj. $|a_n - b| < \varepsilon$, dakle, $\lim a_n = b$ i teorema je dokazana. Analogno se tretira slučaj kada je niz $\{a_n\}$ opadajući. □

Koristeći prethodne dve teoreme dobijamo poznatu Bolzano-Weierstrassovu teoremu.

Teorema 3 (Bolzano – Vajerštras⁷). *Svaki ograničen niz ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Prema Teoremi 1 svaki niz ima monoton podniz, kako je dati niz i ograničen, tada je i njegov monotoni podniz takođe ograničen, i taj podniz konvergira prema Teoremi 2. □

Primetimo da u $\overline{\mathbb{R}}$ prethoda teorema glasi: **Svaki niz sadrži konvergentan podniz.** Ako je niz ograničen tada prema prehodnoj teoremi ima konvergentan podniz. Ako nije ograničen tada ima podniz koji konvergira prema $+\infty$ ili prema $-\infty$.

⁷Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897, nemački matematičar.

3. Broj e

2.9. Broj e . Dokažimo da je niz,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

rastući i ograničen odozgo pa je na osnovu **Teoreme 2** iz prethodne tačke konvergetan. Limes tog niza obeležavamo sa e ⁸

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dokažimo sada da je zadani niz ograničen odozgo:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \frac{1}{n^0} \binom{n}{0} + \frac{1}{n} \binom{n}{1} + \frac{1}{n^2} \binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \cdots + \frac{1}{n^n} \binom{n}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3. \end{aligned}$$

Niz $\{x_n\}$ je strogo rastući, jer zbog očiglednih nejednakosti $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$ $k = 1, 2, \dots, n$ imamo redom:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}. \end{aligned}$$

4. Svojstva limesa

2.10. Algebarska svojstva limesa. Algebarska svojstva limesa nizova sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema. Neka su data dva konvergentna niza $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Tada važe formule:

- (i1) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim(a_n) \pm \lim(b_n)$,
- (i2) $\lim(c a_n) = c \lim(a_n)$, za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$,

⁸ Broj e je transcendentan (nije nula niti jednog polinoma sa celobrojnim koeficijentima) i prvih 50 cifara njegovog decimalnog zapisa su: 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995.

$$(i3) \quad \lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n),$$

$$(i4) \quad \text{ako za svako } n \in \mathbb{N} \text{ važi } b_n \neq 0 \text{ i ako je } \lim b_n \neq 0, \text{ tada je } \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n},$$

Dokaz. Dokažimo (i1). Neka je $\lim a_n = a$ i $\lim b_n = b$, tada:

$$(2.1) \quad \text{za } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ postoji } n_1 \in \mathbb{N} \text{ takav da za sve } n > n_1 \text{ je } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(2.2) \quad \text{za } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ postoji } n_2 \in \mathbb{N} \text{ takav da za sve } n > n_2 \text{ je } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da bismo dokazali (i1) izaberimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ važe obe nejednakosti iz (2.1) i (2.2), tako da imamo

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ iz definicije limesa sledi da je $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

Za dokaz (i3), prvo primetimo,

$$(2.3) \quad |a_n b_n - a b| = |(a_n - a) b_n + (b_n - b) a| \leq |a_n - a| |b_n| + |b_n - b| |a|.$$

Da bismo mogli dovršiti dokaz potrebno je pogodno izabrati okoline kao funkcije od $\varepsilon > 0$ i iskoristiti činjenicu da je konvergentan niz ograničen. To možemo uraditi na sličan način kao u dokazu svojstva (i1). Dakle, kako je niz b_n konvergentan tada postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $|b_n| < M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada za $a \neq 0$ ⁹ imamo,

$$(2.4) \quad \text{za } \frac{\varepsilon}{2M} > 0 \text{ postoji } n_1 \in \mathbb{N} \text{ takav da za sve } n > n_1 \text{ je } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

$$(2.5) \quad \text{za } \frac{\varepsilon}{2|a|} > 0 \text{ postoji } n_2 \in \mathbb{N} \text{ takav da za sve } n > n_2 \text{ je } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}.$$

Sada izaberimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ važe obe nejednakosti iz (2.4) i (2.5), tako da desnu stranu od (2.3) možemo oceniti,

$$|a_n b_n - a b| = |(a_n - a) b_n + (b_n - b) a| \leq |a_n - a| |b_n| + |b_n - b| |a| \leq \frac{\varepsilon}{2M} |b_n| + \frac{\varepsilon}{2|a|} |a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ iz definicije limesa sledi da je $\lim(a_n b_n) = a b = \lim a_n \lim b_n$.

Dokaz od (i2) direktno iz definicije, dokaz od (i4) je veoma sličan dokazu od (i3). □

Primer 1. Koristeći da je $\lim \frac{1}{n} = 0$, koristeći prethodnu teoremu zaključujemo,

$$\lim \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{za svako } \alpha > 0. \\ \infty, & \text{za svako } \alpha < 0. \end{cases}$$

Primer 2. Limes niza,

$$\xi_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 + b_0}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad a_k, b_m \neq 0,$$

⁹ Objasnite kako tretirati slučaj ako je $a = 0$.

nalazimo na sledeći način

$$\begin{aligned} \lim \xi_n &= \lim \frac{(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0) \cdot \frac{1}{n^m}}{(b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0) \cdot \frac{1}{n^m}} = \lim \frac{(a_k n^{k-m} + a_{k-1} n^{k-m-1} + \dots + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \frac{a_0}{n^m})}{(b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m})} \\ &= \frac{\lim(a_k n^{k-m}) + \lim(a_{k-1} n^{k-m-1}) + \dots + \lim \frac{a_1}{n^{m-1}} + \lim(\frac{a_0}{n^m})}{\lim b_m + \lim \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \lim \frac{b_1}{n^{m-1}} + \lim \frac{b_0}{n^m}} \\ &= \frac{a_k \lim n^{k-m} + a_{k-1} \lim n^{k-m-1} + \dots + \lim a_1 \frac{1}{n^{m-1}} + a_0 \lim \frac{1}{n^m}}{b_m + b_{m-1} \lim \frac{1}{n} + \dots + b_1 \lim \frac{1}{n^{m-1}} + b_0 \lim \frac{1}{n^m}} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } k < m, \\ \frac{a_k}{b_k}, & \text{ako je } k=m, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_m}\right) \infty, & \text{ako je } k > m. \end{cases} \end{aligned}$$

2.11. Limes i nejednakosti. U dokazivanju mnogih teorema i nejednakosti koristi se dobro ponašanje limesa prema nejednakostima, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema (o dva policajca). *Ako za nizove $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da sve $n \geq n_0$ važi nejednakost $a_n \leq b_n \leq c_n$ i ako je $\lim a_n = \lim c_n = \xi$, tada je i $\lim b_n = \xi$.*

Dokaz. Iz pretpostavke da je $\lim a_n = \lim c_n = \xi$, za dati $\varepsilon > 0$ sledi da postoje (kao u formulama (2.1) i (2.2)) $n_1 \in \mathbb{N}$ i $n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da svi članovi nizova $\{a_n\}$ i $\{c_n\}$ sa indeksima većim od n_1 odnosno n_2 pripadaju okolini I_ξ^ε . Primetimo da ako uzmemo $\tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ tada će svi članovi sva tri niza $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ čiji su indeksi veći od $\tilde{n}_0$ pripadati okolini I_ξ^ε : jer važi,

$$\xi - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \xi + \varepsilon.$$

Time smo pokazali da za dati $\varepsilon > 0$ postoji okolina I_ξ^ε broja ξ koja sadrži gotovo sve članove niza $\{b_n\}$, pa je i $\lim b_n = \xi$. $\square$

Primer. Pokažimo da je $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$. Zaista, kako je $-1 \leq \cos n \leq 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ važe nejednakosti

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Budući da nizovi $a_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$ i $c_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, tvrđenje sledi iz prethodne teoreme.

2.12. Umetnuti intervali. Neka je dat niz intervala takvih da je

$$I_1 = [a_1, b_1] \supsetneq I_2 = [a_2, b_2] \supsetneq \dots \supsetneq I_n = [a_n, b_n] \supsetneq \dots$$

Ovakav niz podskupova od $\mathbb{R}$ zove se niz **umetnutih intervala**. Osnovna osobina ovakvog niza sadržan je u sledećoj teoremi.

Teorema (Koši¹⁰–Kantor¹¹). *Za svaki niz umetnutih intervala postoji tačka $c \in \mathbb{R}$ koja pripada svakom od intervala I_n .*

¹⁰ Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857, poznati francuski matematičar, inženjer i fizičar, jedan od osnivača moderne matematičke analize i mehanike kontinuuma.

¹¹ Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845–1918, čuveni nemački matematičar, jedan od kreatora teorije skupova.

Specijalno, ako je $\lim(b_n - a_n) = 0$ tada je tačka c jedinstveno određena.

Dokaz. Primetimo da svaka dva intervala $I_n = [a_n, b_n] \supsetneq I_m = [a_m, b_m]$ važi da je $a_m \leq b_n$ jer bi u suprotnom da je $a_n \leq b_n < a_m \leq b_m$ sledilo $I_n \cap I_m = \emptyset$, što je nemoguće. Posmatrajmo sada monotone i ograničene nizove $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Niz A je rastući i ograničen odozgo sa b_1 , dok je niz B opadajući i ograničen odozdo sa a_1 , pa su na osnovu gornje teoreme konvergentni. Tako da je $\lim a_n = a = \sup A$ i $\lim b_n = b = \inf B$. Iz nejednakosti $a_m \leq b_n, \forall n, m \in \mathbb{N}$ sledi da je $a \leq b$. Time je dokazan prvi deo teoreme jer sve tačke iz intervala $[a, b]$ pripadaju svakom od intervala I_m .

Ako je još ispunjeno da je $0 = \lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b$, sledi da je $a = b = c$, tj. tačka c je jedinstveno određena. $\square$

2.13. Košijev niz. Postavlja se pitanje da li je moguće zaključiti da je neki niz konvergentan ako ne poznajemo limes. Odgovor je pozitivan i dobija se posmatranjem razlike susednih članova koje po apsolutnoj vrednosti moraju da teže 0. Preciznije imamo sledeću definiciju, niz $\{a_n\}$ je **Košijev** ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n = n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \text{važi da je} \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

U skupu $\mathbb{R}$ pojmovi konvergentnog i Košijevog niza su ekvivalentni, kao što tvrdi sledeća teorema.

Teorema. *Niz je konvergentan ako i samo ako je Košijev.*

Dokaz. Ako je niz konvergentan, tj. ako je $\lim a_n = b$, za $\varepsilon/2$ postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n > n_0$ važi $|a_n - b| < \varepsilon/2$, odakle za svaki $k \in \mathbb{N}$ sledi,

$$|a_{n+k} - a_n| = |(a_{n+k} - b) - (a_n - b)| \leq |a_{n+k} - b| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Obrat. Skica dokaza. Prvo se na sličan način kao i kod konvergentnih nizova pokaže da je Košijev niz ograničen¹². Prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi Košijev niz $\{a_n\}$ ima konvergentan podniz. Ako sa b obeležimo taj limes, u poslednjem koraku pokazuje se da je on i limes polaznog niza. $\square$

Primedba 1. Ova teorema ne vredi ako posmatramo nizove u polju $\mathbb{Q}$. Drugim rečima konvergencija Košijevih nizova je u vezi sa aksiomom o supremumu, i pokazuje se da se skup $\mathbb{R}$ može dobiti tako što se racionalnim brojevima dodaju limesi svih racionalnih Košijevih nizova.

Primedba 2. Zbog prethodne teoreme Košijevi nizovi su pogodni za dokazivanje konvergencije realnih nizova, pogotovo ako su ti nizovi monotoni jer su i ograničeni, što se često dešava kod redova sa pozitivnim članovima.

Primer. Znamo da je niz $\{a_n = 1/n\}$ konvergentan i pokažimo koristeći samo definiciju da je i Košijev. Primetimo,

$$\left| \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon + \frac{1}{n+k}.$$

Poslednja nejednakost je sigurno ispunjena ako je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, tako da možemo uzeti npr. $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.

¹² Potrebno je u dokazu teoreme za konvergentne nizove zameniti b sa a_n , odnosno a_n sa a_{n+k} .

2.14. Neki važni limesi. Sada navodimo nekoliko važnih limesa,

$$\begin{aligned}
 \text{(i1)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} &= 0, \quad a > 0, & \text{(i2)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} &= 0, \quad a > 1, \\
 \text{(i3)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n &= 0, \quad |q| < 1, & \text{(i4)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1, \quad a > 0, \\
 \text{(i5)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} &= 0, \quad a < 1, & \text{(i6)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1, \\
 \text{(i7)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) &= 1.
 \end{aligned}$$

5. Redovi i njihova konvergencija

2.15. Red realnih brojeva. Neka je $\{a_n\}$ niz realnih brojeva, tada sumu

$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m, \quad \text{za } n \leq m, \quad \text{obeležavamo simbolom } \sum_{k=n}^m a_k.$$

Želimo da damo smisao izrazu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kao sumi svih članova niza $\{a_n\}$. Red realnih brojeva ili kraće red u oznaci, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum a_k$ je niz parcijalnih suma $\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k\}$. Kažemo da red $\sum a_k$ konvergira (divergira) ako konvergira (divergira) niz parcijalnih suma $\{s_n\}$. U tom smislu koristimo zapis,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \Longleftrightarrow \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Broj a_n zove se n -ti član reda, i očigledno važi da je $s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$.

Primer. Geometrijski red,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n \dots$$

Za $q = 1$ očigledno je $s_k = k$ pa je $\sum q^{n-1} = \sum 1^{n-1} = +\infty$. Iz

$$s_k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q},$$

za $|q| < 1$ važi $q^k \rightarrow 0$ (vidi primer geometrijskog niza), pa geometrijski red konvergira i važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} = \frac{1 - \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} q^{k+1}}^{=0}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Za $q \geq 1$ je $\sum q^n = +\infty$, a za $q \leq -1$ niz $\{s_k\}$ nema limes.

Primer: Zenonov paradoks. Ahil se nalazi 1 metar iza kornjače, a 10 puta je brži. Ako krenu istovremeno, dok Ahil stigne do početnog položaja kornjače, kornjača će preći neki put do novog položaja. Kad Ahil stigne do novog položaja kornjače, kornjača će biti u novom položaju, itd. Prema tome, Ahil nikad neće stići kornjaču.

Objasnite u čemu se sastoji ovaj paradoks.

2.16. Nužan uslov konvergencije reda. Kod redova postavljaju se dva prirodna pitanja:

- (1) Da li red konvergira?
- (2) Ako red konvergira, koja mu je suma?

Prvi korak u odgovoru na prvo pitanje sadržan je u sledećoj teoremi.

Teorema. Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, onda je $\lim a_n = 0$.

Dokaz. Neka je $s = \sum a_n = \lim s_n$. Kako je $a_n = s_n - s_{n-1}$, imamo redom

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0,$$

i teorema je dokazana. □

Primer. Red $\sum \frac{1}{n}$, spada među najvažnije redove i naziva se **harmonijski red**. Harmonijski red ispunjava *nužan uslov konvergencije* jer je $\lim \frac{1}{n} = 0$, ali *nije konvergentan*,

tj. red je divergentan i
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Dokažimo ovu tvrdnju. Niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ je strogo rastući, a za njegov podniz $\{s_{2^m}\}$ važi,

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + (\dots) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, iz $s_{2^m} > 1 + m/2$ sledi da je $\lim s_{2^m} = +\infty$, pa je i $\lim s_k = +\infty$.

Primedba. Red $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$.

2.17. Kriterijumi konvergencije redova. U slučajevima geometrijskog reda i harmonijskog reda odgovorili smo na pitanje da li redovi konvergiraju i našli njihove sume. Obično je lakše dati odgovor na pitanje da li red konvergira, nego mu naći sumu (ako znamo da konvergira). U slučaju redova čiji su svi članovi pozitivni¹³, ispitivanje konvergencije svodi se na ispitivanje ograničenosti niza parcijalnih suma $\{s_n\}$, jer je niz parcijalnih suma automatski monoton, pa ako je još i ograničen na osnovu **Teoreme 2** iz **2.8** sledi da red konvergira.

¹³ Redovi sa pozitivnim članovima.

Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima, $a_n, b_n > 0$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$, red $\sum b_n$ nazivamo **majorantom reda** $\sum a_n$, a red $\sum a_n$ **minorantom reda** $\sum b_n$. Sada dajemo nekoliko kriterijuma konvergencije redova sa pozitivnim članovima.

Teorema. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima. Tada važe sledeći kriterijumi konvergencije:

- (i1) Red je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu, a divergentan ako ima divergentnu minorantu.
- (i2) Neka je $\lim \frac{a_n}{b_n} = r$. Ako je
 - (a) $0 < r < +\infty$, tada oba reda ili konvergiraju ili divergiraju;
 - (b) $r = 0$ i red $\sum a_n$ divergira, tada i red $\sum b_n$ divergira;
 - (c) $r = 0$ i red $\sum b_n$ konvergira, tada i red $\sum a_n$ konvergira;
 - (d) $r = +\infty$ i red $\sum a_n$ konvergira, tada i red $\sum b_n$ konvergira;
 - (e) $r = +\infty$ i red $\sum b_n$ divergira, tada i red $\sum a_n$ divergira.
- (i3) **Dalamberov**¹⁴ **kriterijum.** Neka je $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- (i4) **Košijev kriterijum.** Neka je $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$. Ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- (i5) **Rabeov**¹⁵ **kriterijum.** Neka je $\lim n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = q$. Ako je $q > 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako je $q < 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- (i6) **Gausov**¹⁶ **kriterijum.** Neka postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $s > 1$ i $M > 0$ takvi da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = q + \frac{\alpha}{n} + \frac{f(n)}{n^s}, \quad \text{za } n \geq n_0,$$

gde je $|f(n)| \leq M$ za sve $n \geq n_0$, tada red $\sum a_n$ **konvergira**, ako je $q > 1$ ili ako je $q = 1$ i $\alpha > 1$, i **divergira** ako je $q < 1$ ili $q = 1$ i $\alpha \leq 1$.

Dokaz. Dokažimo prvu varijantu poredbenog kriterijuma (i1), dok dokaze ostalih tvrdnji izostavljamo.

Neka red $\sum a_n$ ima konvergentnu majorantu $\sum b_n = b$ i neka je $a_n \leq b_n$. Niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ reda $\sum a_n$ ograničen je odozgo, $s_k \leq b$. Kako je $a_n > 0$, niz $\{s_k\}$ je i strogo rastući pa konvergira prema **Teoremi 2** iz **2.8**. Druga tvrdnja je očigledna. Dokazi svih pomenutih kriterijuma zasnivaju se na poredbenom kriterijumu datog reda sa geometrijskim ili harmonijskim redom. $\square$

¹⁴ Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717–1783, poznati francuski matematičar, mehaničar, fizičar, filozof i teoretičar muzike.

¹⁵ Joseph Ludwig Raabe, 1801–1859, švajcarski matematičar.

¹⁶ Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855, nemački matematičar, geodet i fizičar, jedan od najpoznatijih matematičara u istoriji, dao je značajne doprinose u mnogim oblastima matematike.

Rabeov kriterijum se koristi ako D'alambertov kriterijum ne daje odgovor, tj. kada je $\lim(a_{n+1}/a_n) = 1$, a Gausov ako ni Rabeov kriterijum ne daje odgovor.

Primer 1. Kako je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, red $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira jer ima divergentnu minorantu $\sum \frac{1}{n}$. Istu ideju možemo primeniti i na red $\sum \frac{1}{n^p}$, koji divergira za $p < 1$.

Primer 2. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Zbog $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ važi

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1},$$

sledi da $\lim s_k = 1$. Red $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ takođe konvergira jer ima konvergentnu majorantu $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Tada konvergira i red

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \sum \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sada zbog poredbenog kriterijuma red $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p \geq 2$.

Digresija. Problem nalaženja sume $\sum \frac{1}{n^2}$ poznat je kao i **Baselski problem**, koji je 1734. godine rešio Leonard Ojler.

Primer 3. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum \frac{n}{3^n}$ koristeći D'alambertov kriterijum.

Red konvergira po D'alambertovom kriterijumu jer je

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Red konvergira i po Košijevom kriterijumu jer je

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Primer 4. Dokazati konvergenciju reda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots,$$

koristeći D'alambertov kriterijum.

6. Apsolutna i uslovna konvergencija. Alternirani redovi

2.18. Apsolutna konvergencija. U prethodnoj tački dati su kriterijumi konvergenije za redove sa pozitivnim članovima. U ovoj tački bavimo se redovima čiji članovi

imaju različite predznake. U nekim slučajevima pomaže nam teorema o apsolutnoj konvergenciji.

Kažemo da je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan ili da konvergira apsolutno ako konvergira red $\sum |a_n|$.

Primetimo, da za redove s pozitivnim članovima koje smo razmatrali u prethodnoj tački, jer je $a_n = |a_n|$, nema razlike između konvergencije i apsolutne konvergencije. Navedimo sada nekoliko osnovnih teorema o apsolutno konvergentnim redovima.

Teorema 1. *Ako je red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan, tada je on i konvergentan.*

Dokaz. U dokazu koristimo činjenicu da je svaki Košijev niz konvergentan, koju primenimo na red parcijalnih suma. Kako je red $\{s_k = \sum_{i=0}^k |a_i|\}$ konvergentan on je i Košijev, tako da $\forall \varepsilon > 0$ postoji neko n_0 takvo da za sve $n > n_0$ i za sve $m \in \mathbb{N}$ sledi da je

$$(2.6) \quad |s_{n+m} - s_n| = \left| \sum_{i=0}^{n+m} |a_i| - \sum_{i=0}^n |a_i| \right| = \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| < \varepsilon.$$

Sada posmatrajmo niz parcijalnih suma reda $\sum a_n$, tj. niz $\{p_k = \sum_{i=0}^k a_i\}$. Koristeći nejednakost (2.6), kao i nejednakost mnogougla za apsolutnu vrednost, imamo redom

$$|p_{n+m} - p_n| = \left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i - \sum_{i=0}^n a_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} |a_i| < \varepsilon,$$

odakle sledi da je red $\{p_k\}$ Košijev¹⁷, pa je i konvergentan. □

Apsolutno konvergentni redovi imaju sledeće svojstvo.

Teorema 2. *Redosled sabiranja apsolutno konvergentnog reda $\sum a_n$ ne utiče na sumu reda. Preciznije, za proizvoljnu bijekciju $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i apsolutno konvergentni red $\sum a_n$ važi da je $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$.*

Primedba. Redovi koji su konvergentni, ali nisu apsolutno konvergentni zovu se **uslovno konvergentni redovi**. Uslovno konvergentni redovi nemaju svojstvo iz prethodne teoreme.

Primer. Primetimo da npr. redovi

$$(2.7) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \dots$$

$$(2.8) \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \dots$$

apsolutno konvergiraju jer se njihovi redovi apsolutnih vrednosti podudaraju sa konvergentnim geometrijskim redom $\sum 1/2^{n-1}$, pa možemo jednostavno naći njihove sume koristeći prethodnu teoremu i formulu za sumu geometrijskog reda, vidi tačku **2.15**.

Prema upravo pomenutoj teoremi i formuli sume redova (2.7) jednaka su:

¹⁷ Primetimo da smo pokazali da $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N})$ takvo da za sve $n > n_0$ i za sve $m \in \mathbb{N}$ sledi da je $|p_{n+m} - p_n| < \varepsilon$.

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

$$\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \cdots\right) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}.$$

2.19. Alternirani redovi. Pitanja konvergencije i pronalaženja suma redova čiji članovi imaju različite predznake, a koji nisu apsolutno konvergentni, je komplikovanije. Red $\sum a_n$ za koji je $\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ zove se **alternirani red**. U slučaju alterniranog reda, imamo sledeću teoremu poznatu kao i **Lajbnicov kriterijum konvergencije**.

Teorema (Lajbnić¹⁸). *Alternirani red $\sum a_n$ konvergira ako važi:*

- (i1) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ takav da za $n \geq n_0$ sledi $|a_{n+1}| \leq |a_n|$,
- (i2) $\lim a_n = 0$.

Primer. (i1) Alternirani harmonijski red

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

konvergira po Lajbnicovom kriterijumu, ali ne konvergira apsolutno jer red apsolutnih vrijednosti $\sum \frac{1}{n}$ divergira.

(i2) Alternirani red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

takođe konvergira po Lajbnicovom kriterijumu, ali ne konvergira apsolutno jer red $\sum \frac{1}{2n-1}$ divergira. Dakle, pomoću ovog reda moguće je izračunati numeričku vrednost broja π . Kako je konvergencija ovog reda vrlo spora u praksi se koriste drugi redovi koji značajno brže konvergraju.

Primedba. Pokažimo da **Teorema 2** iz prethodne tačke ne važi za alternirani harmonijski red, tj. da suma reda koji je konvergentan, ali nije apsolutno konvergentan ovisi o redosledu sabiranja. Prvo primetimo da su i pozitivni i negativni deo alterniranog harmonijskog reda beskonačni, tj.

$$\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty.$$

¹⁸Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716, veliki nemački matematičar, filozof, naučnik i diplomata, jedan od utemeljivača diferencijalnog računa. Prema knjizi Iva Vukčevića, Slovenska Germanija naslov originala: *Rex Germanorum, Populus Sclavorum: An Inquiry Into the Origin and Early History of the Serbs/Slavs of Sarmatia, Germania, and Illyria*, University Center Press, 2001, Lajbnić je bio najverovatnije srpskog porekla, rođen je u Lajpcigu koji se pre toga zvao Lipa, a nešto kasnije Lipsk.

Pretpostavimo da je dat proizvoljni realni broj $\alpha > 0$, tada uzmemo onoliko početnih pozitivnih članova reda (sa neparnim indeksima, tj. $a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, \dots, a_{2k_1-1} = \frac{1}{2k_1-1}$) sve dok njihova suma ne bude veća od α , zatim uzmemo onoliko početnih negativnih članova niza (sa parnim indeksima, tj. $a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots, a_{2k_2} = \frac{1}{2k_2}$) tako da ukupna suma pozitivnih i negativnih članova bude manja od α , zatim ponovo onoliko pozitivnih članova reda (sa neparnim indeksima, tj. $a_{2k_1+1} = \frac{1}{2k_1+1}, a_{2k_1+3} = \frac{1}{2k_1+3}, \dots, a_{2k_3-1} = \frac{1}{2k_3-1}$) dok ponovo ne dobijemo da je ta suma veća od α , i tako dalje. Ovaj algoritam možemo ponavljati unedogled jer je svaki ostatak od pozitivnog i negativnog dela i dalje beskonačan, a njihovi članovi su sve manji i manji po apsolutnoj vrednosti. Primetimo, da ako uzmemo proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ tada ovim algoritmom, jer za dato $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takav da za sve $n > n_0$ važi da je $|a_n| < \varepsilon$, dobijamo da postoji bijekcija $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takva da su skoro sve parcijalne sume reda $\sum_n a_{\sigma(n)}$ u intervalu $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) = I_\alpha^\varepsilon$. Dakle, suma reda biće jednaka α . Slično rasuđivanje prolazi i u slučaju da smo izabrali $\alpha \leq 0$.

Ovo je samo specijalni slučaj poznate Rimanove¹⁹

Teorema (Riman). *Neka je $\sum a_n$ uslovno konvergentan red i neka je $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ ²⁰, tada postoji bijekcija $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takva da je $\alpha = \sum a_{\sigma(n)}$.*

Zadatak. Ispišite dokaz Rimanove teoreme precizno, koristeći prethodnu Primedbu u kojoj je data dosta detaljna skica dokaza za alternirani harmonijski red.

¹⁹Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 – 1866, nemački matematičar, jedan od najvećih matematičara u istoriji, koji je dao velike doprinose geometriji (utemeljivač diferencijalne geometrije), matematičkoj analizi i teoriji brojeva. Mnogi matematički pojmovi nose njegovo ime, kao što su Rimanova geometrija (matematička oblast), Rimanov integral, Rimanova hipoteza (najpoznatiji otvoreni problem u matematici). Bio je najpoznatiji učenik Karla Fridriha Gausa.

²⁰ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Neprekidne funkcije

1. Limes funkcije

3.1. Limes funkcije. Neka je data funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Broj $a \in \mathbb{R}$ zove se **limes** ili **granična vrednost** funkcije f u tački x_0 , ako je f definisana na nekoj okolini $(c, d) \subseteq D$ tačke x_0 osim možda u tački x_0 , ako

za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da za sve x za koje je
 $0 < |x - x_0| < \delta$ važi da je $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Podsetimo se da skup $|x - x_0| < \delta$ možemo zapisati i kao okolinu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I_{x_0}^\delta$ i kako u gornjoj definiciji tačka x_0 ne mora biti u domenu funkcije f uvedimo oznaku $\dot{I}_{x_0}^\delta = I_{x_0}^\delta \setminus \{x_0\}$. Sada se gornji iskaz može napisati u skraćenoj formi kao:

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da za $x \in \dot{I}_{x_0}^\delta$ sledi da je $f(x) \in I_a^\varepsilon$.

Oznaka koja se koristi za limes funkcije u tački je,

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Primedba. Pojam limesa funkcije može se definisati na ekvivalentan način preko konvergencije limesa nizova: za funkciju f koja je definisana na nekoj okolini tačke x_0 , osim možda u tački x_0 , kažemo da ima **graničnu vrednost (limes)** a u tački x_0 ako za svaki niz $\{x_n\}$ koji konvergira ka x_0 niz njegovih slika $\{f(x_n)\}$ konvergira ka a .

Ova druga definicija limesa funkcije preko limesa nizova obično se koristi u dokazivanju da neki niz nije konvergentan, jer je dovoljno naći (samo!) jedan niz $\{x_n\}$ koji konvergira ka x_0 , ali niz njegovih slika $\{f(x_n)\}$ ne konvergira ka a .

3.2. Limes sleva i sdesna. Ponekad je potrebno ispitati da li funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ima limes sleva (levi limes) ili sdesna (desni) limes. Definicija je slična kao i kod definicije limesa samo je potrebno δ -okolinu tačke x_0 zameniti u slučaju levog limesa intervalom $(x_0 - \delta, x_0)$, a u slučaju desnog limesa okolinom $(x_0, x_0 + \delta)$. Preciznije, $a \in \mathbb{R}$ zove se **levi limes** funkcije f u tački x_0 , ako je f definisana na nekoj okolini tačke $x_0 \in (c, d)$, osim možda u tački x_0 , ako

za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0)$,
 važi da je $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Oznake koje se koriste za limese funkcije sleva odnosno sdesna su:

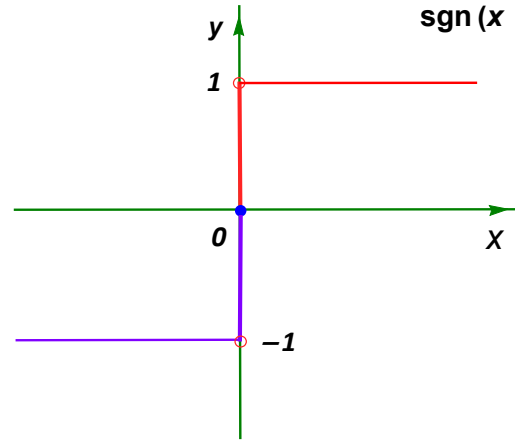
$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x).$$

Primer. Posmatrajmo funkciju **signum** koja je definisana na sledeći način

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x > 0, \\ 0, & \text{za } x = 0, \\ -1, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Kako je funkcija signum konstanta na $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ vidimo da je $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$ i $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$.

Dakle, levi limes funkcije i desni limes funkcije se razlikuju međusobno, ali se oba razlikuju i od vrednosti funkcije u posmatranoj tački jer je $\operatorname{sgn}(0) = 0$.



Slika 1. Grafik funkcije $\operatorname{sgn}(x)$

3.3. Limes u $\overline{\mathbb{R}}$. Prirodno se nameće pitanje definisanja limesa funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ u $\overline{\mathbb{R}}$, dakle kada $x \rightarrow \pm\infty$. U ovom slučaju domen D funkcije f mora biti neograničen sa one strane sa koje tražimo limes ili kada $f(x) \rightarrow \pm\infty$. Definicije ovih limesa zapravo zahtevaju razlikovanje tačaka $\pm\infty$ od ostalih tačaka skupa $\mathbb{R}$. Tako dobijamo sledeće definicije iskazane na formalnom jeziku:

- (i1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0) (\exists \delta > 0) \text{ tako da za sve } x \in D \cap \dot{I}_{x_0}^\delta \implies f(x) > M.$
- (i2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0) (\exists \delta > 0) \text{ tako da za sve } x \in D \cap \dot{I}_{x_0}^\delta \implies f(x) < -M.$
- (i3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists N > 0) \text{ tako da za sve } x \in D \cap (N, +\infty) \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$
- (i4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists N < 0) \text{ tako da za sve } x \in D \cap (-\infty, -N) \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$
- (i5) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0) (\exists N > 0) \text{ tako da za sve } x \in D \cap (N, +\infty) \implies f(x) > M.$
- (i6) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0) (\exists N > 0) \text{ tako da za sve } x \in D \cap (N, +\infty) \implies f(x) < -M.$
- (i7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0) (\exists N > 0) \text{ tako da za sve } x \in D \cap (-\infty, -N) \implies f(x) > M.$
- (i8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0) (\exists N > 0) \text{ tako da za sve } x \in D \cap (-\infty, -N) \implies f(x) < -M.$

Primer 1. Primetimo prvo da se za limese tipa (i1) i (i2) iz gornje liste mogu posmatrati levi i desni limesi iste funkcije. Tako npr. za funkciju $f(x) = 1/x$ važi,

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Primer 2. Funkcija $f(x) = 1/x$ je primeri za limese tipa (i3) i (i4), jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0_+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0_-.$$

Oznake 0_- i 0_+ znače da se 0 približavamo preko negativnih odnosno pozitivnih brojeva.

Primer 3. Funkcija $f(x) = e^x$ je primer za limese tipa (i5) i (i4) jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Primetimo da je funkcija $g(x) = -e^x$ je primer za limese tipa (i6), funkcija $h(x) = e^{-x}$ je primer za limese tipa (i7), dok je funkcija $i(x) = -e^{-x}$ primer za limese tipa (i8).

2. Svojstva limesa funkcija

3.4. Svojstva limesa funkcije. Kao što je i za očekivati limesi funkcija u tački i limesi nizova imaju mnoge slične osobine. Dokazi tih osobina su takođe vrlo slični. Tako imamo sledeće teoreme.

Teorema 1. *Ako postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ tada je on jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva različita limesa funkcije f u tački x_0 , tj. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b, a < b$. Tada za $\varepsilon = (b - a)/4$, postoje $\delta_a > 0$ i $\delta_b > 0$ takvi da kada je

$$(a) \quad x \in \dot{I}_{x_0}^{\delta_a} \quad \text{onda je} \quad f(x) \in I_a^\varepsilon, \quad (b) \quad x \in \dot{I}_{x_0}^{\delta_b} \quad \text{onda je} \quad f(x) \in I_b^\varepsilon.$$

Sada za $\delta = \min\{\delta_a, \delta_b\}$ sledilo bi da je $f(x) \in I_a^\varepsilon$ i $f(x) \in I_b^\varepsilon$, dakle $f(x) \in I_a^\varepsilon \cap I_b^\varepsilon = \emptyset$, što je nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da je naša polazna pretpostavka (da funkcija f ima dva različita limesa u tački x_0) je pogrešna, i dokaz je gotov. $\square$

Teorema 2. *Neka funkcije f i g imaju limese kada $x \rightarrow x_0$. Tada važi*

$$\begin{aligned} (i1) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ (i2) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (cf)(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \\ (i3) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ (i4) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{ako je} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Dokaz ove teoreme analogan je dokazu analogne teoreme za nizove samo je potrebno malo izmeniti frazeologiju:

.... $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)$ je $|a_n - b| < \varepsilon$ kod nizova potrebno je zameniti sa,

.... $(\exists \delta)(\forall x \in D)|x - x_0| < \delta$ implicira da je $|f(x) - a| < \varepsilon$, kod funkcija.

Napomena. Ista svojstva, kao u prethodnoj teoremi, važe i za levi $(x \rightarrow x_{0-})$ i desni $(x \rightarrow x_{0+})$ limes.

Teorema 3 ('dva policajca'). Neka je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Ako postoji $\delta > 0$ takvo da je za neku funkciju h ispunjeno

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

tada je $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

Dokaz. Analogan onom kod nizova. □

Teorema 4. Neka je $f : D \rightarrow E$ i $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ dve funkcije. Ako su ispunjeni sledeći uslovi,

(i1) postoji $\lim_{y_0 \rightarrow y} g(y)$,

(i2) ako za svaku okolinu $\dot{I}'_{y_0} = \dot{I}_{y_0} \cap E$ tačke $y_0 \in E$ koja ne sadrži y_0 postoji isto takva okolina tačke $x_0 \in D$, $\dot{I}'_{x_0} = \dot{I}_{x_0} \cap D$ tako da je $f(\dot{I}'_{x_0}) \subseteq \dot{I}'_{y_0}$.

tada postoji i $\lim_{x_0 \rightarrow x} (g \circ f)(x)$ i važi formula:

$$\lim_{x_0 \rightarrow x} (g \circ f)(x) = \lim_{y_0 \rightarrow y} g(y), \quad \text{gde je } y = f(x).$$

3.5. Jedan važan limes. Pokažimo da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Primetimo, da su trouglovi (vidi Sliku 2) $\triangle OAB$ i $\triangle ODC$ slični, tako da sledi da je $d(C, D) = \tan x$. Takođe, sa Slike 1 je jasno da za $\pi/2 > x > 0$, važi,

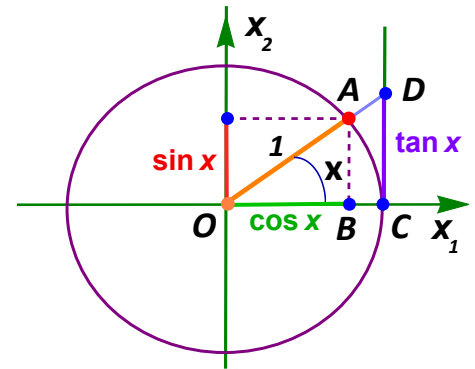
$$(3.1) \quad \sin x < x < \tan x,$$

ili nakon deljenja sa $\sin x > 0$,

$$(3.2) \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

ili nakon uzimanja recipročnih vrednosti

$$(3.3) \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$



Slika 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Kako su sve tri funkcije $\sin x$, x i $\tan x$, neparne na intervalu $(-\pi/2; \pi/2)$ i kako je funkcija $\cos x$ parna na pomenutom intervalu važiće nejednakosti (3.1), jer za $x < 0$

dobijamo suprotne nejednakosti od onih u (3.1), ali nakon množenja sa $\sin x < 0$ dobijamo nejednakosti (3.2). Kako je $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$, i ako sada primenimo Teoremu 3 iz prethodne tačke na nejednakosti (3.3) sledi tvrdnja.

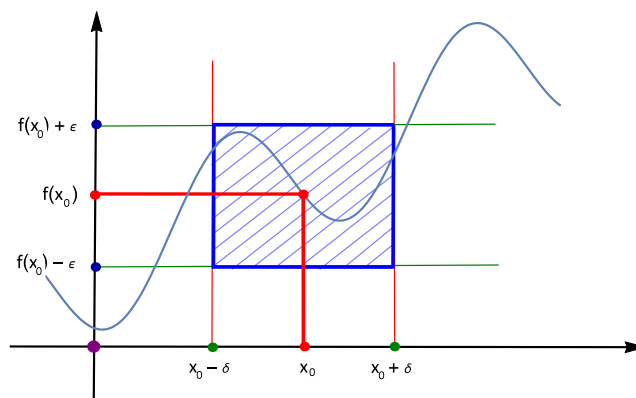
3. Neprekidnost

3.6. Neprekidne funkcije. Posmatramo funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gde je $D \subseteq \mathbb{R}$, koja je definisana u nekoj okolini I_{x_0} tačke x_0 . Opisno govoreći funkcija f neprekidna je u tački $x_0 \in D$ ako se njene vrednosti $f(x)$ približavaju vrednosti $f(x_0)$ kada se x približava tački x_0 . Preciznije imamo sledeću definiciju.

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna je u tački $x_0 \in D$, ako $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in D)$ takav da iz $D \supseteq |x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Geometrijska interpretacija neprekidnosti funkcije f u tački x_0 sastoji se u tome da za svako $\varepsilon > 0$ postoji pravougaonik $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ koji sadrži grafik funkcije f restringovan na interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tj. sadrži skup $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ (vidi Sliku 3).

Pojam neprekidnosti funkcije f u tački x_0 ekvivalentan je sa postojanjem limesa funkcije f u tački x_0 , koji je jednak vrednosti funkcije u toj tački, $f(x_0)$.



Slika 3. Neprekidnost funkcije u tački

Drugim rečima funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako komutira sa znakom limesa, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $E \subseteq D$ ako je neprekidna u svakoj tački skupa E . Funkcija f je neprekidna ako je neprekidna u svakoj tački svoga domena D . Skup svih neprekidnih funkcija na skupu $E \subseteq \mathbb{R}$ obeležava se sa $C(E, \mathbb{R})$ ili kraće $C(E)$.

Primer 1. Konstantna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ je neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$. Jasno, sa proizvoljni $\varepsilon > 0$ može se uzeti bilo koji broj $\delta > 0$.

Primer 2. Funkcija $f(x) = x$ neprekidna je na $\mathbb{R}$.

Zaista, za proizvoljnu tačku $x_0 \in \mathbb{R}$ važi da je $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$ ako je $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Primer 3. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Zaista, za proizvoljnu tačku $x_0 \in \mathbb{R}$ važi da je

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|,$$

odakle je $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.
Ovde smo koristili da je $|\sin x| \leq |x|$.

3.7. Tačke prekida. Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini $I_{x_0}^\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tačke x_0 , osim eventualno u samoj tački x_0 . Funkcija f ima **otklonjivi prekid** u tački x_0 ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x) = a \in \mathbb{R},$$

pri čemu f ili nije definisana u tački x_0 ili je $f(x_0) \neq a$. Prekid se otklanja tako što definišemo $f(x_0) = a$.

Funkcija f ima **prekid prve vrste** u tački x_0 ako postoje levi i desni limesi u tački x_0 koji su konačni i različiti.

Funkcija f ima **prekid druge vrste** u tački x_0 ako je barem jedan od levog i desnog limesa u tački x_0 beskonačan ili ne postoji.

Primer 1. Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ima otklonjivi prekid u tački $x = 0$. Prekid se otklanja tako što definišemo $f(0) = 1$, jer je $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, i tako dobijamo neprekidnu funkciju na čitavom $\mathbb{R}$.

Funkcija $\operatorname{sgn}(x)$ ima u tački $x = 0$ prekid prve vrste. Zaista, u toj tački postoje levi i desni limes koji su konačni, ali različiti.

Funkcija $1/x$ ima prekid druge vrste u tački $x = 0$, jer su levi i desni limes beskonačni.

Primer 2. Funkcija $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

ima prekid druge vrste u tački $x = 0$, jer kada $x \rightarrow 0_+$ limes zdesna ne postoji, jer u svakom, ma kako malom, intervalu oko nule $f(x)$ poprmi sve vrednosti između -1 i 1 .

Primer 3. Funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

ima u svakoj tački prekid druge vrste, jer u svakoj ma kako maloj okolini bilo kojeg realnog broja r ima beskonačno mnogo racionalnih i iracionalnih brojeva, pa npr. za $\varepsilon = 1/2$ neće postojati $\delta > 0$ tako da za svako $x \in I_r^\delta$ važi da je $|f(x) - f(r)| < 1/2$. Drugim rečima za svako $\delta > 0$ postojaće u okolini I_r^δ broj r_δ takav da je $|f(r_\delta) - f(r)| = 1 > 1/2$.¹

3.8. Lokalna svojstva neprekidnih funkcija. Lokalna svojstva funkcija odnose se na ponašanja funkcija u nekoj maloj okolini tačaka iz domena funkcije, npr. sama

¹ Ako je $r \in \mathbb{Q}$ tada izaberemo da je r_δ iracionalan i obratno.

neprekidnost funkcije u tački je lokalno svojstvo. Najvažnija svojstva neprekidnih funkcija sadržaj su sledeće teoreme.

Teorema. *Neka je $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna u tački $x_0 \in D$. Tada važe sledeća svojstva:*

- (i1) *Funkcija f je ograničena u nekoj okolini tačke x_0 .*
- (i2) *Ako je $f(x_0) \neq 0$, tada postoji okolina I_{x_0} tačke x_0 u kojoj funkcija ne menja znak.*
- (i3) *Ako je i $g : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna na nekoj okolini tačke x_0 u kojoj je i f neprekidna. Tada su i funkcije*
 - (a1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
 - (a2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
 - (a3) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, (ako je $g(x) \neq 0$),*definisane na okolini I_{x_0} tačke x_0 i neprekidne u x_0 .*
- (i4) *Ako je funkcija $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u tački $y_0 \in E$ pri čemu je $f : D \longrightarrow E$, $f(x_0) = y_0$ i f je neprekidna u tački x_0 , tada je i kompozicija $(g \circ f)$ definisana na D i neprekidna je u tački x_0 .*

Dokaz. (i1) sledi direktno iz definicije.

(i2) Neka je npr. $f(x_0) > 0$, tada za $\varepsilon = f(x_0)/2$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x \in I_{x_0}^\delta$ važi: $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$, tako da imamo

$$0 < f(x_0)/2 = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon = \frac{3}{2} f(x_0).$$

Dakle, na okolini $I_{x_0}^\delta$ funkcija f je pozitivna, tj. ima isti znak kao i u tački $f(x_0)$. Slično, se tretira i slučaj kada je $f(x_0) < 0$.

(i3) sledi iz svojstava limesa **Teoreme 2** iz tačke **3.4** i činjenice da ako je funkcija neprekidna u tački x_0 da onda primena limesa i dejstva funkcije komutiraju.

(i4) slično kao u dokazu (i3), tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (g(f(x))) = \lim_{y \rightarrow y_0} (g(y)) = g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0) = (g \circ f)\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right). \quad \square$$

Važna primedba. Svojstva (i3) i (i4) iz prethodne teoreme znatno pojednostavljaju praktično nalaženje limesa funkcija. Jedna od osnovnih ideja u rešavanju raznih problema (a pogotovo matematičkih) jeste svodenje polaznog problema na već rešeni. U ovom kursu ta ideja se provodi na sledeći način²: prvo se po definiciji nađu osnovni i važni limesi (vidi tačku **3.14**), a zatim se iskoriste svojstva limesa (izvoda, integrala) iz ove teoreme i njoj analognih za izračunavanje komplikovanijih limesa (izvoda, integrala).

Primer 1. Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, pri čemu su koeficijenti $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, je neprekidna u svakoj tački skupa $\mathbb{R}$, jer je funkcija $g(x) = x$ neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$, pa prvo primena (a2) iz (i3) prethodne teoreme daje da

²I u traženju limesa nizova, limesa funkcija, izvoda funkcija i integrala.

je $a_m x^m$ neprekidna, a zatim primena svojstva (a1) iz iste teoreme daje da je $f(x)$ neprekidna.

Primer 2. Racionalna funkcija $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi, je neprekidna na čitavom domenu tj. gde je $Q(x) \neq 0$. Ovo sledi iz prethodnog primera i svojstva (i2) (a3) iz prethodne teoreme.

4. Globalna svojstva neprekidnih funkcija

3.9. Globalna svojstva neprekidnih funkcija. Globalno svojstvo funkcija je ono koje se odnosi na čitav domen funkcije.

Teorema (Bolcano-Koši). *Neka je f neprekidna na segmentu $[a, b]$ takva da je $f(a) \cdot f(b) < 0$ ³, tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. Podelimo segment $[a, b]$ na dva segmenta jednakih dužina $I_1 = [a, (a+b)/2]$ i $I_2 = [(a+b)/2, b]$. Ako je $f((a+b)/2) = 0$, onda smo gotovi, ako je $f((a+b)/2) \neq 0$ tada tačno jedan od segmenata I_1 i I_2 ima istu osobinu kao i polazni segment $[a, b]$, tj. proizvod vrednosti funkcije u njegovim krajevima je manji od 0. Sada sa tim segmentom ponovimo proceduru i nastavimo na isti način dalje. Tada ili u jednom od koraka nađemo tačku c , koja je središte jednog od segmenata, takvu da je $f(c) = 0$ ili dobijemo niz umetnutih segmenata $\{I_n\}$ pri čemu njihova dužina teži 0, jer u svakom koraku podelimo prethodni segment na dva dela i tako mu prepolovimo dužinu, i svaki od njih ima osobinu da vrednosti funkcije f u njegovim krajevima ima suprotan znak. U drugom slučaju postoji jedinstvena tačka $c \in (a, b)$, vidi Teorema iz **2.12** koja se nalazi u svakom od segmenata. Iz definicije umetnutih intervala $\{I_n\}$ dobijamo dva niza levih $\{a_n\}$, odnosno desnih $\{b_n\}$ krajeva segmenata, takvih da je npr. $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ i $\lim a_n = \lim b_n = c$. Prema osobini limesa sledi da je

$$\lim f(a_n) = f(c) \leq 0 \quad \text{i} \quad \lim f(b_n) = f(c) \geq 0,$$

odakle sledi da je $f(c) = 0$. Dakle, u oba slučaja sledi da postoji $c \in (a, b)$ takva da je $f(c) = 0$. □

Primedba. Dokaz prethodne teoreme sadrži i algoritam, poznatiji kao *metoda polovljenja segmenta*, za traženje nula neprekidne funkcije $f(x)$.

Posledica. *Neka je $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na I i neka je npr. $f(a) = A < f(b) = B$, tada za svako $C \in (A, B)$ postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $f(c) = C$.*

Dokaz. Funkcija $F(x) = f(x) - C$, je neprekidna na intervalu I jer je razlika dve neprekidne funkcije na I . Kako je $F(a) \cdot F(b) = (A - C)(B - C) < 0$, prema prethodnoj teoremi zaključujemo da postoji $c \in I$ takav da je $0 = F(c) = f(c) - C$, odakle sledi tvrdnja. □

Primer. Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, polinom neparnog stepena sa realnim koeficijentima, tj. neka je $n = 2m - 1$, $m \in \mathbb{N}$ i $a_n \neq 0$. Tada se za dovoljno veliko $M \in \mathbb{R}$, polinom $f(x)$ ponaša kao njegov vodeći član, koji je po apsolutnoj vrednosti veći od sume svih preostalih članova zajedno. Dakle, ako je $a_n > 0$ ($a_n < 0$) tada za sve $x > M$ je $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) i za sve $x < -M$ je $f(x) < 0$ ($f(x) > 0$) i primena prethodne teoreme, na funkciju f i segment $[-M, M]$, implicira egzistenciju

³ Drugim rečima brojevi $f(a)$ i $f(b)$ su suprotnih znakova.

nekog realnog broja c takvog da je $f(c) = 0$. Time smo pokazali sledeće tvrđenje: *polinom neparnog stepena sa realnim koeficijentima ima barem jednu realnu nulu.*

Polinom parnog stepena sa realnim koeficijentima, npr. $f(x) = x^2 + 1$, ne mora imati realnu nulu.

3.10. Teorema (Vajerštrasa o ekstremnim vrednostima). *Neka je funkcija $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna. Tada je f ograničena na I , i postoje tačke iz I u kojima funkcija prima najmanju i najveću vrednost.*

Dokaz. Zbog lokalnih svojstava neprekidne funkcije Teorema (i1) iz **3.8.**, sledi da za svaku tačku $x \in I$ postoji okolina I_x takva da je na skupu $I'_x = I \cap I_x$ funkcija f ograničena. Unija svih takvih okolina I_x , $x \in I$ obrazuje otvoreno pokrivanje⁴ segmenta I , pa prema lemi o konačnom pokrivanju možemo naći konačno potpokrivanje segmenta I okolinama $I_{x_1}, I_{x_2}, \dots, I_{x_k}$. Kako je funkcija ograničena na svakoj od okolina I'_j , imamo da je $m_j \leq f(x) \leq M_j$, $m_j, M_j \in \mathbb{R}$ za sve $j = 1, 2, \dots, k$. Time smo pokazali da za svaki $x \in I$ važi da je

$$\min\{m_1, m_2, \dots, m_k\} \leq f(x) \leq \max\{M_1, M_2, \dots, M_k\},$$

dakle, funkcija f je ograničena na I .

Za drugi deo dokaza obeležimo sa $M = \sup\{f(x), x \in I\}$ ($m = \inf\{f(x), x \in I\}$). Pretpostavimo da je za svako $x \in I$, $f(x) < M$, jer u suprotnom nemamo šta dokazivati. Tada je funkcija $M - f(x)$ neprekidna i pozitivna na segmentu I i poprima vrednosti po volji bliske 0⁵. I na kraju primetimo da je funkcija $1/(M - f(x))$, zbog lokalnih svojstava neprekidnih funkcija, neprekidna na segmentu I . S druge strane je neograničena na I što je u kontradikciji sa upravo dokazanom ograničenosti neprekidne funkcije na segmentu.

Dakle, postoji tačka $x_M \in I$ takva da je $f(x_M) = M$. Analogno se pokazuje da postoji tačka $x_m \in I$ takva da je $f(x_m) = m$. □

Posledica. *Neka je funkcija $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna. Tada je $f([a, b]) = [m, M]$.*

3.11. Neprekidnost i monotonost. Neka je $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako je funkcija strogo rastuća ili strogo opadajuća na I onda je ona očigledno injektivna. Ali važi i obrat, jer ako pretpostavimo da nije strogo monotona, npr. da nije strogo rastuća, tada postoje tri tačke $x_1 < x_2 < x_3$ segmenta $[a, b]$ takve da $f(x_2)$ nije između $f(x_1)$ i $f(x_3)$. U ovom slučaju ili je $f(x_3)$ između $f(x_1)$ i $f(x_2)$, ili je $f(x_1)$ između $f(x_2)$ i $f(x_3)$. Razmotrimo drugu mogućnost, tada je funkcija f neprekidna na segmentu $[x_2, x_3]$, i zbog **3.9 Posledica**, postoji tačka $y \in [x_2, x_3]$ takva da je $f(y) = f(x_1)$. Dakle, pronašli smo tačku $y > x_1$ takvu da je $f(y) = f(x_1)$, što je u kontradikciji sa injektivnosti funkcija f . Analogno se pokazuje da i prva mogućnost, $f(x_3)$ između $f(x_1)$ i $f(x_2)$, vodi u kontradikciju kontradikciji sa injektivnosti funkcija f . Slično se pokazuje i slučaj kada funkcija f nije strogo opadajuća.

Time smo pokazali propoziciju.

⁴ Kažemo da je sistem $F = \{X\}$ skupova pokrivanje skupa Y ako je $Y \subseteq \bigcup_{X \in F} X$. Važi sledeća lema o konačnom pokrivanju (Borel-Lebeg): *U svakom sistemu intervala koji pokrivaju segment $[a, b]$ postoji konačan podsistem koji takođe pokriva segment $[a, b]$.*

⁵ Sledi iz definicije supremuma skupa A .

Propozicija 1. *Neprekidna funkcija $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je injektivna akko je f strogo monotona na segmentu I .*

Takođe dve sledeće propozicije sadrže važna svojstva neprekidnih funkcija.

Propozicija 2 (kriterijum neprekidnosti monotone funkcije). *Monotona funkcija na $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna akko je $f(I) = [f(a), f(b)]$ u slučaju da je f rastuća ili $f(I) = [f(b), f(a)]$ u slučaju kada je f opadajuća funkcija.*

Propozicija 3. *Neka je funkcija $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ strogo monotona i neprekidna, tada je $f(I) = J$, segment ($f(I) = [f(a), f(b)]$ ili $f(I) = [f(b), f(a)]$) i inverzna funkcija $f^{-1} : J \longrightarrow I$ je dobro definisana i neprekidna.*

Diferencijalni račun

1. Izvod funkcije

4.1. Definicija. Neka je data funkcija $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a, b)$, tada ako postoji broj

$$(4.1) \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazivamo ga **izvodom funkcije** f u tački x_0 . Takođe tada kažemo da je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 . Primetimo da se (4.1) može zapisati na ekvivalentne načine

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x), \quad \text{gde je} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \quad \text{ili}$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad \text{gde je} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Ako uvedemo oznaku $h = x - x_0$ tada linearnu funkciju $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)h$ u h nazivamo **diferencijalom funkcije** f u tački x_0 . Sada možemo reformulisati definiciju izvoda na sledeći način: funkcija $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački $x_0 \in (a, b)$ ako

$$(4.2) \quad f(x + h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x, h),$$

gde je $x \rightarrow A(x)h$ linearna funkcija u h , i $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, h)}{h} = 0$. Sledeće veličine igraju važnu ulogu,

$$\text{priraštaj argumenta: } \Delta x(h) = (x + h) - x = h,$$

$$\text{priraštaj funkcije: } \Delta f(x; h) = f(x + h) - f(x).$$

Za diferencijal se koristi i oznaka $df(x)(h) = A(x)h = f'(x)h$, i on predstavlja linearnu aproksimaciju funkcije f u okolini tačke x . Iz definicije izvoda¹ očigledno sledi da je izvod funkcije $f(x) = x$ jednak $f'(x) = 1$, odakle nalazimo i da je

$$dx(h) = 1 \cdot h = h,$$

tako da ponekad kažemo da se diferencijal nezavisne promenljive podudara sa njenim priraštajem. Takođe, imamo

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h), \quad \text{ili} \quad df(x) = f'(x)dx,$$

¹ vidi naredni Primer

zbog čega za izvod koristimo oznaku (Lajbnic) $\frac{df(x)}{dx}$. Napomenimo da je oznaku $f'(x)$ uveo Lagranž.

Ako je za funkciju f definisana f' za sve tačke nekog skupa $E \subseteq D$ tada kažemo da je f diferencijabilna na E i f' je realna funkciju na E . Ako je $E = D$ tada kažemo da je funkcija f diferencijabilna funkcija.

Primedba. Iz definicije limesa sledi da za izolovane tačke skupa D^2 , izvod nije definisan iako sama funkcija može biti definisana. Sledeća teorema pokazuje da je diferencijabilnost specijalnije svojstvo od neprekidnosti.

Teorema. *Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 onda je ona i neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Iz definicije izvoda funkcije f u tački x_0 imamo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

Drugim rečima važi da je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, tj. funkcija f je neprekidna u tački x_0 , vidi 4.6. $\square$

Primedba. Iz prethodne teoreme vidimo da je biti diferencijabilna funkcija 'bolje' svojstvo od biti samo neprekidna funkcija. Zbog toga za funkcije koje su neprekidne na skupu D kažemo da su klase $\mathcal{C}^0(D)$, a funkcije čiji je izvod neprekidan na skupu D nazivamo funkcijama klase $\mathcal{C}^1(D)$.

4.2. Primer. (a) Izvod konstantne funkcije $f(x) = c$ nalazimo iz definicije,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

(b) Slično, za funkciju $f(x) = x$ nalazimo,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

(c) Za funkciju $f(x) = x^2$ imamo

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

(d) Pokažite³ da je $(x^n)' = n x^{n-1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

(e) Da bismo našli izvod funkcije $f(x) = \sin x$ potrebna nam je sledeća formula

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y,$$

² Kažemo da je tačka $x_0 \in D$ izolovana ako postoji neka okolina I_{x_0} tačke x_0 u kojoj nema drugih tačaka skupa D , tj. $I \cap D = \{x_0\}$.

³ Indukcijom ili primenom binomne formule.

koja je posledica adicijonih formula za funkcije $\sin x$.⁴ Sada nalazimo,

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin[(x + \frac{h}{2}) + \frac{h}{2}] - \sin[(x + \frac{h}{2}) - \frac{h}{2}]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = 1 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos(\lim_{h \rightarrow 0}(x + \frac{h}{2})) = \cos x. \end{aligned}$$

(f) Analogno se dokazuje da je $(\cos x)' = -\sin x$.

4.3. Geometrijska i mehanička interpretacija izvoda. Izvodi funkcija su neophodni u rešavanju mnogih problema u mnogim naukama kao što su: fizika, mehanika, hemija, biologija, ekonomija, i sl. *Njutn (Isaac Newton)*⁵ je u XVII. veku počeo razvijati diferencijalni račun baveći se problemom određivanja brzine.

Problem brzine. Neka je formulom, $s = f(t)$, dat zakon kojim se tačka M kreće, pri čemu s označava pređeni put u nekom vremenskom trenutku t . Preciznije pretpostavljamo da je kretanje počelo u trenutku $t = 0$ i da je $f(0) = 0$. Tada tačka M do trenutka $t = t_0$ pređe put $s_0 = f(t_0)$. Prosečna brzina kojom se tačka M kretala od trenutka t_0 do trenutka $t > 0$ jednaka je

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Jasno, ako je f diferencijabilna funkcija, tada kada $t \rightarrow t_0$ gornji izraz teži ka trenutnoj brzini tačke M u trenutku t_0 ,

$$v_0 = v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s - s_0}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Dakle, brzina predstavlja izvod puta po vremenu. Slično se može pokazati i da je ubrzanje (akceleracija) izvod brzine po vremenu.

Problem tangente. Otprilike u isto vreme u XVII. veku, *Lajbnic*⁶ je nezavisno od Njutna razvio osnove diferencijalnog računa rešavajući problem određivanja tangente na datu krivu u nekoj tački iste.

Neka je data kriva svojom jednačinom $y = f(x)$, gde je f diferencijabilna funkcija. **Sečica (sekanta)** krive $y = f(x)$ koja prolazi kroz tačke $M_0(x_0, f(x_0))$ i $M(x, f(x))$, za $x_0 \neq x$, je prava čiji je koeficijent pravca (vidi Sliku 1.),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

⁴ $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$

⁵ Isaac Newton 1642–1727, engleski fizičar, teorijski mehaničar, astronom i matematičar, jedan od najvećih naučnika u istoriji formulisao je između ostalog (sa Lajbnicom) osnove diferencijalnog računa.

⁶ Gottfried Wilhelm Leibnitz 1646–1716, nemački filozof i matematičar, zajedno sa Njutnom formulisao osnove diferencijalnog računa.

Kada $x \rightarrow x_0$, sečica teži **tangenti** krive $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, f(x_0))$, čiji je koeficijent pravca jednak $\operatorname{tg} \alpha_0$. Dakle,

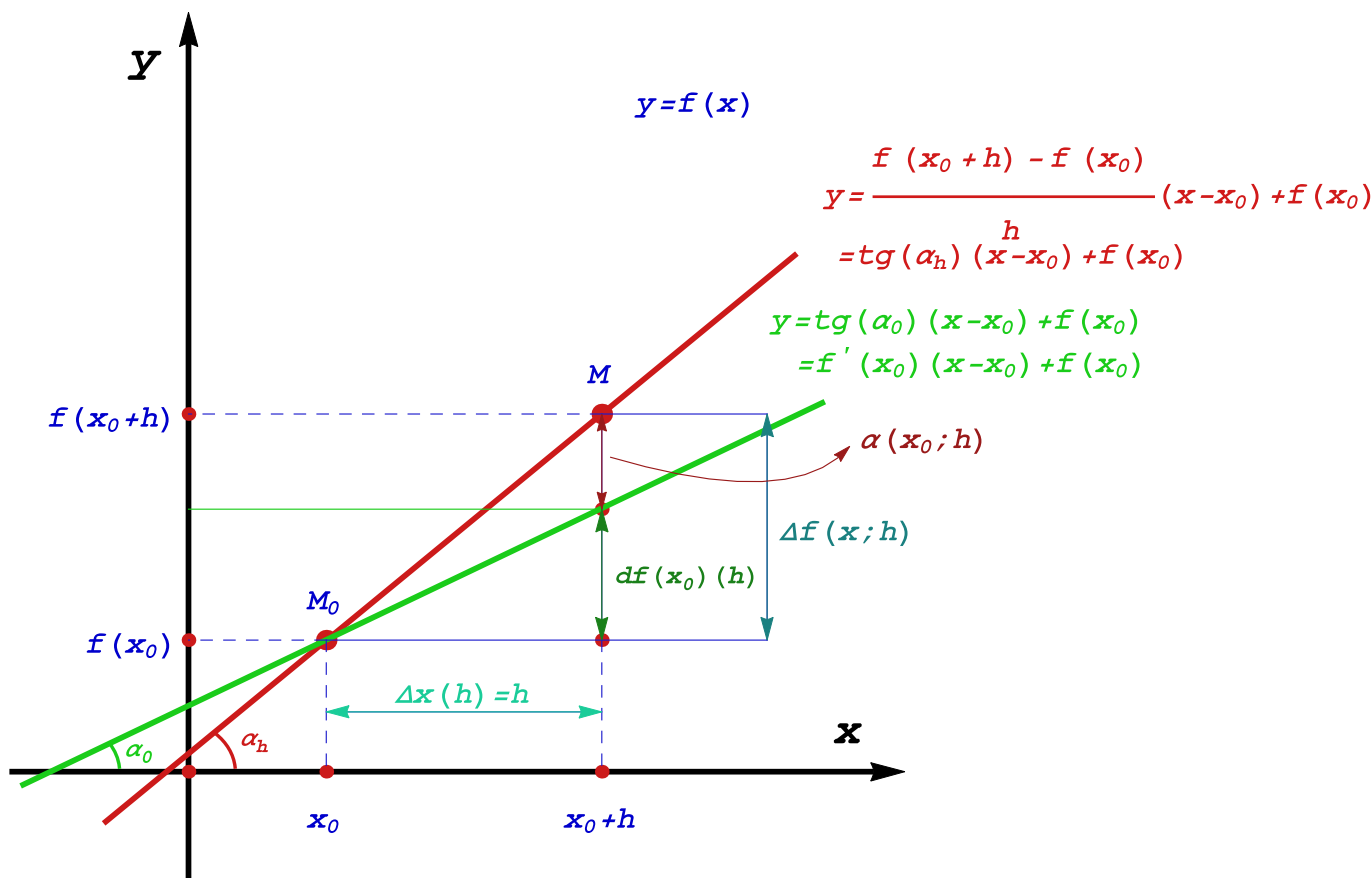
$$x \rightarrow x_0 \quad \implies \quad \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0).$$

Stoga je jednačina tangente na krivu $y = f(x)$ u tački x_0 ,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Normala na krivu $y = f(x)$ u tački x_0 je prava koja prolazi kroz tačku $M_0(x_0, f(x_0))$ i normalna je na tangentu u toj tački. Kako za koeficijente pravaca k_1 i k_2 , normalnih pravih p_1 i p_2 važi veza $k_1 \cdot k_2 = -1$ lako nalazimo jednačinu normale (uz $f'(x_0) \neq 0$),

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Slika 1. Geometrijski smisao izvoda

4.4. Levi i desni izvod. Kako se izvod definiše preko limesa i kako smo videli ranije šta je levi odnosno desni limes funkcije u nekoj tački x znamo i šta su levi i desni izvod

date funkcije u tački x . Preciznije imamo,

$$(4.3) \quad \text{levi izvod funkcije } f \text{ u tački } x \text{ je broj: } f'(x_-) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$(4.4) \quad \text{desni izvod funkcije } f \text{ u tački } x \text{ je broj: } f'(x_+) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

ukoliko limesi na desnim stranama jednakosti (4.3) i (4.4) postoje.

Jasno, zaključujemo da izvod $f'(x)$ u tački x postoji ako i samo ako postoje levi i desni izvod i ako su oni jednaki.

Primer. Pronađimo izvod apsolutne vrednosti, tj. funkcije definisane na uobičajen način:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Funkcija $|x|$ je neprekidna, a za njen izvod važi:

$$|x|' = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad \text{Prema tome, sledi da je } |x|' = \text{sgn}(x).$$

Primetimo da $|x|'$ ima u tački $x = 0$ prekid prve vrste, i da funkcija $|x|$ ima u tački $x = 0$ levi i desni izvod koji se ne podudaraju.

2. Svojstva diferenciranja

4.5. Algebarska svojstva diferenciranja. U ovoj tački bavimo se osnovnim algebarskim svojstvima diferenciranja koja znatno olakšavaju računanje izvoda nekih funkcija. Kako se izvodi definišu preko limesa za očekivati je da je izvod funkcije saglasan sa osnovnim algebarskim operacijama (vidi tačka 4.4 Teorema 2).

Teorema. Neka su funkcije $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne na skupu $E \subseteq D$, tada za svaki $x \in E$ važi

$$(i1) \quad (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$$

$$(i2) \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$(i3) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{ako je } g(x) \neq 0.$$

Svojstvo (i2) zove se *Lajbnicovo pravilo* za izvod proizvoda funkcija.

Dokaz. Dokažimo (i3), ostala tvrđenja dokazuju se analogno⁷. Sada redom imamo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Posledica. Iz veze diferencijala i izvoda, prethodna teorema može se zapisati i u terminima diferencijala. Tako uz pretpostavke prethodne teoreme imamo,

$$(i1) \quad d(f \pm g)(x) = df(x) \pm dg(x),$$

$$(i2) \quad d(f \cdot g)(x) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x),$$

$$(i3) \quad d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad \text{ako je } g(x) \neq 0.$$

Primer. Koristeći tačku 4.2 i svojstva diferenciranja iz prethodne teoreme možemo izračunati sledeće izvode.

$$(a) \quad (x^4)' = (x^2 \cdot x^2)' = (x^2)' \cdot x^2 + x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x = 4x^3.$$

$$(b) \quad (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(c) \quad (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4.6. Izvod kompozicije funkcija. Sledeća teorema pokazuje da se diferenciranje dobro ponaša i prema kompoziciji funkcija jer važi:

Teorema. Neka je funkcija f diferencijabilna u tački $x \in D(f)$, a funkcija g u tački $y = f(x) \in D(g)$, tada je kompozicija $g \circ f$ diferencijabilna u tački x i važi formula:

$$(4.5) \quad [g(f(x))]' = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Formula (4.5) je od velike važnosti jer ima veliku primenu u praksi budući je kompozicija funkcija jedan od osnovnih načina konstruisanja novih funkcija iz već poznatih.

Primer. Primenimo prethodnu teoremu, kao i ostala svojstva diferenciranja da bismo našli izvode funkcija.

$$(a) \quad [(x^3 + 4x^2 - 3x)^3]' = 3(x^3 + 4x^2 - 3x)^2(x^3 + 4x^2 - 3x)' = 3(x^3 + 4x^2 - 3x)^2(3x^2 + 8x - 3).$$

⁷ Ali dokazi tvrđenja (i1) i (i2) su jednostavniji.

(b) $(\cos(\sin x))' = -\sin(\sin x)(\sin x)' = -\sin(\sin x) \cos x$.

4.7. Izvod inverzne funkcije. Veoma često se u matematici postavlja fundamentalno pitanje rešavanja neke jednačine,

$$f(x) = y, \quad \text{pri čemu je, } f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}, \text{ neka funkcija.}$$

Ovo pitanje svodi se na pitanje pronalaženja inverzne funkcije od f , jer ako postoji i znamo f^{-1} , tada je rešenje gornje jednačine dato sa $x = f^{-1}(y)$. Kao što je poznato to se ne može uraditi uvek,⁸ ili bolje reći veoma se retko može uraditi globalno. Ali, ako funkcija ima određene analitičke osobine, to se može uraditi lokalno. Sledeća teorema i njene generalizacije (višedimenzione) daju odgovor pod kojim je uslovima to moguće uraditi.

Teorema. Neka je $f : D \longrightarrow E$ neprekidna funkcija, pri čemu su skupovi $D, E \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni. Ako je funkcija f diferencijabilna u x_0 i $f'(x_0) \neq 0$ tada postoje okoline⁹ $E_1 \subseteq E$ tačke $y_0 = f(x_0)$ i $D_1 \subseteq D$ tačke x_0 i funkcija $f^{-1} : E_1 \longrightarrow D_1$ koja je diferencijabilna u tački y_0 i važi formula

$$(4.6) \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Primedba. Štaviše iz ove teoreme i nekih drugih sledi da ako je f klase $\mathcal{C}^1$ na nekoj okolini I_{x_0} ¹⁰ i ako je $f'(x_0) \neq 0$, tada postoji okolina I_{y_0} tačke $y_0 = f(x_0)$ takva da je $\mathcal{C}^1$ na I_{y_0} i $(f^{-1})'(y_0) \neq 0$.

Primer. (a) Funkcija $y = x^2$, koja ima inverznu funkciju za $x \geq 0$, prema prethodnoj teoremi imamo:

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Primetimo da na levoj i desnoj strani imamo funkciju od y pa možemo zameniti y s x i tako dobijamo standardni zapis,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0. \quad \text{Primetimo da tačka } x = 0 \text{ nije u domenu ove funkcije.}$$

(b) Funkcija $y = \sin x$ ima inverznu funkciju za $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ i važi:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

⁸ Npr. funkcija $y(x) = x^2$ nema globalnu inverznu funkciju.

⁹ otvoren intervali

¹⁰ diferencijabilna i izvod je neprekidan

odnosno, nakon zamene y sa x ,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

funkcija $\arcsin x$ je definisana na segmentu $[-1, 1]$, a njen izvod nije definisan u rubovima tog intervala.

(c) Funkcija $y = \operatorname{tg} x$ ima inverznu funkciju za $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ i važi

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2},$$

ili nakon zamene y sa x ,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.8. Izvod implicitno zadate funkcije. Neka je implicitno zadata funkcija svojom jednačinom $F(x, y) = 0$, njen izvod tražimo tako da jednu promenljivu (obično to je y) shvatimo kao funkciju one druge promenljive (a to je obično x , tj. $y = y(x)$) i primenimo pravila koja su data u teoremama iz tačaka **4.5.** i **4.6.**

Primer. Odrediti tangentu elipse zadate svojom kanonskom jednačinom,

$$(4.7) \quad F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

u tački (x_0, y_0) gde je $-a < x_0 < a$. Pretpostavimo da je $y = y(x)$ i kako su leva i desna strana jednačine (4.7) jednake, jednaki su im i izvodi. Dakle,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0 \quad \text{odakle sledi} \quad y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y(x_0)} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

Sada iz jednačine tangente (vidi **4.3.**) redom nalazimo,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{ili nakon zamene} \quad y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

nakon množenja poslednje jednakosti sa $a^2 y_0$ dobijamo

$$a^2 y y_0 - a^2 y_0^2 = b^2 x_0^2 - b^2 x x_0 \quad \text{kako je} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2,$$

napokon dobijamo

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = a^2 b^2 \quad \text{ili nakon deljenja sa} \quad a^2 b^2 \quad \text{dobijamo} \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Specijalno, odredimo tangentu na elipsu

$$F(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0,$$

u tački $M(2, y_0 > 0)$. Sada prvo nalazimo $y_M = 5/3$, a zatim prema upravo izvedenoj formuli dobijamo jednačinu tangente,

$$1 = \frac{2x}{9} + \frac{5y}{5 \cdot 3} = \frac{2x}{9} + \frac{y}{3} \quad \text{ili} \quad 2x + 3y = 9.$$

Primer. Dokažite da jednačine tangenti na hiperbolu odnosno parabolu,

$$(h) \quad F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (p) \quad G(x, y) = -2lx + y^2 = 0, l > 0,$$

u tački sa koordinatama $M(x_0, y_0)$ su:

$$(h) \quad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0, \quad (p) \quad y_0 y = l(x + x_0).$$

4.9. Izvod parametarski zadate funkcije. Ispostavlja se da je najprirodniji¹¹ način zadavanja funkcija u sledećem vidu,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in D \subseteq \mathbb{R},$$

koji se naziva **parametarski oblik** zadavanja funkcija. Izvod parametarski zadate funkcije računamo na sledeći način,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\psi(t))}{d(\varphi(t))} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Često koristimo kraći zapis $y' = \dot{y}/\dot{x}$, $\dot{y} = \psi'(t)$, $\dot{x} = \varphi'(t)$, gde smo sa y' obeležili izvod po nezavisnoj promenljivoj x , a $\dot{x}$ i $\dot{y}$ obeležava izvod po parametru t .

Primer. Odredimo tangentu na krivu zadatu sa

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

u tački $x = 1, y > 0$. Gornja formula daje

$$y' = \frac{\cos t}{-2 \sin t}.$$

Iz $x = 1 = 2 \cos t$ nalazimo da je $\cos t = 1/2$ tako da je $t = \pi/3$ ili $t = -\pi/3$. Uslov $y > 0$ implicira $t = \pi/3$ i $y = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$. Dakle,

$$y'(1) = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{-2 \sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{\frac{1}{2}}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

tako da je jednačina tražene tangente, $y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

¹¹ U smislu generalizacije u višim dimenzijama.

3. Izvodi elementarnih funkcija

4.10. Izvodi elementarnih funkcija. Jedan važan element u procesu pronalaženja izvoda jeste tabela elementarnih funkcija. Izvode svih elementarnih moguće je naći po definiciji ili korišćenjem već ranije pomenutih svojstava izvoda.

Tabela izvoda elementarnih funkcija

Stepene funkcije	Konstantna funkcija
$(x^r)' = r x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}, x > 0$	$(C)' = 0$
Trigonometrijske funkcije	Arkus funkcije
$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$(\operatorname{arccctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
Eksponencijalne funkcije	Logaritamske funkcije
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad 1 \neq a > 0, x \in \mathbb{R}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad 1 \neq a > 0, x > 0$
$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
Hiperboličke funkcije	Inverzne hiperboličke funkcije
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in (1, +\infty)$

$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(\operatorname{arc} \operatorname{th} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

4.11. Logaritamski izvod. Logaritamski izvod koristimo za diferenciranje funkcija oblika

$$(4.8) \quad y = h(x) = f(x)^{g(x)}.$$

U onim tačkama u kojima izvod postoji važi,

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Procedura kojom nalazimo izvod ovom metodom sastoji se od tri karakteristična koraka:

- (i1) logaritmiraju se obe strane jednakosti (4.8),
- (i2) diferenciramo obe strane jednakosti dobijene u koraku (i1) pri čemu y tretiramo kao složenu funkciju¹²,
- (i3) sredimo dobijene formule.

Primer. Nađimo izvod funkcije $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Primenom logaritma na obe strane jednakosti imamo

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+x),$$

a zatim diferenciranje obe strane ove jednakosti daje,

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 1,$$

Sređivanjem ove jednakosti dobijamo,

$$y' = y \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{x} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x} \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right).$$

Primer. Izračunajte izvod funkcija $y = x^{x^2}$ i $y = x^{x^x}$.

4.12. Primena diferencijala: približno računanje. Kao što znamo diferencijal je najbolja linearna aproksimacija vrednosti diferencijabilne funkcije f u nekoj okolini

¹² kompoziciju.

tačke njenog domena. Zbog toga je jedna od osnovnih primena diferencijala nalaženje približnih vrednosti funkcije f u nekim tačkama.

Ako je vrednost nezavisne promenljive x određena (npr. izmerena u nekom eksperimentu) sa pogreškom koja po apsolutnoj vrednosti ne prelazi neki broj h i ako uz tako izračunat x želimo odrediti vrednost funkcije $y = f(x)$, tada apsolutna pogreška vrednosti funkcije približno iznosi

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)h|, \quad \text{a relativna pogreška je } \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}.$$

Primer. Izračunajmo približno $\sqrt[4]{84}$ koristeći činjenicu da je $\sqrt[4]{81} = 3$.

Primetimo da je

$$\sqrt[4]{84} = \sqrt[4]{81 + 3} = 3\sqrt[4]{1 + \frac{1}{27}}.$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = 3\sqrt[4]{1+x}$, a zatim izaberimo $x_0 = 0$ i $h = 1/27$. Koristeći diferencijal nalazimo,

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{84} = f(x_0 + h) &\approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + \frac{3}{4}(1+x_0)^{-\frac{3}{4}}h \\ &= 3 + \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{27} = 3.02\dot{7}. \end{aligned}$$

Napomenimo da je tačna vrednost broja $\sqrt[4]{84}$ na četiri decimale 3.0274.

4. Izvodi višeg reda

4.13. Izvodi i diferencijali višeg reda. Neka je data diferencijabilna funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Njen izvod $f' : D' \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcija pa i nju možemo pokušati da diferenciramo. Ako je f' diferencijabilna tada funkciju $(f')' = f''$ nazivamo drugim izvodom funkcije f . Dakle,

$$f'' \equiv (f')' : D'' \subseteq D' \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Koristeći matematički indukciju nastavljamo dalje, i definišemo¹³ n -ti izvod funkcije f kao izvod njenog $(n-1)$ -og izvoda, tj. $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Sada je moguće posmatrati funkcije koje su n -puta diferencijabilne i čiji je n -ti izvod neprekidna funkcija na nekom skupu $D \subseteq \mathbb{R}$, koje obeležavamo sa $\mathcal{C}^n(D)$. Od posebnog su interesa funkcije klase $\mathcal{C}^\infty(D)$, one koje imaju izvode svih redova i ti izvodi su neprekidni.

Primer. (a) Nađimo izvode višeg reda funkcije $y = e^{kx}$.

Sada redom nalazimo,

$$y' = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}, \quad y'' = ke^{kx} \cdot k = k^2e^{kx}, \quad y''' = k^2e^{kx} \cdot k = k^3e^{kx},$$

¹³ Ako postoje svi potrebni izvodi funkcije f .

i indukcijom lako nalazimo da je n -ti izvod jednak $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

(b) Za polinom $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ lako nalazimo da je

$$y' = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1, \quad y'' = 6a_3x + 2a_2, \quad y''' = 6a_3, \quad y^{IV} = 0, \quad y^j = 0, \text{ za } j > 4.$$

Iz ovog primera vidimo da i u opštem slučaju polinoma $p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, n -tog stepena vredi

$$p_n^{(n)}(x) = a_n n!, \quad p_n^{(k)}(x) = 0, \quad k > n.$$

Diferencijal višeg reda definišemo analogno. Neka je $y = f(x)$ dva puta diferencijabilna funkcija. Diferencijal drugog reda funkcije f je diferencijal njenog diferencijala dy , odnosno $d^2f \equiv d^2y = d(dy)$. Analogno dalje, ako je $y = f(x)$ n -puta diferencijabilna funkcija, tada je diferencijal n -tog reda funkcije f jednak $d^n f \equiv d^n y = d(d^{n-1})y = f^{(n)}dx^n$. Prema definicionoj formuli za diferencijal važi,

$$d^2y = d(dy) = (dy)'dx = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Primetimo da važi da je $d(dx) = 0$. Prethodna formula i definicija diferencijala opravdavaju sledeće oznake¹⁴

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots \dots \dots \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Važna primedba. Uvedena oznaka za izvod veoma je korisna jer pomoću nje mogu se lako zapisati pravila za diferenciranje kompozicije funkcija, inverzne funkcije i parametarski zadate funkcije,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Primer: Drugi izvod parametarski zadate funkcije. Formulu za drugi izvod parametarski zadate funkcije dobijamo primenom prethodne formule i formule iz tačke 4.9., tj.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}dt} = \frac{(\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x})dt}{\dot{x}^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

¹⁴ Ove oznake je uveo Lajbnic.

5. Osnovne teoreme diferencijalnog računa

4.14. Osnovne teoreme diferencijalnog računa I. Ako je neka funkcija diferencijabilna tada ona ima određene dobre osobine koje su posledica njene diferencijabilnosti. Zbog toga je veoma važno znati koja osnovna svojstva funkcija su posledica diferencijabilnosti što je sadržaj ove i nekoliko narednih tačaka.

Lema (Ferma¹⁵). Neka je data funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i tačka $x_0 \in D$ takva da su ispunjeni sledeći uslovi:

- (i1) postoji okolina I_{x_0} tačke x_0 takva da je $I_{x_0} \subseteq D$,
- (i2) funkcija f je diferencijabilna u tački x_0 ,
- (i3) tačka x_0 je tačka u kojoj funkcija f ima ekstremnu vrednost (minimum ili maksimum) na I_{x_0} .

Tada je $f'(x_0) = 0$.

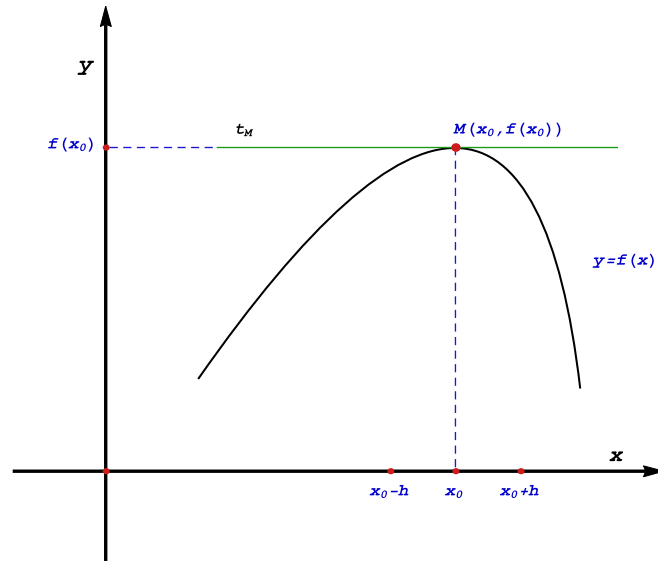
Dokaz. Budući da je po pretpostavci funkcija f diferencijabilna u tački x_0 važi,

$$(4.9) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(x_0, h)h = (f'(x_0) + \alpha(x_0, h))h,$$

pri čemu $\alpha(x_0, h) \rightarrow 0$ kada $h \rightarrow 0$ (za $x_0 + h \in I_{x_0}$). Kako je x_0 ekstremna tačka leva strana jednakosti (4.9) je nenegativna ili nepozitivna za sve $x \in I_{x_0}$. Kada bi $f'(x_0) \neq 0$ za dovoljno mali h veličina $f'(x_0) + \alpha(x_0, h)$ imala bi isti znak kao i $f'(x_0)$, jer $\alpha(x_0, h) \rightarrow 0$ kada $h \rightarrow 0$ ($x_0 + h \in I_{x_0}$). Primitimo da u jednakosti (4.9) h može poprimiti i pozitivne i negativne vrednosti, a kako se znak izraza $f'(x_0) + \alpha(x_0, h)$ ne menja za dovoljno malo h , zaključujemo da postoji $\delta > 0$ takav da će desna strana jednakosti (4.9) na okolinama $(x_0 - \delta, x_0)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$ imati suprotne znakove, tj. funkcija f će promeniti znak pri prolasku kroz tačku x_0 , što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je tačka x_0 tačka lokalnog ekstrema. $\square$

Primedba 1. Fermaova lema daje neophodan uslov da bi neka tačka bila ekstremna tačka diferencijabilne funkcije.

Primedba 2. Geometrijski smisao Fermaove leme je očigledan (vidi Sliku 2.): tangenta na grafik krive u tački ekstremuma je paralelna sa Ox osom, tj. horizontalna je.



Slika 2. Geometrijski smisao Fermaove leme

¹⁵ Pierre de Fermat, 1601 – 1665, čuveni francuski matematičar.

Teorema 1 (Rol¹⁶). Neka je data funkcija $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju su ispunjeni sledeći uslovi:

- (i1) neprekidna na segmentu $[a, b]$,
- (i2) diferencijabilna na intervalu (a, b) ,
- (i3) $f(a) = f(b)$.

Tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $f'(c) = 0$.

Dokaz. Budući da je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ postoje tačke $x_m, x_M \in [a, b]$ u kojima ona redom poprima svoju najmanju i najveću vrednost.

(i) Ako je $f(x_m) = f(x_M)$ onda je funkcija f konstanta na $[a, b]$ pa je $f'(x) \equiv 0$ na (a, b) i dokaz je u tom slučaju gotov.

(ii) Ako $f(x_m) < f(x_M)$ i kako je, $f(a) = f(b)$, tada barem jedna od tačaka x_m i x_M pripada intervalu (a, b) i ako nju obeležimo sa c prema Fermaovoj lemi za nju će važiti da je $f'(c) = 0$. $\square$

4.15. Osnovne teoreme diferencijalnog računa II. U ovoj tački bavimo sa teoremama o srednjoj vrednosti, a koje se ponekad zovu i teoremama o konačnim priraštajima. Prva od njih Lagranžova teorema povezuje priraštaj funkcije na segmentu sa izvodom funkcije na tom segmentu.

Teorema 1 (Lagranž¹⁷). Neka je data funkcija $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju su ispunjeni sledeći uslovi:

- (i1) neprekidna na segmentu $[a, b]$,
- (i2) diferencijabilna na intervalu (a, b) .

Tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$(4.10) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Dokaz. Da bismo dokazali ovu teoremu posmatramo funkciju

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

koja je očigledno neprekidna na segmentu $[a, b]$ jer je dobijene sabiranjem, deljenjem i množenjem neprekidnih funkcija na segmentu $[a, b]$, diferencijabilna na intervalu (a, b) jer je dobijene sabiranjem, deljenjem i množenjem diferencijabilnih funkcija na intervalu (a, b) i za koju važi da je $F(a) = F(b) = f(a)$. Drugim rečima funkcija F ispunjava sve uslove Rolove teorema, tako da za nju važe i zaključci Rolove teoreme, dakle postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{odakle odmah sledi} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

i teorema je dokazana. $\square$

¹⁶ Michel Rolle, 1652–1719, francuski matematičar.

¹⁷ Joseph Louis Lagrange, 1736–1813, čuveni francusko-italijanski matematičar, teorijski mehaničar, astronom,...

Primedba 1. Geometrijski smisao Lagranžove teoreme: postoji neka tačka $M(c, f(c))$ pri čemu je $c \in (a, b)$, takva da je tangenta na grafik funkcije $f(x)$ u tački M paralelna sa pravom određenom krajnjim tačkama $M_0(a, f(a))$ i $M_1(b, f(b))$, grafika funkcije f na segmentu $[a, b]$, vidi Sliku 3.

Primedba 2. Mehanički smisao Lagranžove teoreme. Ako promenljivu x shvatimo kao vreme, a $f(b) - f(a)$ kao put koji je neka materijalna čestica prešla za vreme $b - a$ krećući se po pravoj, tada Lagranžova teorema tvrdi da postoji trenutak vremena $c \in (a, b)$ u kojem materijalna čestica ima brzinu $f'(c)$ takvu da ako bi se kretala njom u svakom trenutku vremena iz $[a, b]$ ¹⁸ ona bi prešla put $f(b) - f(a)$. Dakle, brzina $f'(c)$ predstavlja srednju (prosečnu) brzinu kretanja materijalne čestice u vremenskom segmentu $[a, b]$.

Primedba 3. Formuli (4.10) iz Lagranžove teoreme moguće je dati drugu formu. Npr. ako uvedemo oznaku $\vartheta \equiv \frac{c-a}{b-a}$, vidimo da važi $c = a + \vartheta(b-a)$, $0 < \vartheta < 1$, tako da formula (4.10) prima sledeći oblik,

$$(4.11) \quad f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b-a))(b-a), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Ako uvedemo oznake $a = x$ i $b = x + h$ možemo (4.10) prepisati kao,

$$(4.12) \quad \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = f'(x + \vartheta h)h, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

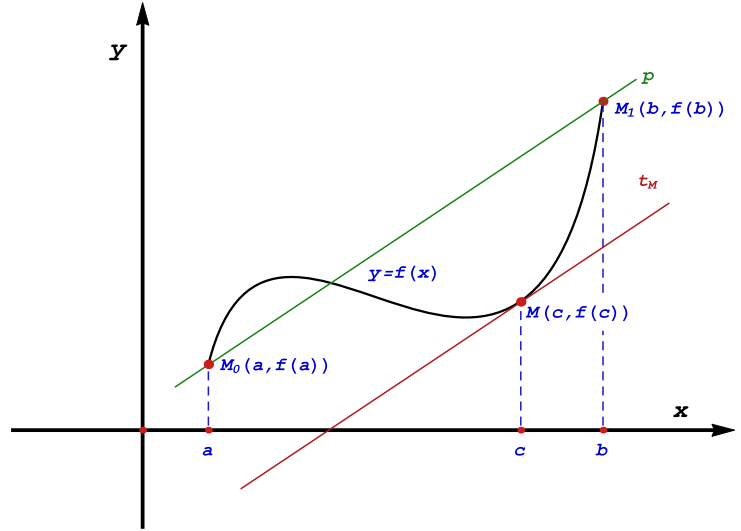
Posledica 1. Ako u svakoj tački nekog intervala (a, b) važi da je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) tada je funkcija rastuća (opadajuća) na intervalu (a, b) .

Dokaz. Neka su x_1, x_2 tačke intervala (a, b) i neka je npr. $x_1 < x_2$. Tada je $x_2 - x_1 > 0$ a po formuli (4.10) važi

$$(4.13) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b),$$

odakle sledi da za $f'(\xi) \geq 0$ ($f'(\xi) \leq 0$) imamo $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ ($f(x_2) - f(x_1) \leq 0$) ili drugim rečima f je rastuća (opadajuća) funkcija¹⁹. $\square$

Primedba. Primetimo da iz dokaza prethodne Posledice 1 sledi: ako u svakoj tački nekog intervala (a, b) važi da je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) tada je funkcija strogo rastuća (strogo opadajuća) na intervalu (a, b) .



Slika 3. Geometrijski smisao Lagranžove teoreme

¹⁸ Drugim rečima kretala bi se konstantnom brzinom.

¹⁹ Pokazali smo da $x_1 < x_2 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$, ako je $f'(\xi) \geq 0$ i $x_1 < x_2 \implies f(x_2) \leq f(x_1)$, ako je $f'(\xi) \leq 0$.

Posledica 2. Neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Funkcija f je konstanta ako je $f'(x) = 0$ za sve tačke segmenta $[a, b]$ (ili (a, b)).

Dokaz. Ako je f konstanta onda iz definicije izvoda sledi da je $f'(x) = 0$ za sve tačke segmenta $[a, b]$. Obratno, ako je $f'(x) \equiv 0$ na $[a, b]$ tada prema Lagranžovoj teoremi, za $x_1, x_2 \in [a, b]$, $(x_1 < x_2)$ imamo da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

jer je $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ pa je $f'(\xi) = 0$. Odakle sledi da je $f(x_2) = f(x_1)$ i dokaz je gotov. $\square$

Teorema 2 (Koši²⁰). Neka su data funkcije $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ za koje su ispunjeni sledeći uslovi:

- (i1) neprekidne na segmentu $[a, b]$,
- (i2) diferencijabilne na intervalu (a, b) .

Tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$(4.14) \quad g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Specijalno, ako je $f'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je i $f(a) \neq f(b)$ i važi,

$$(4.15) \quad \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}.$$

Dokaz. Budući da funkcija,

$$F(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)),$$

zadovoljava sve pretpostavke Rolove teoreme na segmentu $[a, b]$: neprekidna je na $[a, b]$, diferencijabilna je na (a, b) i $F(a) = F(b) = g(a)f(b) - g(b)f(a)$, sledi da postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $F'(c) = 0$. Dakle, imamo da je

$$0 = F'(c) = g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a)) \quad \text{ili ekvivalentno} \quad g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Primetimo da iz Lagranžove teoreme sledi da ako je $f'(x) \neq 0$ na (a, b) tada je $f(b) \neq f(a)$ i možemo podeliti jednakost (4.14) sa $f'(c)(f(b) - f(a))$ i dobiti jednakost (4.15). $\square$

Primedba. Primetimo da ako u Košijevoj teoremi izaberemo $g(x) = x$, tada je očigledno $g'(x) = 1$ i $g(b) - g(a) = b - a$ i dobijamo kao posledicu Lagranžovu teoremu.

6. Tejlorova formula

4.16. Tejlorova²¹ formula. Primetimo da Lagranžovu formulu možemo prepisati na sledeći način,

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0), \quad \text{gde je } \xi \text{ između } x_0 \text{ i } x.$$

Ova formula nam s jedne strane pokazuje na koji način možemo vrednosti diferencijabilne funkcije f aproksimirati polinomom 1.-og stepena, a sa druge strane dovodi u vezu vrednosti funkcije f u okolini tačke x_0 i njene vrednosti u toj tački $f(x_0)$. Postavlja se prirodno pitanje generalizacije ove formule:

²⁰ Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, čuveni francuski matematičar.

²¹ Brook Taylor, 1685–1731, engleski matematičar.

Kako datu n -puta diferencijabilnu funkciju f na okolini tačke x_0 aproksimirati polinomom n -tog stepena?

Da bismo objasnili ovu generalizaciju prvo uzmemo polinom,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

koji ima izvode proizvoljnog reda i pokušajmo ga napisati u obliku

$$(4.16) \quad P_n(x) = b_n (x - x_0)^n + b_{n-1} (x - x_0)^{n-1} + \dots + b_1 (x - x_0) + b_0, \quad b_n \neq 0.$$

Primetimo, ako uvrstimo u (4.16) $x = x_0$, dobićemo da je $b_0 = P_n(x_0)$. Ako diferenciramo polinom P_n dat formulom (4.16), dobijamo

$$(4.17) \quad P'_n(x) = n b_n (x - x_0)^{n-1} + (n-1) b_{n-1} (x - x_0)^{n-2} + \dots + 2 b_2 (x - x_0) + b_1,$$

i ako uvrstimo u formulu (4.17) $x = x_0$, sledi da je $b_1 = P'_n(x_0)$. Nastavljajući analogno dalje indukcijom nalazimo da je

$$(4.18) \quad b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{tako da je:}$$

$$P_n(x) = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{P_n^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \dots + \frac{P'_n(x_0)}{1!} (x - x_0) + P_n(x_0).$$

Sada bismo istu ideju hteli da primenimo sa proizvoljnom $(n+1)$ -puta diferencijabilnom funkcijom u nekoj okolini $I_{x_0} \subseteq D$ tačke $x_0 \in D$. Preciznije tada ćemo imati,

$$(4.19) \quad f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x; x_0),$$

gde je

$$(4.20) \quad P_n(x; x_0) = P_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + f(x_0),$$

Taylorov polinom n -tog stepena funkcije f u okolini tačke x_0 , a $R_n(x; x_0) = R_n(x)$, je n -ti ostatak. Formula (4.19) zove se Tejlороva formula funkcije f . Ako izaberemo $x_0 = 0$ dobijamo Makloranovu formulu funkcije f ,

$$(4.21) \quad f(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} (x)^{n-1} + \dots + \frac{f'(0)}{1!} (x) + f(0) + R_n(x).$$

Ova ideja imaće smisla ako pod nekim uslovima ostatak $R_n(x) \rightarrow 0$, kada $x \rightarrow x_0$. Zato je potrebno opisati n -ti ostatak funkcije f i ispitati kada će se to desiti. Tako imamo sledeću teoremu.

Teorema 1. Neka je funkcija f klase C^n na segmentu čiji su krajevi tačke x i x_0 i neka je $(n+1)$ -puta diferencijabilna u svakoj tački intervala sa krajevima x i x_0 . Tada za proizvoljnu funkciju ϕ , koja je neprekidna na tom segmentu i čiji se izvod ne

anulira niti u jednoj njegovoj unutrašnjoj tački, postoji tačka ξ između x i x_0 takva da je

$$(4.22) \quad R_n(x; x_0) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi) (x - \xi)^n.$$

DOKAZ.

Posmatrajmo funkciju u t ,

$$(4.23) \quad F(t) = f(x) - P_n(t; x)$$

na segmentu J čiji su krajevi x_0 i x ²². Iz definicije funkcije F i pretpostavki teoreme jasno je da je F neprekidna na segmentu J i $n + 1$ -puta diferencijabilna u unutrašnjim tačkama segmenta J , tako da redom nalazimo,

$$(4.24) \quad \begin{aligned} F'(t) &= \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k \right)' \\ &= - \left[f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!} (x-t) - \frac{f''(t)}{1!} (x-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!} (x-t)^2 \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right] \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n. \end{aligned}$$

Sada primena Košijeve teoreme na funkcije $F(t)$ i $\phi(t)$ na segmentu J daje egzistenciju broja ξ između x_0 i x takvog da je

$$(4.25) \quad \frac{F(x) - F(x_0)}{\phi(x) - \phi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\phi'(\xi)}.$$

Iz (4.23) sledi: $F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -R_n(x; x_0)$, i nakon zamena izraza za F' iz (4.24) u jednakost (4.25) dobijamo traženu formulu. $\square$

Posledica 1 (Oblici ostataka). Uz pretpostavke i oznake prethodne teoreme važi.

(Ko) *Košijev oblik ostatka:*

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (x - \xi)^n (x - x_0).$$

(La) *Lagranžov oblik ostatka:*

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1}.$$

Dokaz. Ako u formuli (4.22) stavimo $\phi(t) = x - t$ dobijamo Košijev oblik ostatka, a izbor $\phi(t) = (x - t)^{n+1}$ daje Lagranžov oblik. $\square$

²² Dakle, J je ili $[x_0, x]$ ili $[x, x_0]$.

7. Lopitalovo pravilo

4.17. Lopitalovo (L'Hospital) pravilo. Lopitalovo pravilo koristi se za računanje limesa neodređenih oblika,

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Neodređeni oblici $0/0$ i ∞/∞ rešavaju se pomoću Lopitalovog pravila, a ostali neodređeni oblici svode na jedan od ova dva oblika.

Teorema 1 (Lopitalovo pravilo). *Neka su date funkcije $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ za koje su ispunjeni sledeći uslovi:*

- (i1) *diferencijabilne na (a, b)* ²³
- (i2) *$g'(x) \neq 0$ na (a, b) i*
- (i3) $\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \quad (-\infty \leq \alpha \leq +\infty).$

Tada u svakom od slučajeva:

$$(i1) \quad \lim_{x \rightarrow a_+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = 0 \quad \text{ i } \quad (i2) \quad \lim_{x \rightarrow a_+} g(x) = \infty.$$

važi da je $\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. Analogna tvrđenja važe uz analogne pretpostavke i u slučaju kada $x \rightarrow b_-$.

Dokaz. Kako je $g'(x) \neq 0$ Lagranžova teorema implicira da je $g(x)$ strogo monotona na (a, b) . Odakle, zbog pretpostavki na funkciju f , sledi da je $g(x) \neq 0$ na intervalu (a, b) . Tako da za $x, y \in (a, b)$ prema Košijevoj teoremi postoji tačka $c \in (x, y)$ takva da je

$$(4.26) \quad \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{ ili ekvivalentno } \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(y)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right).$$

Pređemo li u prethodnoj relaciji na limes kada $x \rightarrow a_+$ tada pogodnim izborom y koji će takođe težiti a_+ vidimo da u oba slučaja možemo postići da je

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(y)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a_+} \frac{g(y)}{g(x)} = 0,$$

i pri tome kako x i y teže ka a_+ , i c će težiti a_+ , tako da obe strane poslednje jednakosti u (4.26) teže ka α . I dokaz je gotov. $\square$

Primedba. Lopitalovo pravilo može se primeniti:

- (i1) kada $x \rightarrow \pm\infty$ za neodređeni oblik ∞/∞ te za limese i izvode sleva i sdesna.
- (i2) više puta uzastopno ako se nakon njegove primene ponovo dobije jedan od neodređenih oblika $0/0$ ili ∞/∞ i ako dobijene funkcije ispunjavaju uslove prethodne teoreme.
- (i3) i na ostale neodređene oblike, koji se pogodnim transformacijama mogu svesti na jedan od oblika $0/0$ ili ∞/∞ .

²³ $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Primer. (a) Limes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ kojeg smo izračunali pre korišćenjem nekih nejednakosti i teoreme o dva policaјca možemo jednostavnije izračunati primenom Lopitalovog pravila,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Da li je moguće izračunati limes $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ primenom Lopitalovog pravila ?

(b) Sledeći primer zahteva primenu Lopitalovog pravila dva puta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Uopštenjem ovog primera matematičkom indukcijom lako možemo zaključiti da eksponencijalna funkcija s bazom većom od 1 raste brže od bilo koje stepene funkcije.

(c) U ovom primeru pokazujemo neke od transformacija koje je potrebno izvršiti na polaznim funkcijama dok ne dođemo do oblika na kojem možemo primeniti prethodnu teoremu. Računamo,

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x}.$$

Primetimo, da smo u poslednjoj jednakosti koristili neprekidnost funkcije e^x . Sada nalazimo limes u eksponentu:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} x = 0.$$

Dakle, traženi limes je $\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = e^0 = 1$.

4.18. Monotonost i izvod. Na osnovu posledice Lagranžove teoreme (vidi 4.15 Posledica 1.), predznak izvoda na nekom intervalu određuje monotonost funkcije na tom istom intervalu. Podsetimo se da za diferencijabilnu funkciju f na intervalu (a, b) važi:

- (i1) funkcija f je rastuća na intervalu (a, b) **akko** $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a, b)$,
- (i2) funkcija f je opadajuća na intervalu (a, b) **akko** $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a, b)$
- (i3) ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$ tada je funkcija f strogo rastuća na intervalu (a, b) ,
- (i4) ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$ tada je funkcija f strogo opadajuća na intervalu (a, b) .

Primedba. Prisetimo da prve dve tvrdnje (i1) i (i2) važe u oba smera (akko = ako i samo ako), dok za poslednje dve tvrdnje (i3) i (i4) važi samo nužnost (ali ne važi dovoljnost). Sledeći primer funkcije $y = x^3$ na čitavom skupu $\mathbb{R}$ pokazuje da kod

poslednje dve tvrdnje ne važi dovoljnost, jer je data funkcija strogo rastuća na $\mathbb{R}$, ali je $y'(0) = 0$.

Primer. Odredimo intervale monotonosti funkcije $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$. Kako je $f'(x) = 6x^2 - 6$, funkcija f raste za $6x^2 - 6 \geq 0$, tj. $x^2 - 1 \geq 0$. Nakon rešavanja ove jednostavne nejednačine zaključujemo da je f rastuća na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$. Budući da je u prethodnoj nejednakosti jednakost važi samo za $x = -1$ i $x = 1$, zaključujemo da je na tim intervalima f strogo rastuća. Analogno, funkcija f opada za $x^2 - 1 \leq 0$, tj. f je strogo opadajuća na intervalu $(-1, 1)$.

8. Ekstremne vrednosti funkcije

4.19. Ekstremne vrednosti i izvod. Podsetimo se definicije ekstremne vrednosti funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Kažemo da funkcija f ima lokalni minimum $f(c)$ u tački $c \in D$ ako postoji okolina I_c^ε tačke c takva da je f neprekidna u toj okolini i da je $f(x) \geq f(c)$ za svaki $x \in I_c^\varepsilon$. Funkcija f ima globalni minimum $f(c)$ u tački $c \in D$ ako je $f(x) \geq f(c)$ za svaki $x \in D$.

Analogno, funkcija f ima lokalni maksimum $f(c)$ u tački $c \in D$ ako postoji okolina I_c^ε tačke c takva da je f neprekidna u toj okolini i da je $f(x) \leq f(c)$ za svaki $x \in I_c^\varepsilon$. Funkcija f ima globalni maksimum $f(c)$ u tački $c \in D$ ako je $f(x) \leq f(c)$ za svaki $x \in D$.

Primetimo da se u definiciji lokalnih ekstrema zahteva da je vrednost funkcije u tački ekstrema strogo najmanja ili najveća na nekoj okolini tačke c . S druge strane u definiciji globalnih ekstrema dozvoljeno je da se globalni ekstrem nalazi u više tačaka (štaviše sve tačke nekog intervala mogu biti ekstremne, npr. u slučaju funkcije $\operatorname{sgn}(x)$).

Za određivanja ekstremnih vrednosti neke funkcije f važna su nam njena analitička svojstva, drugim rečima, kojoj od klasa $\mathcal{C}^k$ funkcija pripada na svom domenu (ili delu domena). Neka je izvod funkcije f neprekidan²⁴ u tački c . Kažemo da je tačka c stacionarna tačka funkcije f ako je $f'(c) = 0$. Tačka c je kritična tačka funkcije f ako je c stacionarna ili ako f nije diferencijabilna u tački c .

Primetimo da je nužan uslov²⁵ dat u sledećoj modifikovanoj verziji Fermaove leme: *Ako je funkcija f neprekidna u tački c i ako u njoj ima lokalni ekstrem, tada je c kritična tačka funkcije f (ako je f diferencijabilna u c tada je $f'(c) = 0$).*

Primer. (a) Funkcija $f(x) = x^2$ ima lokalni (i globalni) minimum u tački $x = 0$ i primetimo da je $f'(x) = 2x$ pa je i $f'(0) = 0$.

(b) Funkcija $f(x) = |x|$ ima lokalni (i globalni) minimum u tački $x = 0$. Primetimo da ovo nije u suprotnosti sa (modifikovanom) Fermaovom lemom jer funkcije nije diferencijabilna u tački 0 .

²⁴ Drugim rečima funkcija f je barem klase $\mathcal{C}^1$.

²⁵ Ispunjava ga svaka tačka u kojoj funkcija ima lokalnu ekstremnu vrednost.

(c) Za funkciju $f(x) = x^3$ važi da je $f'(x) = 3x^2$ tako da je $f'(0) = 0$. Ali, $f(0)$ nije lokalni ekstrem, odakle sledi da ne vredi obrat Fermaove leme. Jednostavnije rečeno svaka kritična (stacionarna²⁶) tačka ne mora biti tačka u kojoj funkcija dostiže ekstremnu vrednost.

Sada ćemo se baviti dovoljnim uslovima za postojanje lokalne ekstremne vrednosti, tj. uslovima koji moraju važiti u okolini (ili u samoj tački) da bi neka kritična tačka bila i tačka lokalnog ekstrema.

Teorema 1 (Dovoljan uslov za postojanje ekstremuma 1). *Ako prvi izvod f' funkcije f menja znak u kritičnoj tački c , tada funkcija f ima lokalni ekstrem u c . Štaviše vredi:*

- (i1) *ako $f' < 0$ za sve $x \in (c - \varepsilon, c)$ i $f' > 0$ za sve $x \in (c, c + \varepsilon)$ tada u tački c funkcija f ima lokalni minimum,*
- (i2) *ako $f' > 0$ za sve $x \in (c - \varepsilon, c)$ i $f' < 0$ za sve $x \in (c, c + \varepsilon)$ tada u tački c funkcija f ima lokalni maksimum.*

Dokaz. (i1) Ako je $f' < 0$ za sve $x \in (c - \varepsilon, c)$ i $f' > 0$ za sve $x \in (c, c + \varepsilon)$ tada funkcija f strogo pada na intervalu $(c - \varepsilon, c)$ i strogo raste na intervalu $(c, c + \varepsilon)$. Prema tome, funkcija f ima u tački c lokalni minimum. Analogno se tretira i drugi slučaj. $\square$

Kriterijum iz prethodne Teoreme 1. zahteva poznavanje ponašanja izvoda funkcije na nekoj okolini kritične tačke. Ako funkcija f ima bolja analitička svojstva u kritičnoj tački, tj. ako u njoj postoje izvodi viših redova, tada je moguće dobiti drugi kriterijum uz korišćenje Tejlorove formule, u kojem je potrebno znati izvode viših redova u stacionarnoj tački. Preciznije važi sledeća teorema.

Teorema 2 (Dovoljan uslov za postojanje ekstremuma 2). *Neka je funkcija f n puta diferencijabilna u nekoj okolini I_c tačke c . Ako je $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, i $f^{(n)}(c) \neq 0$ tada*

- (n) *ako je n neparan, funkcija f nema lokalni ekstremum u tački c ,*
- (p) *ako je n paran, funkcija f ima u tački c ima lokalni ekstremum i to lokalni minimum ako je $f^{(n)}(c) > 0$, i lokalni maksimum ako je $f^{(n)}(c) < 0$.*

Dokaz. Prema Tejlorovoj formuli imamo,

$$(4.27) \quad f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \alpha(x)(x - c)^n = \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \alpha(x) \right) (x - c)^n,$$

gde $\alpha(x) \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow c$. Budući da $f^{(n)}(c) \neq 0$ i $\alpha(x) \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow c$ suma $\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \alpha(x)$ ima znak kao i $f^{(n)}(c)$ (jer je član $\alpha(x)$ zanemariv u odnosu na $f^{(n)}(c)$ u okolini I_c^δ za dovoljno malo δ) kada je x dovoljno blizu c .

²⁶ Ako je funkcija f klase barem C^1 na nekoj okolini tačke c .

(n) Ako je n neparan tada izraz $(x - c)^n$ menja znak pri prolasku x kroz c ²⁷ i na taj način menja se znak izraza desne strane jednakosti (4.27), a time, naravno, i njegove leve strane, odakle onda odmah sledi da u tački c funkcija f nema ekstremnu vrednost.

(p) Ako je n paran tada sličnom analizom kao u slučaju (n) zaključujemo da izraz $(x - c)^n$ ne menja znak pri prolasku x kroz c , tako da leva strana izraza (4.27) neće promeniti znak, odakle sledi da u tački c funkcija f ima ekstremnu vrednost, i to lokalni minimum ako je $f^{(n)}(c) > 0$, i lokalni maksimum ako je $f^{(n)}(c) < 0$. $\square$

Primer. (i1) Funkcija $f(x) = x^2$, ispunjava uslove **Teoreme 2** u tački $x = 0$, jer je $f'(0) = 0$, a $f''(0) = 2 > 0$, pa u tački $x = 0$ ima lokalni minimum.

(i2) **Teoremu 2** ne možemo primeniti na funkciju $f(x) = |x|$ u tački $x = 0$, jer nije diferencijabilna u toj tački.

(i3) **Teoremu** možemo primeniti na funkciju $f(x) = x^3$ u tački $x = 0$, jer je $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, i $f'''(0) = 6$, i zaključiti da f nema ekstremnu vrednost u tački $x = 0$.

9. Konveksnost i konkavnost funkcija

4.20. Zakrivljenost i izvod. U ovoj tački ispitujemo i opisujemo zakrivljenost (konkavnost i konveksnost) funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ u zavisnosti od njenih izvoda.

Kažemo da je funkcija f konveksna na intervalu $(a, b) \subseteq D$ ako za proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da je $x_1 < x_2$ važi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

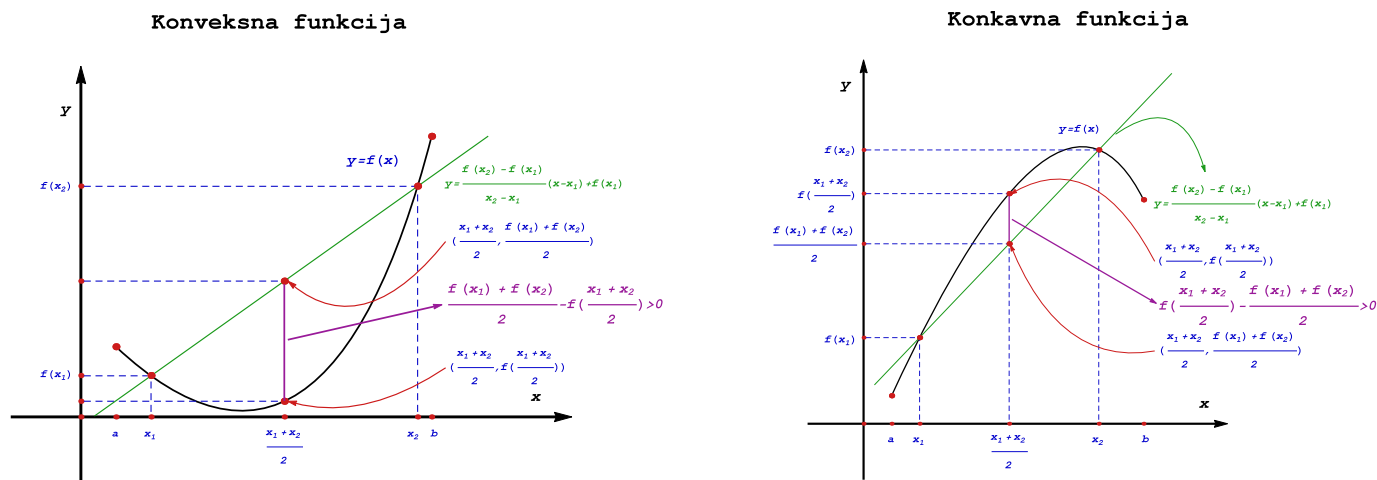
Slično, funkcija f je konkavna na intervalu $(a, b) \subseteq D$ ako za proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da je $x_1 < x_2$ važi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

U slučaju strogih nejednakosti u prethodnim nejednakostima kažemo da je funkcija f strogo konveksna odnosno strogo konkavna.

Geometrijski smisao konveksnosti i konkavnosti vidi se na gornjoj slici (Slika 4.), funkcija f je konveksna na intervalu (a, b) ako za proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$ grafik duži određene tačkama $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ iznad grafika funkcije $y = f(x)$, a funkcija f je konkavna ako je grafik duži određene tačkama $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ ispod grafika funkcije $y = f(x)$.

²⁷Preciznije, $(x - c)^n$ je negativno na $(c - \delta, c)$ i pozitivno na $(c, c + \delta)$ ili obratno.



Slika 4. Konveksnost i konkavnost funkcije

Konveksnost i konkavnost funkcije mogu se odrediti na osnovu znaka drugog izvoda funkcije f . Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 1. *Neka je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna na intervalu $(a, b) \subseteq D$. Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konveksna na intervalu (a, b) . Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je funkcija f strogo konkavna na intervalu (a, b) .*

Dokaz. Prema Tejlorovoj formuli primenjenoj na tačku $x_0 = c = (x_1 + x_2)/2$, i to prvo za $x = x_1$, a zatim za $x = x_2$, nalazimo

$$(4.28) \quad f(x_1) = f(c) + f'(c)(x_1 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2} (x_1 - c)^2$$

$$(4.29) \quad f(x_2) = f(c) + f'(c)(x_2 - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2} (x_2 - c)^2.$$

Kako je

$$(4.30) \quad x_1 - c = x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2x_1 - x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{2} = -(x_2 - c),$$

sabiranjem jednakosti (4.28) i (4.29) uz korišćenje (4.30) konačno dobijamo,

$$(4.31) \quad \begin{aligned} f(x_1) + f(x_2) &= 2f(c) + \frac{(x_1 - c)^2}{2} (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) \\ \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} &= f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{(x_1 - c)^2}{4} (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)). \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow$$

Kako tačke $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ dobijamo da:

$$(i1) \text{ ako je } f''(x) > 0 \text{ na } (a, b), \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \quad \text{tj. } f \text{ je strogo konveksna na } (a, b).$$

$$(i2) \text{ ako je } f''(x) < 0 \text{ na } (a, b), \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \quad \text{tj. } f \text{ je strogo konkavna na } (a, b).$$

Time je dokaz završen. $\square$

Ova teorema daje samo potreban uslov, ali ne i dovoljan uslov zakrivljenosti funkcije. Na primer, funkcija $f(x) = x^4$ je konveksna na čitavom skupu $\mathbb{R}$, ali je $f''(0) = 0$.

Od posebnog interesa su tačke u kojima se menja zakrivljenost funkcije, tj. neprekidna funkcija f ima **prevojnu tačku** c ako postoji okolina I_c^ε tačke c , takva da je f strogo konveksna na intervalu $(c - \varepsilon, c)$ i strogo konkavna na intervalu $(c, c + \varepsilon)$ ili obratno. Neophodan uslov za postojanje prevojne tačke daje sledeća teorema.

Teorema 2. *Ako funkcija f ima prevojnu tačku c i ako postoji $f''(c)$, tada je $f''(c) = 0$.*

Dokaz. Kako $f''(c)$ postoji, iz definicije izvoda sledi da postoji i prvi izvod f' u nekoj okolini tačke c , a zatim i da je f' neprekidna u tački c . Neka funkcija f ima prevojnu tačku c i to npr. ako je strogo konveksna levo od tačke c i strogo konkavna desno od tačke c , tada je f' strogo rastuća levo od tačke c i strogo opadajuća desno od tačke c , tj. f' ima lokalni maksimum u tački c , pa prema Fermaovoj teoremi sledi da je $f''(c) = 0$. Analogno se tretira i drugi slučaj. $\square$

Prethodna teorema daje samo nužan, ali ne i dovoljan uslov za postojanje prevojne tačke. Npr. za funkcije $f(x) = x^3$ i $f(x) = x^4$ važi $f''(0) = 0$, a samo prva funkcija ima prevojnu tačku $x = 0$, a druga nema. U sledećim teoremama bavimo se dovoljnim uslovima za postojanje prevojne tačke.

Teorema 3. *Neka je funkcija dva puta diferencijabilna na nekoj okolini I_c^ε tačke c , osim možda u tački c . Ako f'' menja znak pri prolasku kroz tačku c , tada je tačka c prevojna tačka funkcije f .*

Dokaz. Neka f'' menja znak u tački c , tada je prema Teorem 1 funkcija f konveksna levo od tačke c , a konkavna desno od tačke c , ili obratno, drugim rečima c je prevojna tačka funkcije f . $\square$

Primer. Za funkciju $f(x) = \tan x$ važi da je $f''(x) = 2 \cos^{-3} x \sin x$, odakle je $f''(0) = 0$. Očigledno je $f''(x) < 0$ za $-\pi/2 < x < 0$ i $f''(x) > 0$ za $0 < x < \pi/2$. Dakle, funkcija $\tan x$ je konkavna za $-\pi/2 < x < 0$ i konveksna za $0 < x < \pi/2$, tako da je tačka $c = 0$ prevojna tačka funkcije f .

Slično, kao i kod ispitivanja lokalnih ekstremuma, dovoljan uslov za prevojnu tačku može se dobiti korišćenjem izvoda višeg reda funkcije. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 4. *Neka je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ klase $\mathcal{C}^n$ na nekoj okolini, I_c , tačke c , pri čemu je $n \geq 3$ i neka je $f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ i $f^{(n)}(c) \neq 0$. Ako je n neparan, tada funkcija f ima prevojnu tačku c .*

Dokaz. Analogan dokazu Teoreme 1. $\square$

Primetimo, prema 4.19 Teorema 2., ako je n paran i ako je uz to još i $f'(c) = 0$, tada funkcija f ima lokalni ekstremum u tački c i to minimum ako $f^{(n)}(c) > 0$ i maksimum ako je $f^{(n)}(c) < 0$.

Primer. (a) Za funkciju $f(x) = x^4$ važi $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ i $f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$. Kako je $f^{(4)}(0) > 0$, funkcija ima po 4.19 Teorema 2. lokalni minimum u tački $x = 0$.

(b) Za funkciju $f(x) = x^5$ važi $f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, i $f^{(5)}(0) = 120 \neq 0$. Kako je $n = 5$ neparan, prema prethodnoj teoremi sledi da funkcija ima prevojnu tačku u $x = 0$. U ovom slučaju radi se o *horizontalnoj prevojnoj tački*, jer je $f'(0) = 0$, pa je tangenta u prevojnoj tački paralelna sa x -osom.

(c) Za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ važi:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = 2 \frac{\cos x \cos^3 x - \sin x (3 \cos^2 x (-\sin x))}{\cos^6 x} = 2 \frac{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^4 x} = 2 \frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos^4 x},$$

tako da je $f''(0) = 0$, i $f'''(0) = 2 \neq 0$, pa prema prethodnoj teoremi $x = 0$ je prevojna tačka. U ovom slučaju radi se o *kosoj prevojnoj tački*, jer je $1 = f'(0) \neq 0$, i tangenta u prevojnoj tački nije paralelna sa x -osom (gradi ugao $\pi/4$ sa x -osom).

10. Ispitivanje toka funkcija

4.21. Ispitivanje funkcija i skiciranje njihovog grafika. Ispitivanje funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ²⁸ je složena procedura u kojoj se primenjuje sve što smo do sada naučili o funkcijama, izvodima i sl. Ispitivanje funkcije $y = f(x)$ sastoji se od sledećih koraka:

1. **Određivanje domena funkcije.** Kako se obično funkcije zadaju pomoću elementarnih funkcija (kao njihove kompozicije, sume, razlike, proizvodi, količnici i sl.) potrebno je DOBRO poznavati elementarne funkcije, kao i rešavati jednačine i nejednačine u koje su sastavljene od elementarnih funkcija.
2. **Parnost i neparnost.** Potrebno je ispitati da li je funkcija parna, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$, ili neparna, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$, na svom domenu, koji mora biti centralno simetričan s obzirom na 0. Ako domen D nije centralno simetričan tada funkcija svakako nije ni parna ni neparna. Ako je funkcija parna ili neparna na domenu D onda se ispitivanje funkcije svodi na njeno ispitivanje na skupu $\mathbb{R}_0^+ \cap D$. Većina funkcija nije ni parna ni neparna.
3. **Periodičnost.** Potrebno je proveriti da li je funkcija f , periodična, tj. da li postoji osnovni period²⁹ $T > 0$ takav da je $f(T + x) = f(x)$, $\forall x \in D$. Ako je funkcija periodična onda je dovoljno da funkciju ispitamo na intervalu dužine T , jer onda znamo sve o funkciji na čitavom domenu D . Većina funkcija nije periodična.
4. **Nule funkcije.** Pokušavamo da odredimo tačno ili da lociramo nule jednačine $f(x) = 0$, koristeći neprekidnost i Bolcano-Košijevu teoremu (vidi tačku 4.9)
5. **Ispitivanje funkcije na rubovima domena.** Ova tačka podrazumeva da smo tačno odredili granice domena u tački 1, a zatim je potrebno da odredimo asimptote:

²⁸ Pretpostavljamo da je funkcija f barem neprekidna, a u praksi obično funkcija f ima bolja analitička svojstva, tj. ima izvode višeg reda.

²⁹ Najmanji pozitivan realni broj P takav da je $f(P + x) = f(x)$, $\forall x \in D$

vertikalne, horizontalne i kose. Određivanje asimptota svodi se na nalaženje određenih limesa.

- (v) **Vertikalne asimptote** su prave čija je jednačina $x = a$, pri čemu funkcija f nije definisana u tački $a \in \mathbb{R}$, ali jeste barem u jednoj od okolina $(a - \varepsilon, a)$ ili $(a, a + \varepsilon)$, i pri tome je barem jedan od $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ jednak $\pm\infty$. Npr. funkcija $y = \tan(x)$ ima beskonačno mnogo vertikalnih asimptota i to su sve prave $x_k = \pi/2 + k\pi$, gdje je k proizvoljan celi broj.
- (h) **Horizontalne asimptote** su prave čija je jednačina $y = b$, ako postoji i ako je barem jedan od $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ jednak b . Funkcija može imati najviše dve horizontalne asimptote i to ako je $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_1 \neq b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Npr. funkcija $\arctan(x)$ za koju važi $\pi/2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $-\pi/2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ima dve horizontalne asimptote.
- (k) **Kose asimptote** postoje ako se funkcija f ponaša u beskonačnosti kao prava $y = kx + l$, $k \neq 0$. Ako kosa asimptota postoji kada $x \rightarrow +\infty$ tada je

$$0 \neq k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad l = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Iste formule važe ako postoji kosa asimptota kada $x \rightarrow -\infty$. Jasno, funkcija f može imati najviše dve kose asimptote. Napomenimo, da ako postoji horizontalna asimptota funkcije f kada $x \rightarrow +\infty$ tada ne postoji kosa asimptota funkcije f kada $x \rightarrow +\infty$, i obratno³⁰. Isto važi i za horizontalne i kose asimptote funkcije f kada $x \rightarrow -\infty$.

6. **Ekstremne vrednosti.** Potrebno je naći sve lokalne ekstremne vrednosti funkcije f koristeći rezultate tačke **4.19**. Da bismo odredili lokalne ekstreme funkcije f (ako je ona diferencijabilna) potrebno je pronaći sve njene stacionarne tačke što uključuje:
 - (a1) određivanje izvoda funkcije f
 - (a2) određivanje domena prvog izvoda f' ,
 - (a3) određivanje nula funkcije f' rešavanjem jednačine $f'(x) = 0$,
 - (a4) proveriti, korišćenjem **Teorema 1.** i **2.** iz tačke **4.19**, koja od stacionarnih tačaka je ekstremna tačka.
7. **Intervali monotonosti.** Intervali monotonosti određuju se primenom **4.15** Posledice 1, na izvod funkcije f' nakon što smo ga izračunali u prethodnoj tački 6. Drugim rečima potrebno je ispitati znak funkcije f' na intervalima određenim stacionarnim tačkama presečenim sa domenom funkcije f .
8. **Prevojne tačke.** Slično kao i kod traženja ekstremnih vrednosti funkcije f , za određivanje prevojnih tačaka funkcije f potrebno je:

³⁰ Ako postoji kosa asimptota funkcije f kada $x \rightarrow +\infty$ tada ne postoji horizontalna asimptota funkcije f kada $x \rightarrow +\infty$,

- (a1) odrediti drugi izvod f'' funkcije f ,
- (a2) odrediti domen funkcije f'' ,
- (a3) odrediti nule funkcije f'' rešavanjem jednačine $f''(x) = 0$,
- (a4) proveriti, korišćenjem Teorema 3. i 4. iz tačke 4.20, koje od rešenja jednačine $f''(x) = 0$ je prevojna tačka funkcije f .

9. **Intervali zakrivljenosti.** Određivanje intervala zakrivljenosti, analogno je određivanju intervala monotonosti, samo je potrebno uraditi analogno ispitivanje funkcije f'' , umesto funkcije f' . Potrebno je ispitati znak funkcije f'' jer prema Teoremi 1 iz 4.20. o tom znaku zavisi da li je funkcije f konveksna ($f''(x) > 0$) ili konkavna ($f''(x) < 0$) na nekom intervalu. Dakle, potrebno je ispitati znak funkcije f'' na intervalima određenim rešenjima jednačine $f''(x) = 0$ presečenim sa domenom funkcije f , koje smo izračunali u prethodnoj tački 8.

10. **Grafik funkcije.** Na osnovu svih podataka dobijenih u prethodnim tačakama o funkciji f skiciramo suvislu sliku – grafik funkcije. Napomenimo da prilikom crtanja grafika funkcije moguće je otkriti neke pogreške u prethodnim računima, i nakon toga ih otkloniti.

4.22. Primer. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.

1. **Domen funkcije** je $D = \mathbb{R}$.
2. **Parnost.** Kako je $f(-1) = \sqrt[3]{2+1} = \sqrt[3]{3}$, a $f(1) = \sqrt[3]{2-1} = \sqrt[3]{1} = 1$, zaključujemo da funkcija nije ni parna ni neparna jer za sve $x \in D$ ne važi ni da je $f(-x) = f(x)$ (npr. za $x = 1$) ni da je $f(-x) = -f(x)$ (npr. za $x = 1$).
3. **Periodičnost.** očigledno funkcija nije periodična jer polinomi stepena većeg ili jednakog 1 nisu periodične funkcije.
4. **Nule funkcije.** Rešimo jednačinu $y = 0$. Imamo,

$$\sqrt[3]{2x^2 - x^3} = 0 \iff 2x^2 - x^3 = 0 \iff x^2(2 - x) = 0,$$

odakle sledi da su nule funkcije $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$.

5. **Asimptote.** Funkcija *nema vertikalnih asimptota* jer je $D = \mathbb{R}$. Ispitajmo da li postoje horizontalne asimptote. Računamo,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{2}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = (\pm\infty) \cdot (-1) = \mp\infty$$

odakle sledi da *funkcija nema horizontalnih asimptota* (ni u $-\infty$ ni $+\infty$). Ispitajmo da li funkcija ima kosih asimptota, tako redom imamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{2}{x} - 1 \right)} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} \right) \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -1 \equiv k.$$

Dalje,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x = (+\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1 \right) = (-\infty \cdot 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - 1 \right)^{-2/3} \left(-\frac{2}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{2}{x} - 1 \right)^{-2/3} = \frac{2}{3} \equiv l. \end{aligned}$$

Dakle, prava $y = -x + \frac{2}{3}$ je kosa asimptota i u $-\infty$ i u $+\infty$.

6. Ekstremne vrednosti. Nađimo prvi izvod:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - x^3)^{-2/3}(4x - 3x^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x(4 - 3x)}{\sqrt[3]{x^4(2 - x)^2}}.$$

Domen funkcije f' je $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Dakle, dve kritične tačke funkcije su $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Za $x \in \mathcal{D}_{f'}$ imamo,

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 - 3x}{\sqrt[3]{x(2 - x)^2}},$$

odakle vidimo da je stacionarna tačka (tj. treća kritična tačka) jednaka $x_3 = 4/3$. Prema tome, imamo tri tačke koje zadovoljavaju nužan uslov za egzistenciju lokalnih ekstremnih vrednosti. Da bismo proverili koja od kritičnih tačaka jeste ekstremum koristimo **Teorem 1** iz **4.19.**, tj. proverićemo da li u kritičnim tačkama prvi izvod menja znak. Imamo tri slučaja:

- (i1) za $x < 0$ brojilac je pozitivan, a imenilac je negativan, tako da je $f'(x) < 0$. Drugim rečima, funkcija f je strogo opadajuća na intervalu $(-\infty, 0)$,
- (i2) za $x \in (0, 4/3)$ imenilac i brojilac su pozitivni, pa je $f'(x) > 0$, tj. funkcija f je strogo rastuća na intervalu $(0, 4/3)$.
- (i3) za $x > 4/3$ je brojilac negativan, a imenilac pozitivan, tako da je $f'(x) < 0$, dakle funkcija f je strogo opadajuća na intervalu $(4/3, +\infty)$.

Iz prethodnog razmatranja zaključujemo da:

- (i1) funkcija *ima lokalni minimum* u kritičnoj tački $x_1 = 0$ i vrednost lokalnog minimuma je $f(0) = 0$,
- (i2) funkcija *ima lokalni maksimum* u kritičnoj tački $x_3 = 4/3$, i vrednost lokalnog maksimuma je $f(4/3) = 2\sqrt[3]{4}/3$,
- (13) funkcija *nema lokalni ekstremum* u kritičnoj tački $x_2 = 2$, jer prvi izvod ne menja znak u toj tački.

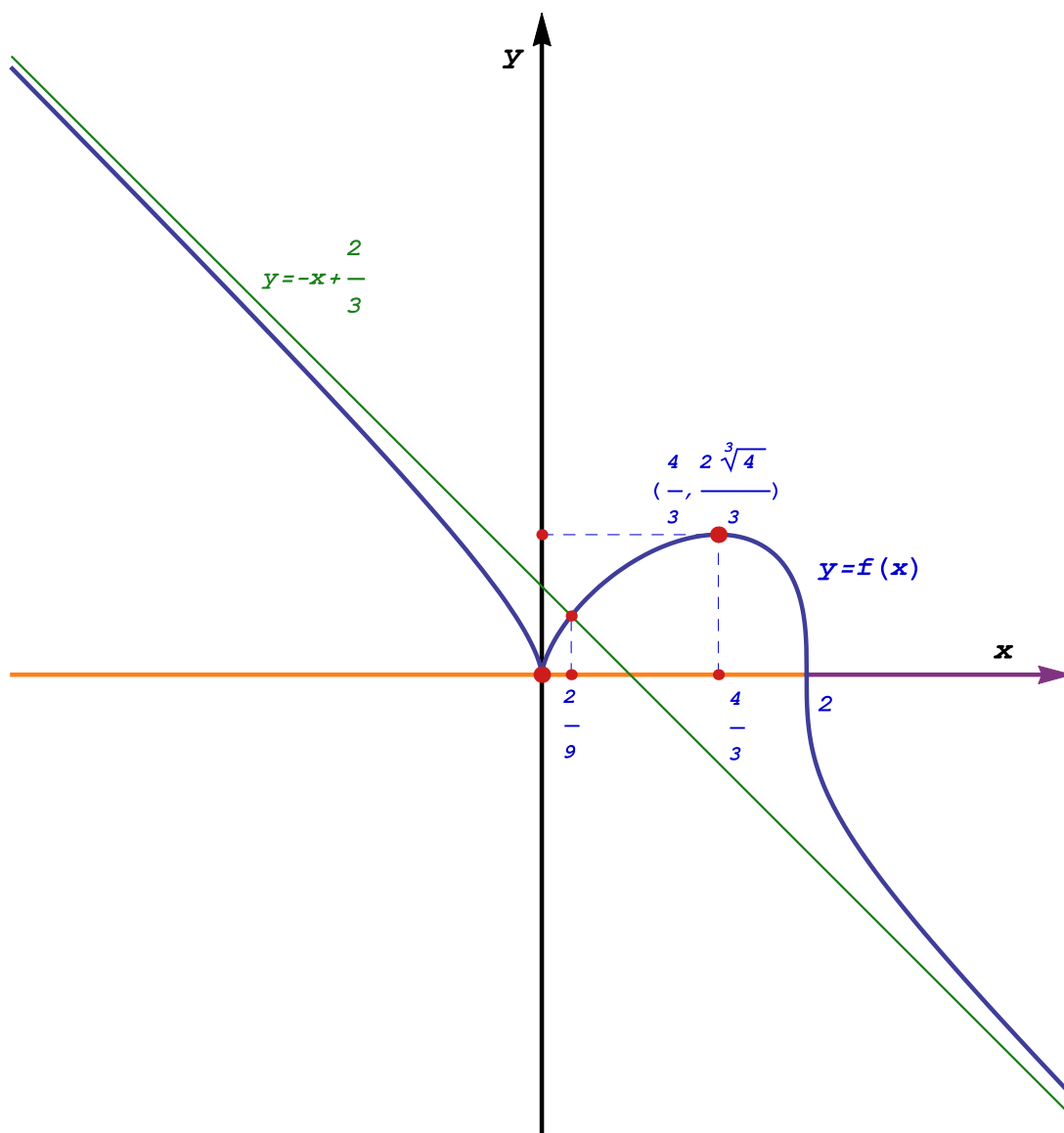
Funkcija nema globalni maksimum ni globalni minimum jer je kodomen jednak $\mathbb{R}$.

7. **Intervali monotonosti.** Monotonost funkcije smo praktički već ispitali u prethodnoj tački: funkcija je strogo opadajuća na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(4/3, +\infty)$, a strogo rastuća na intervalu $(0, 4/3)$.

8. **Prevojne tačke.** Da bismo ispitali da li funkcija ima prevojnih tačaka moramo prvo izračunati drugi izvod funkcije f . Tako nalazimo,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2} - \frac{4-3x}{3[x(2-x)^2]^{2/3}}[(2-x)^2 + x \cdot 2(2-x)(-1)]}{\sqrt[3]{x^2(2-x)^4}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-3(x(2-x)^2) - \frac{1}{3}(4-3x)(2-x)(2-3x)}{\sqrt[3]{x^4(2-x)^8}} = \frac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}, \end{aligned}$$

odakle vidimo da je domen funkcije f'' jednak $D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} = D_{f'}$. Drugi izvod nema nula i jedine tačke u kojima funkcija f može imati prevojnu tačku su $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Da bismo odredili da li se radi o prevojnim tačkama koristićemo Teoremu 3.



Slika 5. Grafik funkcije $\sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

iz **4.20.** Kako je znak od f'' suprotan od znaka izraza $2 - x$, sledi da za $x < 2$ je $f''(x) < 0$, a za $x > 2$ je $f''(x) > 0$. Dakle, funkcija f'' menja znak pri prolasku kroz tačku $x = 2$, tako da je ona jedina prevojna tačka funkcije f .

9. Intervali zakrivljenosti. Na ovo pitanje smo odgovorili u prethodnoj tački u kojoj smo analizirali drugi izvod funkcije f . Kako je $f''(x) < 0$, za $x < 2$, sledi da je funkcija f konkavna na intervalu $(-\infty, 2)$ i kako je $f''(x) > 0$ za $x > 2$, sledi da je funkcija f konveksna na intervalu $(2, +\infty)$.

10. Grafik funkcije. Kombinujući sve prethodne rezultate dobijamo grafik date funkcije koji je prikazan na Slika 5.

11. Zadaci

4.23. Ispitajte sledeće funkcije i skicirajte njihove grafike;

$$(i1) \quad f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$(i2) \quad f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right),$$

$$(i3) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$(i4) \quad f(x) = x^{2/3}(1 + x)^3,$$

$$(i5) \quad f(x) = (x - 1)e^{\frac{x+1}{x-1}},$$

$$(i6) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - 3x - 4}},$$

$$(i7) \quad f(x) = xe^{-\frac{x}{4} + \frac{3}{4x}}.$$

Integralni račun

1. Neodređeni integral

5.1. Definicija. Kao što smo videli u ranijim glavama, kada imamo neku operaciju prirodno se postavlja pitanje egzistencije i nalaženja njene inverzne operacije. Diferenciranje je zapravo linearno preslikavanje¹ sa skupa, $\mathcal{C}^k(D)$, $k \geq 1$, k -puta diferencijabilnih funkcija na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$ na skup $\mathcal{C}^{k-1}(D')$, $D' \subseteq D$, $k \geq 1$, tj.

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{C}^k(D) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(D').$$

Preciznije, neka je $f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$ na skupu D , tada kažemo da je funkcija $F(x)$ **primitivna funkcija (antiizvod, antiderivacija)** funkcije $f(x)$ na skupu D ². Mi ćemo za D obično uzimati segment $[a, b]$.

Propozicija 1. *Neka su F i F_1 primitivne funkcije od f na D tada postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je $F(x) = F_1(x) + C$ na intervalu $[a, b]$.*

Dokaz. Kako je $f(x) = F'(x) = F_1'(x)$ na D , tada je $F'(x) - F_1'(x) = 0$, i na osnovu **4.15 Propozicija 2**, $F(x) - F_1(x) = C$, za neko $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Dakle, ako je F neka primitivna funkcija funkcije f na D , tada postoji čitava familija funkcija, parametrizovana skupom $\mathbb{R}$, koje su primitivne funkcije od f . I pod oznakom $\int f(x) dx$ podrazumevamo taj čitav skup primitivnih funkcija od f i zovemo ga **neodređeni integral** funkcije f na (a, b) . Formalnije,

$$(5.1) \quad \int f(x) dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} = \{\text{ili kraće}\} = F(x) + C,$$

je neodređeni integral funkcije f na (a, b) .

5.2. Neka svojstva neodređenih integrala i tabela elementarnih integrala.

Kako je diferenciranje inverzna operacija od traženja integrala mnoge osobine diferenciranja prenose se i na integralenje.

Propozicija 2. *Neka je F primitivna funkcija od f na D . Tada je*

$$(i1) \quad d(\int f(x) dx) = f(x) dx \quad \text{ili ekvivalentno} \quad \frac{d}{dx}(\int f(x) dx) = f(x),$$

$$(i2) \quad \int dF(x) = F(x) + C = \int f(x) dx.$$

¹ tj. linearni operator

² ili kraće primitivna funkcija od f na D .

$$(i3) \int k f(x) dx = k F(x) = k \left(\int f(x) dx \right).$$

(i4) Neka je G primitivna funkcija od g na D tada je

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

Dokaz. (i1) i (i2) direktno iz činjenice da je neodređeni integral inverzna operacija od diferenciranja. Pokažimo još npr. (i4) Iz $(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ sledi da je $F + G$ primitivna funkcija od $f + g$, i primena (i2) na $F + G$ daje traženu jednakost. $\square$

Sada koristeći Tabelu izvoda elementarnih funkcija lako dobijamo sledeću tabelu elementarnih integrala.

Tabela elementarnih integrala

Stepene funkcije	Konstantna funkcija
$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\int a dx = ax + C, \quad a \in \mathbb{R}.$
Trigonometrijske funkcije	Arkus funkcije
$\int \cos x = \sin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C,$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$	
Eksponencijalna funkcija	Logaritamska funkcija
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
Hiperboličke funkcije	Inverzne hiperboličke funkcije
$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsh} x + C$
$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arch} x + C$

$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arth} x + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$	

Primerimo da se osnovna metoda za određivanje neodređenih integrala sastoji iz sledeća dva koraka:

- (i1) Koristeći znanja o izvodima napišemo tabelu osnovnih neodređenih integrala elementarnih funkcija.
- (i2) Pomoću pravila integralenja, od kojih zasada znamo samo neka, i svojstava neodređenih integrala polazni neodređeni integral svodimo na poznate. Zasada na one iz Tabele, a kasnije na one koje smo već izračunali.

Primeri. Izračunajmo, sledeće neodređene integrale:

$$(i1) \quad \int x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} dx = \int x^{\frac{31}{16}} dx = \frac{x^{\frac{31}{16}+1}}{\frac{31}{16}+1} + C = \frac{16}{47} x^{\frac{47}{16}} + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2} dx = \int \frac{2-x+2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{2}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= -\frac{2}{x} - \ln|x| - 4x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

2. Osnovne metode integracije neodređenog integrala

5.3. Smena promenljive. U ovoj tački skup pravila neodređenog integrala obogaćujemo jednim od najvažniji pravila.

Teorema. Neka je $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije f i neka je $g : D' \rightarrow A$ funkcija klase $\mathcal{C}^1$ na D' . Tada postoji primitivna funkcija za funkciju

$$f(g(x)) g'(x) : D' \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{i važi formula} \quad \int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Dokaz. Iz

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(g(x)) g'(x) dx \right) = f(g(x)) g'(x) = F'(g(x)) g'(x) = \frac{d}{dx} (F(g(x)) + C),$$

sledi da je funkcija $F(g(x)) + C$ primitivna funkcija od $f(g(x)) g'(x)$. Prema tome,

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C. \quad \square$$

Ova teorema omogućuje da uvedemo smenu u neodređenom integralu na sledeći način

$$t = g(x) \quad \text{odakle je} \quad dt = d(g(x)) = g'(x)dx, \quad \text{tako da je}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C.$$

Primeri. Izračunajmo sledeće integrale, pretpostavljajući da je $a \neq 0$, a u (i6) da je $a > 0$. Napomenimo da za nalaženje nekih integrala koristimo rešenja prethodnih, npr. rezultat iz (i4) koristimo u (i5), a (i5) u (i6).

$$(i1) \quad \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C$$

$$= \ln \frac{1}{|\cos x|} + C.$$

$$(i2) \quad \int x^k e^{x^{k+1}} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} x^{k+1} = t \\ (k+1)x^k \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{k+1} \cdot e^t = \frac{e^t}{k+1} + C = \frac{e^{x^{k+1}}}{k+1} + C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$(i3) \quad \int f(ax+b) \, dx = \left\{ \begin{array}{l} ax+b = t \\ a \, dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int f(t) \, dt = \frac{1}{a} F(t) + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

$$(i4) \quad \int \cos(ax+b) \, dx = \left\{ \begin{array}{l} ax+b = t \\ a \, dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int \cos t \, dt = \frac{1}{a} \sin t + C = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$$

$$(i5) \quad \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$(i6) \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t \, dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t \, dt = \int \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} a \cos t$$

$$= a^2 \int |\cos t| \cos t \, dt = \begin{cases} a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C, & \text{ako je } \cos t > 0. \\ -a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C, & \text{ako je } \cos t < 0. \end{cases}$$

Napomenimo da ćemo se u slučajevima poput (i6) u daljnjem tekstu ograničavati samo na prvi slučaj³: $\sqrt{h(x)^2} = h(x)$, $h(x) \geq 0$, vodeći računa da postoji i drugi slučaj: $\sqrt{h(x)^2} = -h(x)$, $h(x) \leq 0$.

5.4. Parcijalna integracija. Parcijalna integracija je jedna od najvažnijih metoda integracije, koja je posledica Lajbnicove formule za izvod proizvoda funkcija. Preciznije, važi sledeća teorema.

³radi jednostavnijeg zapisa.

Teorema. Neka su f i g diferencijabilne funkcije na D i neka postoji primitivna funkcija za $f'g$, tada postoji primitivna funkcija i za funkciju $f g'$ na D i važi formula

$$\int f(x) g(x)' dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Dokaz. Iz Lajbnicove formule,

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x),$$

integracijom obe strane nalazimo

$$f(x)g(x) = \int (f(x) g(x))' dx = \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx,$$

odakle sledi formula. □

Ponekad se ova formula zapisuje na sledeći način,

$$\int f(x) d(g(x)) dx = f(x) g(x) - \int g(x) d(f(x)) dx.$$

5.5. Primeri. Izračunajmo sada nekoliko tipičnih integrala metodom parcijalne integracije.

$$(i1) \quad \int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & df = \frac{1}{x} dx \\ dg = dx & g(x) = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x(\ln x - 1) + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = x & df = dx \\ dg = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} & g(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = -x \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx = \mathbf{6.3(i6)} =$$

$$= \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

$$(i3) \quad \int x^2 \arcsin(x) dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \arcsin(x) & df = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dg = x^2 dx & g(x) = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right\} = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6} \int \frac{1-t}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6} \left(\int t^{-\frac{1}{2}} dt \right.$$

$$\left. + \int t^{\frac{1}{2}} dt \right) = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{6} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2}$$

$$- \frac{1}{9} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} + C = \frac{x^3 \arcsin(x)}{3} + \frac{1}{9} \sqrt{1-x^2} (2+x^2) + C.$$

$$(i4) \quad I = \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \sin x & df = \cos x dx \\ dg = e^x dx & g(x) = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \cos x & df = -\sin x dx \\ dg = e^x dx & g(x) = e^x \end{array} \right\} = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) - I,$$

odakle sledi da je: $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$

$$\begin{aligned}
 (i5) \quad \int x \arcsin(x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \arcsin(x) \quad df = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dg = x dx \quad g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2 \arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= (i2) = \frac{x^2 \arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2} \left(-x \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} \right) \\
 &= \frac{x^2 \arcsin(x)}{2} - \frac{\arcsin(x)}{4} + \frac{x \sqrt{1-x^2}}{4} + C.
 \end{aligned}$$

$$(i6) \quad \int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx, \quad \alpha \beta \neq 0,$$

$$(i7) \quad \int x^2 \ln x dx$$

$$(i8) \quad \int x^n e^x dx$$

3. Integracija racionalnih funkcija

5.6. Integracija racionalnih funkcija. Kao što znamo svaka racionalna funkcija ima oblik

$$(5.2) \quad R(x) = \frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = A(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

pri čemu je $A(x)$ polinom stepena $n - m$ ako je $n \geq m$ ⁴, a $P(x)/Q(x)$ je prava racionalna funkcija, tj. ona kod koje je $\partial P < \partial Q$. Svaka prava racionalna funkcija može predstaviti u vidu sume parcijalnih razlomaka tj. kao

$$(5.3) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_j^i}{(x - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{s_i} \frac{B_j^i x + C_j^i}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}, \quad \text{ako je}$$

$$Q(x) = b_m (x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{s_t}$$

gde je $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $p_1, \dots, p_t, q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}$ i $p_i^2 - 4q_i < 0$, za svako $i = 1, \dots, t$, i $m = r_1 + \dots + r_k + 2(s_1 + \dots + s_t)$.

Iz formula (5.2) i (5.3), kao iz linearnosti integrala, jasno je da se problem izračunavanja neodređenog integrala racionalnih funkcija svodi na izračunavanje neodređenih integrala parcijalnih razlomaka

$$(5.4) \quad \frac{A}{(x - \alpha)^j}, \quad \text{i} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^j}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Nalaženjem neodređenih integrala parcijalnih razlomaka rešeno je u sledećoj propoziciji.

⁴ ako je $m > n$ onda je $A = 0$.

Propozicija. Za neodređene integrale parcijalnih razlomaka važi:

$$(i1) \int \frac{A}{(x - \alpha)^j} dx = \frac{A}{(1 - j)(x - \alpha)^{j-1}} + K, \quad K \in \mathbb{R}, j > 1,$$

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

$$(i2) \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + K.$$

$$B, C, p, q, K \in \mathbb{R}.$$

$$(i3) \text{ Ako uvedemo oznake } I_j = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^j} \text{ i } J_j = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^j} dx,$$

tada za integrale I_j i J_j vaše rekurentne veze

$$I_j = \frac{2x + p}{(j - 1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{j-1}} + \frac{2(2j - 3)}{(j - 1)(4q - p^2)} I_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$J_j = \frac{B}{2(1 - 1)(x^2 + px + q)^{j-1}} + (C - \frac{1}{2} Bp) I_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Dokaz. (i1) Slučaj $j = 1$ nalazi se u tabeli, a za $j > 1$ imamo

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^j} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x - \alpha \\ dt = dx \end{array} \right\} = A \int \frac{dt}{t^j} = \frac{A}{1 - j} t^{-j+1} + K = \frac{A}{1 - j} \frac{1}{(x - \alpha)^{j-1}} + K.$$

(i2) za $j = 1$ primetimo da je

$$\frac{Bx + C}{x^2 + px + q} = \frac{B}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{C - \frac{1}{2} Bp}{x^2 + px + q} = \frac{B}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{C - \frac{1}{2} Bp}{(x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}},$$

tako da imamo

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + (C - \frac{1}{2} Bp) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x + p) dx \end{array} \right\} \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = x + p/2 \\ du = dx \end{array} \right\} = \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + K \end{aligned}$$

Nađimo sada J_j

$$\begin{aligned} J_j &= \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^j} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^j} dx + (C - \frac{1}{2} Bp) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^j} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x + p) dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{dt}{t^j} + (C - \frac{1}{2} Bp) I_j = \frac{B}{2(1 - j)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{j-1}} + (C - \frac{1}{2} Bp) I_j. \end{aligned}$$

Na kraju nalazimo rekurentnu vezu za I_j .

$$\begin{aligned}
 I_{j-1} &= \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{j-1}} = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = (x^2 + px + q)^{-j+1} \\ df = (-j+1)(2x+p)(x^2 + px + q)^{-j} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dg = dx \\ g(x) = x \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{x}{(x^2 + px + q)^{j-1}} + (j-1) \int \frac{2x^2 + px}{(x^2 + px + q)^j} dx = \frac{x}{(x^2 + px + q)^{j-1}} \\
 &\quad + 2(j-1) \int \frac{x^2 + px + q - \frac{p}{2}x - q}{(x^2 + px + q)^j} dx = \frac{x}{(x^2 + px + q)^{j-1}} + 2(j-1)I_{j-1} \\
 &\quad - \frac{(j-1)p}{2} \int \frac{(2x+p) + (\frac{4q}{p} - p)}{(x^2 + px + q)^j} dx = \frac{x}{(x^2 + px + q)^{j-1}} + 2(j-1)I_{j-1} + \frac{p}{2(x^2 + px + q)^{j-1}} \\
 &\quad - \frac{(j-1)(4q - p^2)}{2} I_j,
 \end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$I_j = \frac{2x+p}{(j-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{j-1}} + \frac{2(2j-3)}{(j-1)(4q-p^2)} I_{j-1}. \quad \square$$

5.7. Primeri. Primeri (i1)-(i4) korišćeni su u dokazu prethodne leme.

$$(i1) \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2 + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = ta \\ dx = a dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{x dx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + a^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C.$$

$$(i3) \quad \int \frac{2x+p}{x^2 + px + q} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x+p) dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln(x^2 + px + q) + C, \quad p^2 - 4q < 0.$$

$$(i4) \quad \int \frac{2x+p}{(x^2 + px + q)^j} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x+p) dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^j} = \frac{1}{(1-j)(x^2 + px + q)^{j-1}} + C.$$

$$(i5) \quad \int \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx = \int \left(x^2 + x - 3 + \frac{5x+2}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{5x+2}{(x+1)^2} dx = (*)$$

kako je $\frac{5x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A+A(x+1)+B}{(x+1)^2}$ odakle nalazimo $A+B=2$, $A=5$, $B=-3$,

tako da imamo $\int \frac{5x+2}{(x+1)^2} dx = \int \frac{5dx}{x+1} - \int \frac{3dx}{(x+1)^2} dx = 5 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$

i konačno $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx = (*) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + 5 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$

$$(i6) \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right) + C.$$

$$(i7) \quad \int \frac{3x-1}{x^2+5x+6} dx = 10 \ln(3+x) - 7 \ln(2+x) + C.$$

5.8. Integracija nekih iracionalnih funkcija. Ova tačka pokazuje važnost integrala racionalnih funkcija jer se i neke klase integrala iracionalnih funkcija pogodnim smenama svode na integrale racionalnih funkcija koje znamo da rešimo.

(i1) Neka je R racionalna funkcija u $k+1$ promenljivoj tada integral oblika

$$(5.5) \quad \int R \left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx \quad n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

rešavamo smenom

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{gde je } n = NZS(n_1, \dots, n_k). \text{ Tada je}$$

$$x = \frac{b-t^nd}{t^nc-a} \quad \text{i} \quad dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2} dt. \quad \text{Nakon smene integral (5.5) postaje}$$

$$\int R \left(\frac{b-t^nd}{t^nc-a}, t^{m_1}, t^{m_2}, \dots, t^{m_k} \right) dx \quad m_i = \frac{n}{n_i}, i = 1, \dots, n.$$

Primetimo da je poslednji integral, integral racionalne funkcije u t , time je pokazano da se ova klasa integrala iracionalnih funkcija svodi na integraciju racionalnih funkcija.

(i2) Neka je R racionalna funkcija u dve promenljive, tada se integral

$$(5.6) \quad \int R \left(x, \sqrt{ax^2+bx+c} \right) dx,$$

može svesti na integral racionalne funkcije jednom od Ojlerovih (Euler) smena

(a) ako je $a > 0$ koristimo smenu: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$, iz koje nalazimo

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b} \quad \text{i} \quad dx = \frac{2(bt+\sqrt{a}(t^2+c))}{(2\sqrt{a}t+b)^2} dt \quad \text{odakle sledi da je integral (5.6)}$$

$$\int R \left(x, \sqrt{ax^2+bx+c} \right) dx = \int R \left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, t \right) \frac{2(bt+\sqrt{a}(t^2+c))}{(2\sqrt{a}t+b)^2} dt$$

integral racionalne funkcije.

(b) ako je $c > 0$ koristimo smenu: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$, iz koje nalazimo

$$x = \frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a} \quad \text{i} \quad dx = -\frac{2(a\sqrt{c} + t(b + \sqrt{c}t))}{(a - t^2)^2} dt \quad \text{odakle sledi da je integral}$$

$$(5.6) \quad \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \\ = \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a}, t\frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a} - \sqrt{c}\right) \frac{-2(a\sqrt{c} + t(b + \sqrt{c}t))}{(a - t^2)^2} dt,$$

integral racionalne funkcije.

(c) ako je α jedan realan koren polinoma $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ tada koristimo smenu: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$ iz koje nalazimo

$$x = \frac{t^2\alpha - a\beta}{t^2 - a} \quad \text{i} \quad dx = \frac{-2ta(\alpha - \beta)}{(a - t^2)^2} dt \quad \text{odakle sledi da je integral (5.6)}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2\alpha - a\beta}{t^2 - a}, t(x - \alpha)\right) \frac{2ta(-\alpha + \beta)}{(a - t^2)^2} dt$$

integral racionalne funkcije.

Primer. Primeri integrala koji se rešavaju Ojlerovim smenama.

$$(i1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + x^2} = t - x, \quad x = \frac{t^2 - 1}{2t} \\ dx = \frac{1 + t^2}{2t^2} dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2 + 1}{2t^2} \frac{1}{t - \frac{t^2 - 1}{2t}} dt = \int \frac{t^2 + 1}{2t^2} \frac{2t}{t^2 + 1} dt \\ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{dx}{(1 + x^2)(\sqrt{1 - x^2})} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - x^2} = t(x + 1), \quad x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ dx = \frac{-4t}{(1 + t^2)^2} dt \end{array} \right\} = \dots$$

$$(i3) \quad \int \frac{dx}{x + \sqrt{1 + x + x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + x + x^2} = t - x, \quad x = \frac{-1 + t^2}{1 + 2t} \\ dx = \frac{2(1 + t + t^2)}{(1 + 2t)^2} dt \end{array} \right\} = \dots$$

(i3) Integral oblika

$$(5.7) \quad \int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

poznatiji kao **diferencijalni binom** može se svesti na integral racionalne funkcije u sledećim slučajevima:

(a) ako je $p \in \mathbb{Z}$ i $p > 0$, tada izraz $(ax^n + b)^p$ razvijamo po binomnoj formuli, a ako je $p < 0$ smenom $x = t^q$ gde je $q = \text{NZS}(\text{imenilaca brojeva } m \text{ i } n)$.

(b) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ integral se smenom $t^r = ax^n + b$ gde je $r = \text{imenilac od } p$.

(c) $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ integral se smenom $t^r = a + bx^{-n}$ gde je $r = \text{imenilac od } p$.

Primer. Izračunajte sledeće integrale iracionalnih funkcija.

$$\begin{aligned}
 \text{(i1)} \quad \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = 6 \int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \dots \\
 &= 6 \left(\ln|t| - \frac{1}{4} \ln|t+1| - \frac{3}{8} \ln(2t^2-t+1) - \frac{1}{4\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} \right) + C \\
 &= \ln \frac{x}{(x^{\frac{1}{6}}+1)^{\frac{3}{2}}(2x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+1)^{\frac{9}{4}}} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{7}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(i2)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2} - \sqrt{3+2x}} &= \left\{ \begin{array}{l} 3+2x = t^6, \\ dx = 3t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{3t^2}{t-1} dt = \frac{3}{2} (t-1)(t+3) + 3 \ln|t-1| + C \\
 &= \frac{3}{2} ((3+2x)^{\frac{1}{6}}-1)((3+2x)^{\frac{1}{6}}+3) + 3 \ln((3+2x)^{\frac{1}{6}}-1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\text{(i3)} \quad \int \sqrt{x^3+x^4} dx = \int x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1}{x}+1}, \quad x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt. \end{array} \right\} = -2 \int \frac{t^2}{(t^2-1)^4} dt = \dots$$

5.9. Integracija nekih trigonometrijskih funkcija. Pri računanju integrala čija podintegralna funkcija sadrži sinuse i kosinuse primenjujemo adicione formule sa idejom da smanjimo stepene sinusa i kosinusa u podintegralnoj funkciji. Korisno je koristiti sledeće transformacione formule:

$$\begin{aligned}
 \sin(ax) \cos(bx) &= \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x] \\
 \sin(ax) \sin(bx) &= \frac{1}{2} [\sin(a-b)x - \sin(a+b)x] \\
 \cos(ax) \cos(bx) &= \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]
 \end{aligned}$$

Neka je $R(\sin x, \cos x)$ racionalna funkcija u $\sin x$ i $\cos x$, tada se univerzalnom smenom:

$$(5.8) \quad \tan \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

integral $\int R(\sin x, \cos x) dx$ svodi na integral racionalne funkcije. S obzirom da se ovom smenom obično dobijaju komplikovane racionalne funkcije (tj. stepeni polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ su prilično veliki), korisno je izbeći ovu smenu ako je to ikako moguće. To je moguće sigurno u sledećim slučajevima:

(a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ili $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ tada koristimo smenu

$$\cos x = t \text{ (ili } \sin x = t), \quad \sin x = \sqrt{1-t^2} \text{ (ili } \cos x = \sqrt{1-t^2}) \quad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ (ili } dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}).$$

(b) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ tada koristimo smenu

$$\tan x = t, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Primer. Primeri integrala trigonometrijskih funkcija.

$$(i1) \quad \int \sin(6x) \cos(7x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin(-x) + \sin(13x)) dx = \frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{1}{13} \cos(13x) \right) + C.$$

$$(i2) \quad \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 3} = \left\{ \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{2t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= \arctan(2t + 1) + C = \arctan(2 \tan \frac{x}{2} + 1) + C.$$

$$(i3) \quad \int \frac{dx}{1 + \tan x} = \left\{ \begin{array}{l} \tan x = t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{(t^2+1)} \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2} (\arctan(t) + \ln|1+t|) - \frac{1}{4} \ln(1+t^2) + C$$

$$= \frac{1}{2} (x + \ln|\sin x + \cos x|) + C.$$

$$(i4) \quad \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^2(1-t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

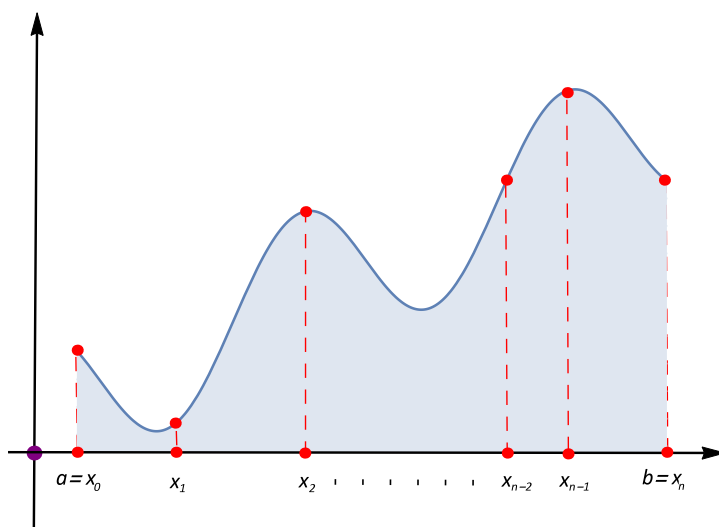
$$(i5) \quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = - \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4} dt = \dots = -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} + C.$$

4. Određeni integral

5.10. Definicija. Neka je data neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, ona je ograničena na segmentu $[a, b]$, tada je i površina lika 'ispod grafika krive', ograničenog pravama $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i grafikom krive $y = f(x)$, konačna jer je manja od $(b-a)M$, gde je M maksimum funkcije f na $[a, b]$. Sada se postavlja prirodno pitanje kako da odredimo površinu ispod grafika krive. Ideja koju je predložio Riman sastoji se u sledećem: podelimo segment $[a, b]$ na n delova tačkama

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n | a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\} = P.$$

Sa Slike 1. vidimo da je tražena površina jednaku zbiru površina n krivolinijskih trapeza određenih tačkama skupa P . Ako dužinu podintervala obeležimo sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ($i = 1, \dots, n$), i neka je $\chi(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ parametar podele P , i za izabrane tačke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, za svako $i = 1, \dots, n$, definišimo skup $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Očigledno je $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \dots < x_n$.



Slika 1. Podela segmenta

Ako su dužine svih intervala

$[x_{i-1}, x_i]$ jednake onda kažemo da je podela P ekvidistantna.

Motivisani Rimanovom idejom posmatramo funkciju, $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tada uređeni par (P, Ξ) zovemo podelom segmenta $[a, b]$, a zbir

$$(5.9) \quad \Sigma(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

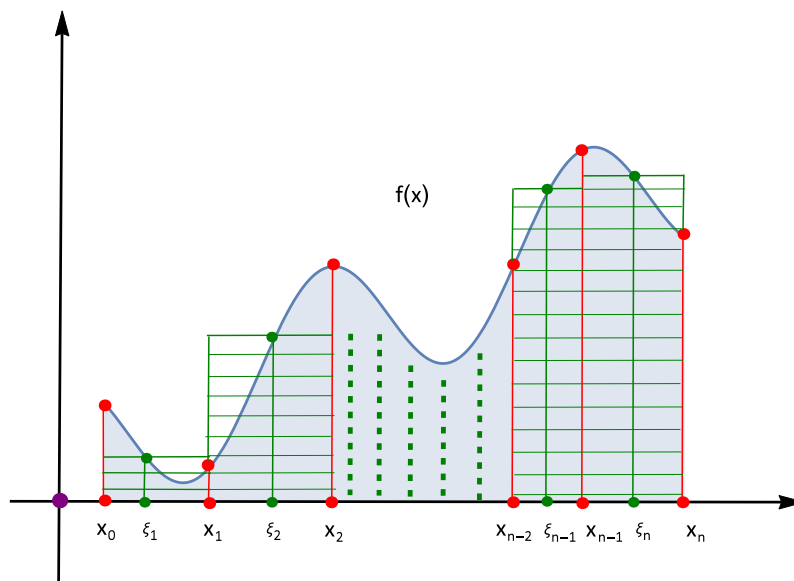
nazivamo integralnom sumom funkcije f za podelu (P, Ξ) , vidi Sliku 2. Napomenimo

da u opštem slučaju funkcija f ne mora biti neprekidna na $[a, b]$.

Primetimo da integralna suma $\Sigma(f, P, \Xi)$ predstavlja aproksimaciju površine ispod grafika krive f na $[a, b]$ sumom od n -pravougaonika čije su osnove Δx_i i čije su visine $f(\xi_i)$.

Postavlja se prirodno pitanje kada ta aproksimacija teži pomenutoj površini.

Za broj I kažemo da je granična vrednost integralne sume $\Sigma(f, P, \Xi)$ kada parametar podele $\chi(P) \rightarrow 0$ i pišemo



Slika 2. Integralna suma

$$I = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \Sigma(f, P, \Xi), \text{ ukoliko } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tako da za svaku podelu } (P, \Xi) \text{ važi}$$

$$(5.10) \quad |\Sigma(f, P, \Xi) - I| < \varepsilon \quad \text{kada je } \chi(P) < \delta.$$

Ukoliko postoji konačni $\lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \Sigma(f, P, \Xi)$ tada kažemo da je funkcija f integrabilna u Rimanovom smislu na segmentu $[a, b]$. I pomenuti limes zove se određeni (Rimanov) integral funkcije f na $[a, b]$. Oznaka koja se koristi: $I = \int_a^b f(x) dx$, gde je a —donja granica, b —gornja granica, $f(x)$ —podintegralna funkcija, $f(x) dx$ —podintegralni izraz i x —integraciona promenljiva.

Teorema. Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$ tada je ona i integrabilna u Rimanovom smislu.

Digresija. Obrat ovog tvrđenja ne važi.

Skica dokaza. Kako je f neprekidna funkcija na intervalu $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]$ ona dostiže svoj minimum i maksimum na $[x_{i-1}, x_i]$ i možemo definisati tkz. gornju i donju Darbuovu (Darboux) sumu (vidi Sliku 3.) za datu raspodelu $\Sigma(f, P, \Xi)$ na sledeći način:

$$\mathcal{D}_-(\Sigma) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{i}$$

$$\mathcal{D}_+(\Sigma) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

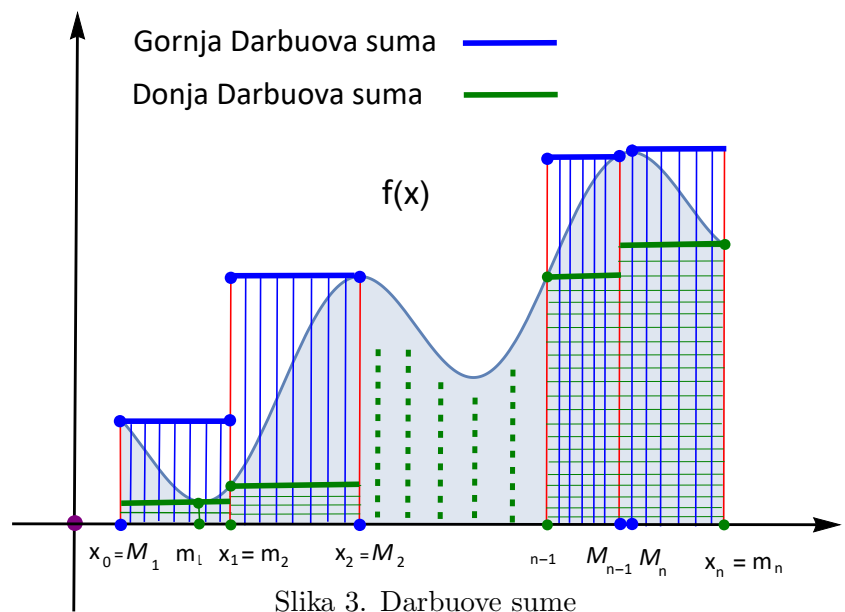
gde je $m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ i $M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$. Očigledno važi

$$\mathcal{D}_-(\Sigma) \leq \Sigma(f, P, \Xi) \leq \mathcal{D}_+(\Sigma).$$

Kako se svaka raspodela $\Sigma(f, P, \Xi)$ može aproksimirati po volji tačno ekvidistantnom raspodelom $\Sigma^\varepsilon(f, P^\varepsilon, \Xi^\varepsilon)$ ⁵ za neprekidnu funkciju (koja je i ravnomerno neprekidna na $[x_{i-1}, x_i]$, pa kada $n \rightarrow \infty$, $m_i \rightarrow M_i$) lako se pokazuje da je

$$\lim_{(P, \Xi)} \mathcal{D}_-(\Sigma) = \lim_{(P, \Xi)} \mathcal{D}_+(\Sigma),$$

odakle sledi tvrdnja. □



Slika 3. Darbuove sume

⁵ $\forall \varepsilon > 0$ postoji ekvidistantna raspodela $(P^\varepsilon, \Xi^\varepsilon)$ takva da je $|\Sigma(f, P, \Xi) - \Sigma^\varepsilon(f, P^\varepsilon, \Xi^\varepsilon)| < \varepsilon$.

5.11. Primer. Odredimo određene integrale nekih funkcija po definiciji.

(i1) $f(x) = c$. Neka je (P, Ξ) proizvoljna podela segmenta $[a, b]$ (vidi Sliku 4.), tada je

$$\begin{aligned}\Sigma(f, P, \Xi) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b - a).\end{aligned}$$

Dakle, u ovom slučaju $\Sigma(f, P, \Xi)$ ne zavisi o podeli, pa niti o $\chi(P)$, i imamo da je

$$\lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \Sigma(f, P, \Xi) = c(b - a), \quad \text{tj.} \quad \int_a^b c \, dx = c(b - a).$$

Specijalno za $c = 1$, je $\int_a^b dx = b - a$.

(i2) $f(x) = x$. Kako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ možemo posmatrati ekvidistantnu podelu (Slika 5.) $\Xi = \{\xi_i = x_i = a + i h, 1 \leq i \leq n\}$ gde je $h = \frac{b-a}{n}$. Dakle,

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i h = a + i \frac{b-a}{n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{i} \quad \Delta x_i = h.$$

Sada redom imamo na segmentu $[a, b]$,

$$\begin{aligned}\Sigma(f, P, \Xi) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i h \\ &= h \sum_{i=1}^n (a + i \cdot h) = h \left(n \cdot a + h \sum_{i=1}^n i \right) \\ &= n \cdot h \left(a + \frac{n+1}{2} h \right) \\ &= n \cdot \frac{b-a}{n} \left(a + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \right) \\ &= a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

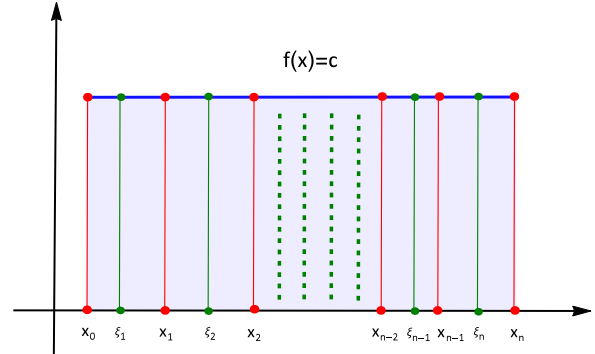
Dakle, kada $h \rightarrow 0$ tada $n \rightarrow \infty$, i imamo

$$\int_a^b x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

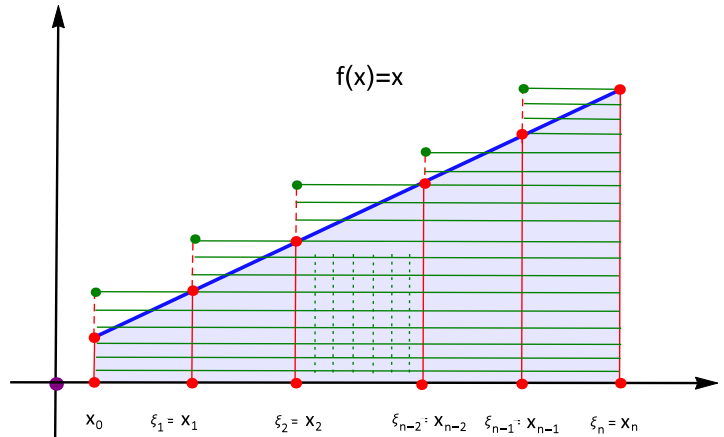
(i3) $f(x) = e^x$. Kako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ možemo posmatrati ekvidistantnu podelu

$\Xi = \{\xi_i = x_i = a + i h, 1 \leq i \leq n\}$ gde je $h = \frac{b-a}{n}$. Dakle,

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i h = a + i \frac{b-a}{n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad \text{i} \quad \Delta x_i = h.$$



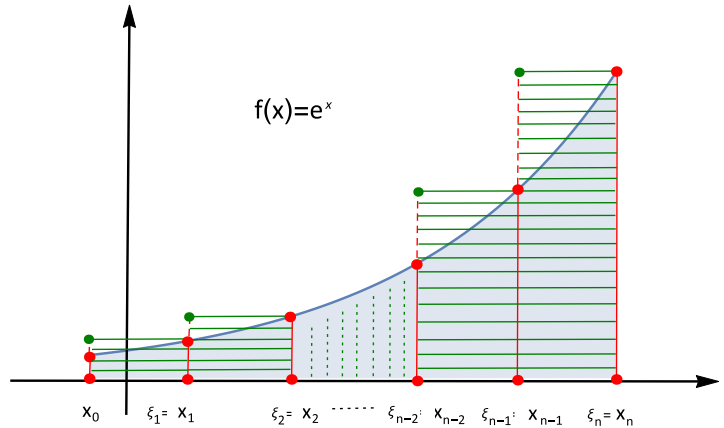
Slika 4. Integral funkcije $y = c$ na segmentu $[a, b]$



Slika 5. Integral funkcije $y = x$ na segmentu $[a, b]$

Sada redom imamo (Slika 6.),

$$\begin{aligned}
 \Sigma(f, P, \Xi) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n e^{a+i h} h \\
 &= h \cdot e^a \sum_{i=1}^n (e^h)^i = h \cdot e^{a+h} \sum_{i=0}^{n-1} (e^h)^i \\
 &= h \cdot e^{a+h} \cdot \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} \\
 &= \frac{h}{e^h - 1} \cdot e^{a+h} \cdot (e^{b-a} - 1)
 \end{aligned}$$



Odakle redom sledi,

Slika 6. Integral funkcije $y = e^x$ na segmentu $[a, b]$

$$\begin{aligned}
 \int_a^b e^x dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h}{e^h - 1} \cdot e^{a+h} \cdot (e^{b-a} - 1) \right) = (e^{b-a} - 1) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} e^{a+h} = (e^{b-a} - 1) \cdot 1 \cdot e^a \\
 &= e^b - e^a.
 \end{aligned}$$

(i4) $f(x) = x^2$. Slično primeru (i2) dobija se $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

(i5) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

5. Svojstva određenog integrala

5.12. Svojstva određenog integrala. Iz definicije određenog integrala, jasno je da su njegova svojstva u uskoj vezi sa osobinama suma i limesa, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 1. Neka su funkcije f i g integrabilne u Rimanovom smislu na $[a, b]$. Tada,

$$(i1) \int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(i2) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(i3) \text{ ako je } f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \text{ tada je } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$$(i4) \text{ ako je } f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \text{ tada je } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Dokaz.

$$(i1) \quad \int \alpha \cdot f(x) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \alpha \cdot f(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \cdot \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \cdot \int f(x) dx.$$

$$(i2) \quad \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \Delta x_i = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(i3) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0.$$

(i4) Primenimo (i3) na funkciju $\phi(x) = f(x) - g(x)$. □

Za integrabilne funkcije važi i sledeća teorema, koja je posledica definicije određenog integrala.

Teorema 2. *Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$ tada je*

$$(i1) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$(i2) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ pri čemu je } c \in (a, b).$$

Dokaz. Neka je data podela (P, Ξ) , gde je $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} = P$ i $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Da bismo dokazali (i1) definišemo $\Delta x'_i = x'_i - x'_{i-1} = x_{n-i} - x_{n-i+1} = -\Delta x_{n-i+1}$, tako da imamo redom,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = - \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=n}^1 f(\xi'_i) \Delta x'_i = - \int_a^b f(x) dx.$$

(i2) Izaberimo da $c = x_k$ bude jedna od deobenih tačaka, što možemo uvek uraditi (ako nije onda je dodamo) i kako $\chi_1(P) \rightarrow 0$ i $\chi_2(P) \rightarrow 0$ kada $\chi(P) \rightarrow 0$ imamo,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\chi(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\chi_1(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\chi_2(P) \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

□

5.13. Teorema o srednjoj vrednosti integrala. U ovoj tački dokazujemo jednu od osnovnih teorema za neodređene integrale.

Teorema. *Neka su $f(x)$ i $\phi(x)$ dve integrabilne funkcije na $[a, b]$ takve da je*

$$(1) \quad m \leq f(x) \leq M,$$

$$(2) \quad \phi(x) \text{ ima stalan znak na } [a, b]^6,$$

⁶ $\phi(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$ ili $\phi(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$.

$$(3) \int_a^b \phi(x) dx \neq 0.$$

Tada postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $m \leq \mu \leq M$ i važi da je $\int_a^b f(x) \cdot \phi(x) dx = \mu \int_a^b \phi(x) dx$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\phi(x) > 0$, tada iz $m \leq f(x) \leq M$ imamo, $m \cdot \phi(x) \leq f(x) \cdot \phi(x) \leq M \cdot \phi(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Teorema 5.12 (i4) sada implicira, $\int_a^b m \cdot \phi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \cdot \phi(x) dx \leq \int_a^b M \cdot \phi(x) dx$ i na osnovu Teorema 5.12 (i2) zaključujemo da je: $m \int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \phi(x) dx \leq M \int_a^b \phi(x) dx$, odakle sledi tvrđenje jer je $\mu = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \phi(x) dx}{\int_a^b \phi(x) dx}$. $\square$

Posledica. Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i $\phi(x)$ kao u prethodnoj teoremi, tada je

$$(i1) \int_a^b \phi(x) f(x) dx = f(\xi) \int_a^b \phi(x) dx, \quad \xi \in [a, b].$$

$$(i2) \text{ ako je još } \phi(x) = 1 \text{ tada je } \mu = f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Dokaz. Kako je $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ onda ona taj segment preslikava na segment $[m, M]$, pa postoji $\xi \in [a, b]$ tako da je $\mu = f(\xi)$, gde je μ iz prethodne teoreme, odakle sledi (i1), dok je (i2) specijalni slučaj od (i1). $\square$

6. Fundamentalna teorema

5.14. Određeni integral i primitivna funkcija. Neka je f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada je dobro definisana funkcija

$$(5.11) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

na intervalu $[a, b]$.

Neka je funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$, tj. neka je $|f(x)| \leq C$ ($C \in \mathbb{R}$) za sve $x \in [a, b]$, tada iz aditivnosti integrala, za $x, x + h \in [a, b]$, sledi:

$$(5.12) \quad |F(x + h) - F(x)| \leq C |h|.$$

Nejednakosti (5.12) implicira neprekidnost funkcije F na $[a, b]$. Ali važi i više,

Lema. Ako je f integrabilna funkcija na $[a, b]$ i ako je f neprekidna u nekoj tački $x \in [a, b]$, tada je funkcija F definisana na $[a, b]$ formulom (5.12) diferencijabilna u tački x , i važi formula $F'(x) = f(x)$.

⁷ Primitimo da je uslov $\int_a^b \phi(x) dx \neq 0$, važan jer bi u suprotnom imali $m \cdot 0 \leq \int_a^b f(x) \cdot \phi(x) dx \leq M \cdot 0$.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} (f(x) + \Delta(t)) dt = \int_x^{x+h} f(x) dt \\ &\quad + \int_x^{x+h} \Delta(t) dt = f(x) h + \alpha(h) h \end{aligned}$$
$$\left| \int_x^{x+h} \Delta(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |\Delta(t)| dt \leq \int_x^{x+h} M(h) dt = M(h) |h|,$$
$$(5.13) \quad F(x+h) - F(x) = f(x)h + \alpha(h)h \quad \text{pri čemu } \alpha(h) \rightarrow 0 \text{ kada } h \rightarrow 0.$$
☐

Teorema. Svaka neprekidna funkcija f na segmentu $[a, b]$ ima na tom segmentu primitivnu funkciju, koja je oblika

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C, \quad \text{gde je } C \text{ neka konstanta.}$$

Teorema. Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ i ako je $F(x)$ njena primitivna funkcija na $[a, b]$ tada je

$$(5.14) \quad \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Neka je data proizvoljna podela $\{a = x_0, x, \dots, x_n = b\} = P$. Posmatrajmo intervale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, tada Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti daje

[illegible]

gde smo tačke $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ izabrali korišćenjem Lagranžove teoreme, dakle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nakon sabiranja formula u (5.15) dobijamo

$$F(x_n) - F(x_0) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\text{i nakon uzimanja limesa sledi: } F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Oznaka koja se koristi: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Primeri 1. Izračunajte sledeće integrale.

$$(i1) \quad \int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} . \quad (i2) \quad \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{-2}^{-1} = \ln |-1| - \ln |-2| = -\ln 2.$$

Primeri 2. Dokažite da je:

$$(i1) \quad \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}, \quad b > a > 0.$$

Primena teoreme o srednjoj vrednosti za integrale na funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ i interval $[a, b]$ prvo daje,

$$\frac{1}{b} \leq f(x) \leq \frac{1}{a} \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{odakle je} \quad \int_a^b \frac{dx}{b} \leq \int_a^b \frac{dx}{x} \leq \int_a^b \frac{dx}{a}, \quad \text{i na kraju}$$

$$\frac{b-a}{b} \leq \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}; \quad \text{nejednakosti su stroge jer je } \int_a^b \frac{dx}{x} = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b).$$

$$(i2) \quad \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}, \quad b > a.$$

Primena teoreme o srednjoj vrednosti za integrale na funkciju $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i interval $[a, b]$, dobijamo,

$$\frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+a^2} \quad \forall x \in (a, b) \quad \text{odakle je nakon integracije}$$

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}; \quad \text{nejednakosti su stroge jer je}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = f(\xi)(b-a) = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a), \quad \xi \in (a, b).$$

7. Osnovne metode integracije određenog integrala

5.16. Smena promenljive u određenom integralu. U ovoj tački videćemo da za izračunavanje određenih integrala možemo primeniti analogne metode koje smo koristili i za izračunavanje neodređenih integrala, što je direktna posledica fundamentalne veze između određenog i neodređenog integrala date Njutn-Lajbnicovom formulom.

Teorema. Neka je $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija, neprekidne funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ i neka je $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ klase $\mathcal{C}^1[\alpha, \beta]$ takva da

(i1) ϕ' ne menja znak na $[\alpha, \beta]$ ⁸ pri čemu je $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$ ako je $\phi'(t) > 0$ (ili $a = \phi(\beta)$, $b = \phi(\alpha)$ ako je $\phi'(t) < 0$).

(i2) funkcija $f(\phi(t)) \phi'(t)$ je integrabilna na $[\alpha, \beta]$.

Tada je

$$(5.16) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Dokaz. Neka je F primitivna funkcija od f na $[a, b]$ ⁹, i neka je $F(\phi(t)) = \Phi(t)$. Primetimo da je $\Phi(t)$ primitivna funkcija od $f(\phi(t)) \phi'(t)$, jer je

$$\Phi'(t) = (F(\phi(t)))' = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t).$$

Koristeći sada Njutn-Lajbnicovu formulu s jedne strane imamo $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, dok je sa druge strane

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a), \quad \text{odakle}$$

$$\text{sledi} \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt.$$

□

Primeri. Izračunajmo sledeće integrale ($n, m \in \mathbb{N}$),

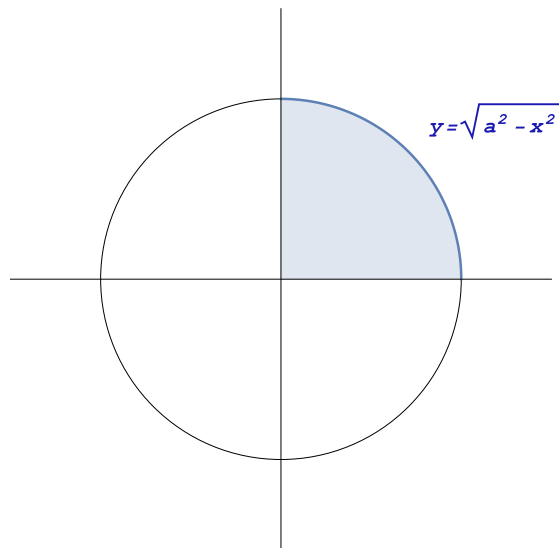
$$(i1) \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{lll} x = a \sin t & 0 \rightarrow 0 & \phi(t) = a \sin t \text{ je} \\ dx = a \cos t dt & a \rightarrow \pi/2 & \text{monotona na } [0, \pi/2] \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^{\phi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \int_0^{\phi/2} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} a \cos t dt = a^2 \int_0^{\phi/2} \cos^2 t dt$$

$$= a^2 \int_0^{\phi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \right)$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}(\sin \pi - \sin 0) \right) = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Geometrijski smisao. Budući da iz formule $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, sledi da je $x^2 + y^2 = a^2$. Zaključujemo da naša polazna funkcija predstavlja jednačinu kruga i ustvari tražimo površinu 1/4 tog kruga, jer je to geometrijski lik (vidi Sliku 7.) koji je ograničen pravama $y = 0$, $x = 0$, $x = a$ i grafikom krive funkcije $f(x)$.



Slika 7. Geometrijski smisao

⁸ Drugim rečima funkcija ϕ je monotona na $[\alpha, \beta]$.

⁹ $F'(x) = f(x)$, $\forall x$.

$$(i2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x - \sin(m-n)x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x \, dx \\ - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{n+m} \cos(n+m)x + \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

ako je $n - m \neq 0$, (jer je $\cos$ parna funkcija). Rezultat je tačan i ako je $n - m = 0$, proverite!

$$(i3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

$$(i4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

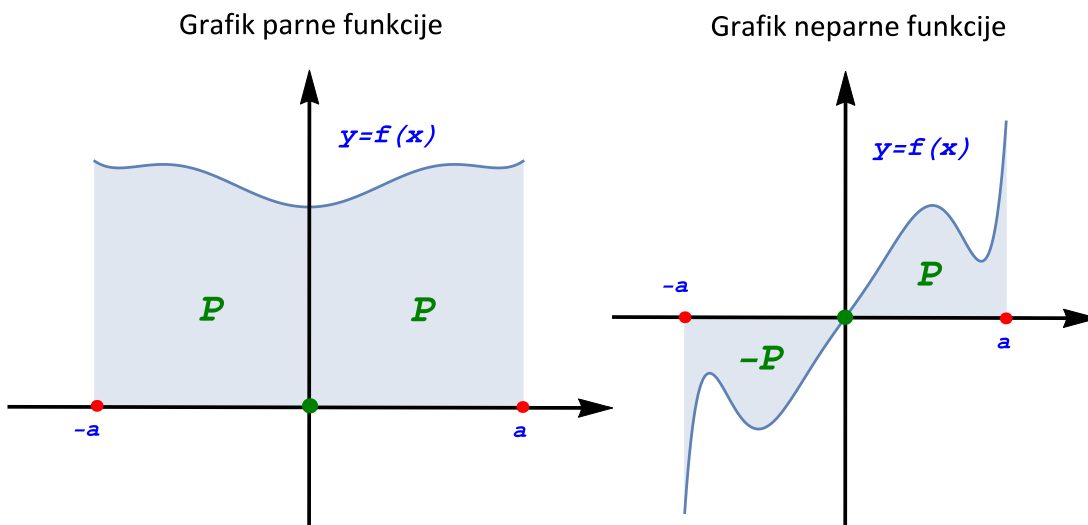
Posledica. Neka je $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$ integrabilna funkcija. Tada

$$(i1) \text{ ako je } f \text{ parna važi } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

$$(i2) \text{ ako je } f \text{ neparna važi } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

Ako je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, neprekidna i periodična funkcija sa periodom ω . Tada za svako $a \in \mathbb{R}$, važi

$$\int_a^{a+\omega} f(x) \, dx = \int_0^{\omega} f(x) \, dx.$$



Slika 8. Parne i neparne funkcije

Dokaz. (i1) i (i2) su jasni iz geometrijskog smisla određenog integrala kao površine omeđene pravama $y = 0$, $x = 0$, $x = a$ i grafikom krive $y = f(x)$.

Primitimo, iz definicije neodređenog integrala, da ta površina može biti i negativna. U slučaju (i1) figure, zbog parnosti funkcije f , čiju površinu tražimo na $[-a, 0]$ i $[0, a]$ su podudarne (Slika 8.) i sa iste strane x -ose pa je površina njihove unije jednaka dvostrukoj površini figure na $[0, a]$. Za (i2) važe iste opservacije osim što su te dve figure, zbog neparnosti funkcije $f(x)$, podudarne i njihova unija je centralno simetrična s obzirom na koordinatni početak (Slika 8.), ali sa različitih strana x -ose, pa je zbir njihovih površina 0.

U to se možemo uveriti i formalno, ako uvedemo smenu: $x = -t$, $dx = -dt$ na intervalu $[-a, 0]$. Pa imamo,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \begin{cases} - \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt, & f \text{ parna} \\ - \int_a^0 (-) f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt, & f \text{ neparna} \end{cases} \quad \text{odakle je}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^a f(t) dt, & f \text{ parna,} \\ 0, & f \text{ neparna,} \end{cases}$$

Ako je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, neprekidna i periodična funkcija sa periodom ω . Tada prvo imamo,

$$\int_{\omega}^{a+\omega} f(x) dx = \begin{cases} t = x - \omega & \phi(t) = t + \omega & x = a + \omega \rightarrow t = a, \\ dt = dx & \text{je monotona} & x = \omega \rightarrow t = 0 \end{cases} = \int_0^a f(t + \omega) dt = \int_0^a f(t) dt$$

a zatim

$$\int_a^{a+\omega} f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx + \int_{\omega}^{a+\omega} f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^{\omega} f(x) dx$$

i dokaz je gotov. □

5.17. Parcijalna integracija određenih integrala. Sada koristeći osnovnu vezu između određenog i neodređenog integrala datu u Njtn-Lajbnicovoj formuli i metodu parcijalne integracije za neodređene integrale dobijamo njen analogon za određene integrale. Preciznije važi sledeća teorema.

Teorema. Neka su f i g funkcije klase $\mathcal{C}^1$ na (a, b) . Tada važi formula

$$\int_a^b f(x) g(x)' dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

Dokaz. Analogno dokazu za neodređene integrale, prvo iz Lajbnicove formule,

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x),$$

integracijom obe strane uz korišćenje Njtn-Lajbnicove formule nalazimo

$$f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b = \int_a^b (f(x) g(x))' dx = \int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx,$$

odakle sledi formula. □

Primer. Izračunajmo sledeći integral,

$$\begin{aligned} \text{(i1)} \quad \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{ll} f = x^2 & df = 2x dx \\ dg = \sin x dx & g = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} f = x & df = dx \\ dg = \cos x dx & g = \sin x \end{array} \right\} = 2 \left(x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} \right) = \pi - 2. \end{aligned}$$

5.18. Određeni integral i Tejlorova formula. Neka je funkcija f n -puta diferencijabilna u okolini tačke a . Koristeći sada metod parcijalne integracije i Njutn-Lajbnicovu formulu možemo izvesti Tejlorovu formulu sa integralnim ostatkom

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t) dt = - \int_a^x f'(t) (x-t)' dt = -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t) dt = f'(a)(x-a) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_a^x f''(t)((x-t)^2)' dt = f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} f''(t)(x-a)^2 \Big|_a^x + \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt \\ &= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} \int_a^x f'''(t)((x-t)^3)' dt = \dots\dots\dots \\ &= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a; x), \end{aligned}$$

gde je

$$(5.17) \quad r_{n-1}(a; x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

Time smo pokazali sledeće tvrđenje.

Propozicija. Neka funkcija $f(t)$ ima na segmentu $[a, x]$ neprekidne izvode do reda n , tada važi Tejlorova formula

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a; x),$$

gde je ostatak dat formulom (5.17).

8. Nesvojstveni integral

5.19. Nesvojstveni integral I. U ovoj tački ćemo malo proširiti pojam Rimanovg integrala na slučaj kada neka od granica nije konačna ili ako funkcija f nije definisana u nekoj tački segmenta po kojem integralimo funkciju.

Neka je funkcija f definisana na intervalu $[a, b)$ (pri čemu b može biti i $+\infty$) i integrabilna na svakom segmentu $[a, b'] \subseteq [a, b)$. Tada veličinu

$$(5.18) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^{b-0} f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_a^{b'} f(x) dx,$$

ako limes sa desne strane jednakosti postoji, nazivamo nesvojstvenim integralom Rimana ili samo nesvojstvenim integralom funkcije f na intervalu $[a, b)$. Slično definišemo i nesvojstveni integral funkcije f na intervalu $(a, b]$ (pri čemu a može biti i $-\infty$), koja je integrabilna na svakom segmentu $[a', b] \subseteq (a, b]$, formulom

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+0}^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a+0} \int_{a'}^b f(x) dx.$$

Primetimo da ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$ tada se njen integral na $[a, b]$ podudara sa njenim nesvojstvenim integralom na $[a, b]$.

Primeri. Izračunajmo sledeće integrale,

$$(i1) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma}$$

kako je $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_1^b & \text{za } \gamma \neq 1. \\ \ln x \Big|_1^b & \text{za } \gamma = 1. \end{cases}$ tada limes $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\gamma}$ postoji samo za $\gamma > 1$ jer

$$\text{imamo } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\gamma} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\gamma} - 1 \right) = \frac{1}{\gamma-1},$$

a za ostale vrednosti γ polazni integral nije definisan.

$$(i2) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma}$$

kako je za $a \in (0, 1]$: $\int_a^1 \frac{dx}{x^\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_a^1 & \text{za } \gamma \neq 1. \\ \ln x \Big|_a^1 & \text{za } \gamma = 1. \end{cases}$ tada limes $\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^1 \frac{dx}{x^\gamma}$ postoji samo za

$$\gamma < 1, \text{ jer imamo, } \int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_a^1 = \frac{1}{1-\gamma} \left(1 - \lim_{a \rightarrow +0} a^{1-\gamma} \right) = \frac{1}{1-\gamma}.$$

Za ostale vrednosti γ polazni integral nije definisan.

$$(i3) \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(e^x \Big|_a^0 \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

5.20. Svojstva nesvojstvenog integrala. Nesvojstveni integral definisan u prethodnoj tački ima ista algebarska svojstva kao i Rimanov integral, a koja su sadržana u **Teoremi 5.12** uz neophodne modifikacije prilagođene definiciji nesvojstvenog integrala. Takav rezultat se mogao očekivati jer je jedina razlika između svojstvenog i nesvojstvenog integrala u traženju određenog limesa (vidi prethodnu tačku), a sam limes funkcije ima ista svojstva kao i integral: aditivnost, homogenost, dobro se ponaša prema nejednakostima.

Štaviše, uz odgovarajuće prirodne modifikacije prilagođene definiciji nesvojstvenog integrala vidi se da važe teoreme iz **5.16** o smeni promenljive u nesvojstvenom integralu i iz **5.17** o parcijalnoj integraciji nesvojstvenog integrala.

5.21. Nesvojstveni integrali II. U prethodnoj tački bavili smo se nesvojstvenim integralima kod kojih je problem bio u jednom od krajeva intervala, tj. u kojem je podintegralna funkcija bila neograničena ili nije bila definisana. Sada ćemo našu definiciju proširiti na slučaj kada postoji problem na oba kraja intervala i na slučaj ako podintegralna funkcija nije definisana u nekoj tački c intervala integracije $[\varpi_1, \varpi_2]$ ili u okolini takve tačke je neograničena.

Dakle, posmatrajmo funkciju $f : [\varpi_1, \varpi_2] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$ i f je integrabilna na segmentima $[a, a'] \subseteq [a, c)$ i $[c', b] \subseteq (c, b]$. Tada pišemo

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx &= \int_{\varpi_1}^{c-0} f(x) dx + \int_{c+0}^{\varpi_2} f(x) dx \\ &= \lim_{c' \rightarrow c-0} \int_{\varpi_1}^{c'} f(x) dx + \lim_{c'' \rightarrow c+0} \int_{c''}^{\varpi_2} f(x) dx, \end{aligned}$$

ako svaki od integrala sa desne strane jednakosti (5.19) postoji. Ako barem jedan od dva integrala ne postoji reći ćemo da nesvojstveni integral divergira.

Primer. Izračunajmo integral,

$$(i1) \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-1}^0 + \arcsin x \Big|_0^1 = \pi.$$

Sledeći primer pokazuje, da nekada postoji $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$ takav da barem jedan od integrala sa desne strane jednakosti (5.19) divergira. Kako za svako γ barem jedan od integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\gamma} dx, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\gamma} dx,$$

ne postoji (ili je $+\infty$), kažemo da integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\gamma} dx$ divergira za svako γ .

Glavna vrednost integrala. Posmatrajmo sada malo detaljnije integral (5.19), tada njegovu desnu stranu možemo malo drugačije zapisati

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx &= \lim_{c' \rightarrow c-0} \int_{\varpi_1}^{c'} f(x) dx + \lim_{c'' \rightarrow c+0} \int_{c''}^{\varpi_2} f(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{c+\mu}^{\varpi_2} f(x) dx. \end{aligned}$$

Iz poslednjeg izraza možemo zaključiti da egzistencija limesa zavisi od odnosa $\varepsilon > 0$ i $\mu > 0$, pa limes ne mora postojati, kao što pokazuje sledeći primer.

Primer. Izračunajmo integral,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mu}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon - \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \mu.$$

Iz poslednje formule vidimo da limes ne postoji jer su ε i μ proizvoljni. Ako uzmemo npr. da je $\varepsilon = \alpha \mu$, za neki $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vidimo da se poslednja relacija svodi na

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon - \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \mu = \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \alpha \mu - \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \mu = \lim_{\mu \rightarrow 0} \ln \frac{\alpha \mu}{\mu} = \ln \alpha.$$

Kako je prirodno uzeti da je $\varepsilon = \mu$, za ovaj izbor definišemo glavnu vrednost¹⁰ nesvojstvenog integrala.

Dakle, ako za funkciju $f : [\varpi_1, \varpi_2] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je $c \in (\varpi_1, \varpi_2)$, integral $\int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx$ divergira, i neka za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ postoje integrali $\int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x) dx$ i $\int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x) dx$. Tada ako postoji

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x) dx \right)$$

nazivamo ga **glavnom vrednosti integrala** $\int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx$, i pišemo,

$$(5.21) \quad \text{v.p.} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varpi_1}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^{\varpi_2} f(x) dx \right).$$

Primeri. Sada u smislu ove definicije imamo sledeće primere.

$$(i1) \quad \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

$$(i2) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\int_{-M}^0 x dx + \int_0^M x dx \right) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{M^2}{2} - \frac{M^2}{2} \right) = 0.$$

9. Primene određenog integrala

5.22. Primene određenog integrala. Pojam Rimanovog integrala uveden je tako što je tražena metoda za računanje površine određene klase ravanskih figura, tj. onih ravanskih figura koje su preseki ili se na njih mogu svesti i čije su stranice grafici nekih 'dovoljno dobrih' funkcija. Time je već određena osnovna primena određenog integrala kao metoda za računanje površina. Navedimo ovde još neke primene.

¹⁰ glavna vrednost od francuskog *valeur principal*.

Primer. Odrediti površinu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, vidi **Primer (i1)** u **5.16**.

Primetimo da y možemo izraziti kao funkciju od x , kao $y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ na intervalu $[0, a]$, tako da će $\int_0^a f(x) dx$ predstavljati četvrtinu površine polazne elipse. Dakle površina elipse P biće jednaka:

$$P = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \{\text{vidi Primer (i1) u 5.16.}\} = 4 \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 \pi}{4} = a b \pi.$$

Dužina luka krive. Neka je dato preslikavanje segmenta $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ formulom $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, za $t \in [a, b]$. Skup $\gamma([a, b])$ zove se **put**. Ako je $A = \gamma(a)$ i $B = \gamma(b)$, kažemo da put γ spaja tačke A i B . Tačka A zove se početak puta, a tačka B kraj puta. Put je zatvoren ako je $A = B$. Ako je preslikavanje γ bijekcija za put kažemo da je **prost put** ili da je **parametrizovana kriva**. Put je klase glatkosti k ako su takve funkcije $x(t), y(t)$ i $z(t)$, i to zapisujemo $\gamma \in \mathcal{C}^k[a, b]$. Ako je put prost i klase barem $\mathcal{C}^1$ ili je po delovima takav¹¹, možemo na put gledati kao na krivu u prostoru po kojoj se kretala materijalna tačka od trenutka $t = a$ do trenutka $t = b$. Tako da možemo govoriti o dužini, $l[t_1, t_2]$, puta kojeg je ona prešla od trenutka $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Kako je za neki mali vremenski interval Δt tačka prešla put od neke tačke X do tačke $X + \Delta x$, možemo pisati $\Delta x \approx |v(t)| \Delta t$, gde je $|v(t)|$ brzina tačke u trenutku t . Kako je

$$|v(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)},$$

prelaskom na limes kada $\Delta(t) \rightarrow 0$ dobijamo da je dužina luka krive od trenutka $t = a$ do $t = b$ data formulom

$$(5.22) \quad l[a, b] = \int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Primetimo da analogon prethodne formule (5.22) važi u slučaju kada posmatramo puteve i krive u bilo kojoj dimenziji, pa tako i u dimenziji 2. Ako je kriva data kao grafik krive $y = f(x)$ tada za parametar t možemo uzeti x i dužina luka krive je

$$l[a, b] = \int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \{t = x, y = f(x)\} \text{ odakle je } l[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Primer. Odrediti obim elipse date svojom kanonskom jednačinom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Uzmimo standardnu parametrizaciju elipse $x = a \sin t$ i $y = b \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, tada formula (5.23) postaje

$$\begin{aligned} l_{el} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a \cos t)^2 + (-b \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt. \end{aligned} \quad \text{Primetimo da je } e \text{ ekscentricitet elipse, jer je } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

¹¹tj. možemo ga razbiti u konačan broj segmenata na kojem je γ diferencijabilna funkcija i njen izvod je neprekidna funkcija.

Integral

$$E(e, t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$$

ne može se izraziti preko elementarnih funkcija i kako se javlja prilikom izračunavanja dužine elipse naziva se eliptičkim integralom druge vrste. Vrednost koju on prima za $t = \pi/2$ zavisi samo od ekscentriciteta elipse i tada koristimo oznaku $E(e) = E(e, \pi/2)$. Tako smo dobili da je obim elipse jednak $l_{ep} = 4a E(e)$.

Zapremina rotacionih tela. Neka je dat grafik neke funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ i zamislimo da grafik rotira oko x ose, tako će nastati jedno rotaciono telo, koje možemo shvatiti kao da je sastavljeno od niza malih cilindara¹² visine Δx i čija je površina baze, površina kruga poluprečnika $f(x)$. Tako da je približna zapremina ovog malog cilindra $V \approx f(x)^2 \pi \Delta x$. Prelazeći na limes kada $\Delta x \rightarrow 0$ i zatim integraleći po celom segmentu $[a, b]$ dobijamo da je zapremina rotacionog tela jednaka

$$(5.23) \quad V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Primer. Odrediti zapreminu elipsoida koji nastaje rotacijom grafika elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, koji se nalazi iznad x -ose ($y \geq 0$).

Primitimo da y možemo izraziti kao funkciju od x , kao $y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ na intervalu $[-a, a]$, tako da primena formule (5.23) na ovaj primer daje

$$\begin{aligned} V_{el} &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{b^2}{a^2} \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{a^2} \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{b^2}{a^2} \pi \left(2a^3 - 2 \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4\pi b^2 a}{3}. \end{aligned}$$

Odakle dobijamo u slučaju lopte, $a = b$, poluprečnika a da je njena zapremina jednaka $\frac{4\pi a^3}{3}$.

¹²radi se zapravo o cilindru čije baze nisu jednake, ali za malo Δx , mi ga aproksimiramo pravim cilindrom.

Linearna algebra

U ovoj glavi uvodimo operativan pojam vektora, vektorskog prostora i dajemo njihove najjednostavnije primene u analitičkoj geometriji. Uvođenje vektora i njihova primena dovelo je do povezivanja starih matematičkih disciplina geometrije i algebre. Jedna od tekovina uvođenja vektora su i koordinatni sistemi i koordinate. Danas je teško zamisliti i jednu naučnu disciplinu koja se bavi prirodnim naukama u kojoj se ne pojavljuju koordinate.

Detaljno uvođenje vektora može se naći u Dodatku 1, ove knjige, a ono je uglavnom zasnovano knjizi N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić: *Analitička geometrija*, MF, 2003.

1. Vektori i vektorski prostor

6.1. Vektorski prostor. Definicija. *Realni vektorski prostor je uređena četvorka $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ = V , gde je $+: V \times V \longrightarrow V$ i $\cdot: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, ako $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in V$ važi:*

(VP1) $(V, +)$ je Abelova grupa tj. ako su ispunjene aksiome,

(AG1) $u + (v + w) = (u + v) + w$,

(AG2) postoji element $\mathbf{0} \in V$ takav da je $\mathbf{0} + u = u$,

(AG3) za svaki $u \in V$ postoji jedinstveni element $-u \in V$ takav da je $u + (-u) = \mathbf{0}$,

(AG4) $u + v = v + u$.

(VP2) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \beta) u$, (kvaziasocijativnost),

(VP3) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$, (distributivnost),

(VP4) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, (distributivnost),

(VP5) $1 \cdot u = u$, (netrivijalnost)

Uobičajeno ćemo izostavljati znak za množenje vektora sa skalarom $\cdot$. Elemente skupa V nazivamo **vektorima**, a elemente skupa $\mathbb{R}$ skalarima.¹

PRIMEDBA. Napomenimo da u čitavoj ovoj glavi umesto polja realnih brojeva $\mathbb{R}$ može stajati bilo koje polje $\mathbb{F}$ i sva tvrđenja i koncepti ostaju isti.

Teorema. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, x neki vektor i α neki skalar. Tada važi:*

¹ Napomenimo da polje $\mathbb{R}$ u gornjoj definiciji možemo zameniti bilo kojim drugim poljem $\mathbb{F}$ i tada kažemo da je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

$$(i1) \quad \alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x),$$

$$(i2) \quad 0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

$$(i3) \quad \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

Ako je $\alpha \cdot x = \mathbf{0}$ tada je ili $\alpha = 0$ ili $x = \mathbf{0}$.

Dokaz. (i1) Korišćenjem aksiome (VP2) kao i komutativnosti množenja skalara imamo redom:

$$\alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot ((-1) \cdot x) = (\alpha(-1)) \cdot x = ((-1)\alpha) \cdot x = \begin{cases} (-1)(\alpha \cdot x) = -(\alpha \cdot x). \\ ((-1)\alpha) \cdot x = (-\alpha) \cdot x. \end{cases}$$

Sada iz (i1) lako slede (i2) i (i3):

$$0 \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = \alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot x + (-\alpha \cdot x) = \mathbf{0}, \quad i$$

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot x + ((-\alpha) \cdot x) = \alpha \cdot x + (-\alpha \cdot x) = \mathbf{0}.$$

Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$, tada u polju $\mathbb{R}$ postoji inverz α^{-1} tako da redom imamo

$$x = 1 \cdot x = ((\alpha^{-1})\alpha) \cdot x = (\alpha^{-1})(\alpha \cdot x) = (\alpha^{-1}) \cdot \mathbf{0} \stackrel{(i3)}{=} \mathbf{0}.$$

Dakle, ako $\alpha \neq 0$ tada mora biti $x = \mathbf{0}$. □

6.2. Primeri I.

(i1) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, je vektorski prostor nad samim sobom. ²

(i2) **Neki računski primeri.** U ovoj tački malo više pažnje posvećujemo računima u vektorskim prostorima $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$, uglavnom kada je $n = 3$.

Neka su $x = (2, -1, 3), y = (-3, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$. Tada je

$$x + y = (2, -1, 3) + (-3, 4, 2) = (2 + (-3), -1 + 4, 3 + 2) = (-1, 3, 5),$$

$$5 \cdot x = 5 \cdot (2, -1, 3) = (5 \cdot 2, 5 \cdot (-1), 5 \cdot 3) = (10, -5, 15),$$

$$-x = (-1) \cdot x = (-1) \cdot (2, -1, 3) = (-1 \cdot 2, -1 \cdot (-1), -1 \cdot 3) = (-2, 1, -3)$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot x - 3 \cdot y &= (10, -5, 15) - (3 \cdot (-3), 3 \cdot 4, 3 \cdot 2) = (10, -5, 15) - (-9, 12, 6) \\ &= (19, -17, 9). \end{aligned}$$

Primetimo, koristeći ovaj primer, da nije teško proveriti da za $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$. $\mathbb{R}$ važe sve aksiome vektorskog prostora (VP1)-(VP5) iz 1.1 Definicija.

Da bismo se u to uverili uvedimo prvo kraće oznake $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_j)$, u kojima se jasnije vidi da se operacije sabiranja i množenja vektora sa skalarom svodi na sabiranje i množenje u $\mathbb{R}$ na svakoj od komponenti. Preciznije,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_j) + (y_j) = (x_j + y_j) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \cdot (x_j) = (\lambda \cdot x_j) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

Dakle, uz ove oznake asocijativnost sabiranja vektora i aksioma (VP4) lako

² $+, \cdot$ su standardo sabiranje i množenje realnih brojeva.

slede,

$$\begin{aligned}
 x + (y + z) &= (x_j) + ((y_j) + (z_j)) = (x_j) + (y_j + z_j) = (x_j + (y_j + z_j)) \stackrel{(\text{asoc. u } \mathbb{R})}{=} \\
 &= ((x_j + y_j) + z_j) = ((x_j) + (y_j)) + (z_j) = (x + y) + z, \\
 \alpha \cdot (x + y) &= \alpha \cdot ((x_j) + (y_j)) = \alpha \cdot (x_j + y_j) = (\alpha \cdot (x_j + y_j)) \stackrel{(\text{distrib. u } \mathbb{R})}{=} \\
 &= (\alpha \cdot x_j + \alpha \cdot y_j) = (\alpha \cdot x_j) + (\alpha \cdot y_j) = \alpha \cdot (x_j) + \alpha \cdot (y_j) = \\
 &= \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.
 \end{aligned}$$

Jasno, neutralni element za sabiranje vektora je nula vektor $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Nula vektor je istaknuti vektor u vektorskom prostoru jer je jedini vektor koji zadovoljava uslov: $\mathbf{0} + x = x + \mathbf{0} = x$.

Preostale aksiome vektorskog prostora: (postojanje neutralnog elementa, postojanje inverznog elementa, komutativnost vektorskog sabiranja, kao i aksiome (VP2), (VP3) i (VP5)), proveravaju se na sličan način, i ostavljamo ih za vežbu čitaocu.

(i3) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor gde su operacije sabiranja i množenja sa skalarom date sa:

$$\begin{aligned}
 \text{(s)} \quad u + v &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n), \\
 \text{(m)} \quad \lambda \cdot u &= \lambda \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n).
 \end{aligned}$$

(i4) Polinomi. Skup $(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$ je realni vektorski prostor pri čemu je $+$ standardno sabiranje polinoma, a $\cdot$ je množenje polinoma sa nekim skalarom.

(i5) Funkcije. Ako sa $\mathbb{R}^S = \{f \mid f : S \longrightarrow \mathbb{R}\}$ označimo skup svih (realnih) funkcija sa nekog nepraznog skupa $S \subset \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{R}^S$ realni vektorski prostor uz $(\forall f, g \in \mathbb{R}^S, \forall \lambda, x \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 \text{(s)} \quad (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\
 \text{(m)} \quad (\lambda \cdot f)(x) &= \lambda \cdot f(x).
 \end{aligned}$$

6.3. Primeri II: Matrice. Neka je

$$\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) = A \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\},$$

skup svih matrica tipa $m \times n$. Skup $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})^3$ je realni vektorski prostor uz iste operacije kao i $\mathbb{R}^n$ (vidi prethodni primer (i2)). Preciznije, $\forall A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ i $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{(s)} \quad A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),$$

³ Ako je $m = n$ onda koristim oznaku $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

$$(m) \quad \lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Dokaz da je $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$, uz upravo definisano sabiranje matrica i množenje matrica sa skalarom, vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ je isti kao i u slučaju vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ uz oznake uvedene u **Primeru 6.2**. Kako mi radimo nad poljem $\mathbb{R}$ iz upravo uvedenih oznaka za skup matrica radi kraćeg zapisa ispuštamo oznaku za polje i pišemo $\mathbb{M}_{mn}$ umesto $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

Množenje matrica. Posmatrajmo skupove realnih matrica $\mathbb{M}_{mn}$ i $\mathbb{M}_{nk}$ tipova $m \times n$ i $n \times k$, tada definišemo množenje matrica kao preslikavanje $\cdot : \mathbb{M}_{mn} \times \mathbb{M}_{nk} \longrightarrow \mathbb{M}_{mk}$ formulom: za date matrice $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_{mn}$ i $\mathcal{B} = (\beta_{ij}) \in \mathbb{M}_{nk}$,

$$(6.1) \quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} = (\gamma_{ij}), \quad \text{gdje je} \quad \gamma_{ij} = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \beta_{lj} \quad \text{ili detaljnije}$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (\alpha_{ij}) \cdot (\beta_{ij}) = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n \alpha_{1l} \beta_{l1} & \sum_{l=1}^n \alpha_{1l} \beta_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^n \alpha_{1l} \beta_{lk} \\ \sum_{l=1}^n \alpha_{2l} \beta_{l1} & \sum_{l=1}^n \alpha_{2l} \beta_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^n \alpha_{2l} \beta_{lk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^n \alpha_{ml} \beta_{l1} & \sum_{l=1}^n \alpha_{ml} \beta_{l2} & \dots & \sum_{l=1}^n \alpha_{ml} \beta_{lk} \end{bmatrix}$$

Primer 1. Izračunajmo proizvod matrice $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ i matrice $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Kako je matrica $\mathcal{A}$ tipa 2×2 , a matrica $\mathcal{B}$ tipa 2×3 proizvod postoji i jednak je matrici $\mathcal{C}$ tipa 2×3 ,

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 5 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) & 1 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 - 2 \cdot 0 & 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 14 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Osnovna osobina množenja matrica je njena **asocijativnost**, kad god svi proizvodi imaju smisla.

Propozicija 1. Neka su date tri proizvoljne matrice $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) = ((\mathcal{A})_{ij}) \in \mathbb{M}_{mn}$, $\mathcal{B} = (\beta_{ij}) = ((\mathcal{B})_{ij}) \in \mathbb{M}_{nk}$ i $\mathcal{C} = (\gamma_{ij}) = ((\mathcal{C})_{ij}) \in \mathbb{M}_{kl}$. Tada važi,

$$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}).$$

Dokaz. Sada računamo,

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C})_{ij} &= \sum_p (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})_{ip} (\mathcal{C})_{pj} = \sum_p \left(\sum_s \alpha_{is} \beta_{sp} \right) \gamma_{pj} = \sum_{p,s} \alpha_{is} \beta_{sp} \gamma_{pj} = \sum_s \alpha_{is} \left(\sum_p \beta_{sp} \gamma_{pj} \right) \\ &= \left(\sum_s \alpha_{is} \left(\sum_p \beta_{sp} \gamma_{pj} \right) \right) = \sum_s (\mathcal{A})_{is} (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C})_{sj} = (\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}))_{ij} \end{aligned}$$

Kako prethodna formula važi za sve $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, l$, sledi tvrđenje. □

Primedba 1. Prvo, primetimo da vektore, tj. elemente skupa $\mathbb{R}^n$ možemo smatrati matricama tipa $n \times 1$ ili $1 \times n$. Tako da formula (6.1) omogućava sledeću interpretaciju matrice iz $\mathbb{M}_{mn}$ kao preslikavanja, $\mathbb{M}_{mn} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Za $\mathcal{A} = (a_{ij})$ i $x = (x_i)$ imamo,

$$(6.2) \quad \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}x = (\alpha_{ij})(x_j) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n \alpha_{1l} x_l \\ \sum_{l=1}^n \alpha_{2l} x_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n \alpha_{ml} x_l \end{bmatrix}$$

Zbog prehodne interpretacije matrica kao preslikavanja, vektore ćemo zapisivati u kolone, jer je to u skladu sa uobičajenim oznakama za funkciju $(\mathcal{A}(x))$ ⁴.

Primedba 2. U glavi posvećenoj linearnim operatorima videćemo dublji smisao formule (6.1) i kraći dokaz asocijativnosti množenja matrica.

Transponovanje matrica. Primetimo da svakoj matrici iz skupa $\mathbb{M}_{mn}$ možemo na očigledan način dodeliti matricu iz $\mathbb{M}_{nm}$ tako što zamenimo ulogu vrsta i kolona polazne matrice, tj. vrste (kolone) polazne matrice postaju kolone (vrste) nove. Ovo preslikavanje zove se **transponovanje matrica**, koje obeležavamo sa $^{\tau}$.

Preciznije, $^{\tau} : \mathbb{M}_{mn} \longrightarrow \mathbb{M}_{nm}$, tj. **transponat** (ili **transponovana matrica**) matrice $\mathcal{A} = [a^1, a^2, \dots, a^n] = [a_1, a_2, \dots, a_m] \in \mathbb{M}_{mn}$, je matrica $\mathcal{A}^{\tau} = [b^1, b^2, \dots, b^m] = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in \mathbb{M}_{nm}$, takva da je $b^i = a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ i $b_j = a^j$, $j = 1, 2, \dots, n$, gde smo sa a^i obeležili i -tu vrstu matrice $\mathcal{A}$, a sa a_j j -tu kolonu matrice $\mathcal{A}$.

Za transponovanje koristimo i oznaku: za matricu $\mathcal{A} = (a_{ij})$ je $\mathcal{A}^{\tau} = (a_{ji})$.

Primer 2. Transponat matrice $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ je matrica $\mathcal{A}^{\tau} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Propozicija 2. *Transponovanje matrica ima sledeća svojstva za sve $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{M}_{mn}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$,*

$$\begin{aligned} (i1) \quad & ((\mathcal{A})^{\tau})^{\tau} = \mathcal{A}, & (i2) \quad & (\lambda \mathcal{A})^{\tau} = \lambda \mathcal{A}^{\tau}, \\ (i3) \quad & (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\tau} = \mathcal{A}^{\tau} + \mathcal{B}^{\tau}, & (i4) \quad & (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^{\tau} = \mathcal{A}^{\tau} \cdot \mathcal{B}^{\tau}. \end{aligned}$$

Dokaz. (i1), (i2) i (i3) direktno iz odgovarajućih definicija sledi da operacije množenje matrice sa skalarom i transponovanje odnosno sabiranje matrica i transponovanje komutiraju. Zato pokažimo (i4). Neka su $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{mn}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_{nk}$

$$((\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^{\tau})_{ij} = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})_{ji} = \sum_{l=1}^n (\mathcal{A})_{jl} \cdot (\mathcal{B})_{li} = \sum_{l=1}^n (\mathcal{A}^{\tau})_{lj} \cdot (\mathcal{B}^{\tau})_{il} = \sum_{l=1}^n (\mathcal{B}^{\tau})_{il} \cdot (\mathcal{A}^{\tau})_{lj} = (\mathcal{B}^{\tau} \cdot \mathcal{A}^{\tau})_{ij}.$$

Kako ovo važi za sve $i = 1, 2, \dots, m$ i $j = 1, 2, \dots, k$ sledi tražena jednakost. $\square$

⁴ Potpuno je legitimno prvo pisati vektor (ali tada kao vrstu), a zatim matricu, mada u savremenijoj literaturi koriste se obično oznake koje i mi koristimo.

Algebra matrica $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. U prethodnoj tački videli smo da je množenje matrica definisano samo u slučaju kada prvi faktor u proizvodu ima kolona koliko drugi faktor ima vrsta. Vidimo da taj problem nemamo ako su matrice kvadratne, tj. ako je $m = n$ i tada koristimo kraću oznaku $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

Kao što je $\mathcal{O}$ matrica istaknuti element u Abelovoj grupi $(\mathbb{M}_n, +)$, ispostavlja se da matrica

$$\mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_{ii} = 1, & i = 1, \dots, n, \\ \alpha_{ij} = 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

ima isto svojstvo, neutralnog elementa za množenje matrica, zbog čega je nazivamo **jediničnom matricom**.

Pre nego što proverimo da je matrica $\mathbb{I}_n$ zaista neutralni element za množenje matrica, primetimo da su vrste i kolone matrice $\mathbb{I}_n$ zapravo vektori kanonske baze (e). Takođe, koristeći formulu (6.2) lako se vidi da je $\mathbb{I}_n x = x$, za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Kako proizvoljnu matricu $\mathcal{A}$ možemo posmatrati kao n kolona (vektora) dopisanih jedna pored druge, i kako pri množenju matrica $\mathbb{I}_n$ i $\mathcal{A}$ prvo matrica $\mathbb{I}_n$ deluje na prvu kolonu matrice $\mathcal{A}$, koju ne menja, zatim na drugu koju takođe ne menja, ..., tako da kada matrica $\mathbb{I}_n$ deluje na poslednju kolonu matrice $\mathcal{A}$ ni nju neće promeniti. Drugim rečima prilikom množenja matrice $\mathcal{A}$ sa matricom $\mathbb{I}_n$ sa desna ništa se neće promeniti i rezultat tog množenja je matrica $\mathcal{A}$. Sličan argument prolazi prilikom množenja matrice $\mathcal{A}$ sa matricom $\mathbb{I}_n$ sa leva, samo u odnosu a prethodno rezonovanje kolone treba zameniti vrstama. Dakle imamo,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_n \cdot \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \cdot \mathbb{I}_n &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Iz formule (6.1) jasno je da množenje matrica nije komutativna operacija za $n > 1$, kao što pokazuje sledeći primer ($n = 2$), za $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, i $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ imamo

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}.$$

Ipak, množenje matrica je kompatibilno sa osnovnim operacijama u vektorskom prostoru $\mathbb{M}_n$, kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija 3. Za sve $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{M}_n$ i $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ važi:

$$(i1) \quad \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot (\lambda \mathcal{B}),$$

$$(i2) \quad \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C},$$

$$(i3) \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}.$$

Dokaz. Sva tri svojstva dokazuju se tako što pokažemo da se proizvoljne (i, j) komponente matrica sa leve i desne strane jednakosti podudaraju. (i1) je očigledno.

Dokažimo (i2). Neka su $\mathcal{A} = ((\mathcal{A})_{ij}), \mathcal{B} = ((\mathcal{B})_{ij})$ i $\mathcal{C} = ((\mathcal{C})_{ij}) \in \mathbb{M}_n$. Tada redom imamo,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}))_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\mathcal{A})_{ik} (\mathcal{B} + \mathcal{C})_{kj} = \sum_{k=1}^n (\mathcal{A})_{ik} ((\mathcal{B})_{kj} + (\mathcal{C})_{kj}) = \sum_{k=1}^n ((\mathcal{A})_{ik} (\mathcal{B})_{kj} + (\mathcal{A})_{ik} (\mathcal{C})_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\mathcal{A})_{ik} (\mathcal{B})_{kj} + \sum_{k=1}^n (\mathcal{A})_{ik} (\mathcal{C})_{kj} = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})_{ij} + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{C})_{ij} = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C})_{ij}. \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje i (i3). □

Definicija $\mathbb{R}$ –algebre. Neka je V neki neprazan skup. Tada za strukturu $V \equiv (V, \mathbb{R}, +, *, \cdot)$ kažemo da je $\mathbb{R}$ –**algebra** ako je:

(A1) $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$.

(A2) $(V, +, *)$ prsten, tj. preslikavanje $*$: $V \times V \longrightarrow V$, koje nazivamo množenje vektora, zadovoljava sledeće aksiome $\forall A, B, C \in V$ važi:

$$(i1) \quad A * (B + C) = A * B + A * C,$$

$$(i2) \quad (A + B) * C = A * C + B * C.$$

(A3) Preslikavanje, $*$ je kompatibilno sa množenjem matrica, tj. $\forall A, B \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ važi:

$$\alpha \cdot (A * B) = (\alpha \cdot A) * B = A * (\alpha \cdot B).$$

U zavisnosti od toga da li u prstenu $(V, +, *)$ važi još poneko od svojstava:

$$(A4) \quad A * (B * C) = (A * B) * C,$$

(A5) postoji neutralni element za operaciju $*$, tj. postoji element $E \in V$ takav da je $A * E = E * A = A$,

$$(A6) \quad A * B = B * A,$$

kažemo da je V asocijativna algebra, algebra sa jedinicom i komutativna algebra, redom. Dakle, ako sada uzmemo u obzir sve što smo do sada naučili o strukturi skupa matrica $\mathbb{M}_n$, možemo formulirati sledeću teoremu.

Teorema. $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je asocijativna $\mathbb{R}$ –algebra sa jedinicom.

Napomena. U skladu sa tradicionalnim duhom koji se obično koristi u matematičkoj literaturi, oznake za množenje skalara, skalara i vektora, kao i vektora sa vektorima pojednostavljujemo tako što izostavljamo oznaku za množenje $(\cdot, *)$, bez bojazni da će to dovesti do zabune.

6.4. Baza vektorskog prostora. Neka je dat neki podskup B vektorskog prostora V , koji ne sadrži nula vektor. Kažemo da je $v \in V$ linearna kombinacija vektora iz B , ako postoje $n \in \mathbb{N}$, vektori $v_1, v_2, \dots, v_n \in B$ i skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$(6.3) \quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Od posebnog je interesa slučaj kada je svaki vektor $v \in V$ linearna kombinacija vektora iz skupa B . Tada kažemo da je skup B skup **generatora**⁵ vektorskog prostora V .

Neka je dat neki konačan skup $B = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ podskup vektorskog prostora V . Kažemo da je B **linearno nezavisan** ako jednačina linearne (ne)zavisnosti:

$$(6.4) \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, m),$$

ima samo trivijalno (koje uvek postoji) rešenje: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. Skup B je **linearno zavis** ako jednačina (8.4) ima netrivialno rešenje tj. ako barem jedan od skalara α_i , $i = 1, \dots, m$ je različit od nule. Ako je skup B **beskonačan** kažemo da je **linearno nezavisan** ako je svaki njegov konačni podskup linearno nezavisan.

Podskup B vektorskog prostora V koji je istovremeno skup generatora i koji je linearno nezavisan zove se **baza vektorskog prostora**.

6.5. Teorema o bazi vektorskog prostora. Dimenzija vektorskog prostora.

Teorema. Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Tada važi,

- (i1) postoji neka baza B vektorskog prostora V .
- (i2) ako su B_1 i B_2 dve proizvoljne baze vektorskog prostora V onda postoji bijekcija $f : B_1 \rightarrow B_2$.

Primetimo da tvrđenje (i2) iz prethodne Teoreme kaže da sve baze vektorskog prostora imaju 'jednak'⁶ broj elemenata, što nam omogućuje da definišemo pojam dimenzije vektorskog prostora. Dakle, **dimenzija vektorskog prostora V** je kardinalni broj neke njegove baze. Kažemo da je V **konačnodimenzion** vektorski prostor ako ima neku bazu koja ima konačno mnogo elemenata. U ovom tekstu pretpostavljamo da su svi vektorski prostori konačnodimenzion.

Koordinate vektora. Koristeći sada fundamentalnu Teoremu o bazi vektorskog prostora dolazimo do definicije veoma važnog pojma koordinata vektora. Neka je data baza

⁵ Ili generišući skup.

⁶ tj. da postoji bijekcija sa jedne baze na drugu.

$B = (e_1, \dots, e_m)$, *realnog* vektorskog prostora V^m i ako je $x \in V^m$ proizvoljan vektor tada postoje jedinstveni skalari, $x_1, \dots, x_m$ takvi da je

$$(6.5) \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m.$$

Realni brojevi $x_1, \dots, x_m$ zovu se **koordinate vektora** x u bazi B .

Kako je u bazi bitan poredak vektora, tj. koordinate vektora x zavise o redosledu elemenata u bazi, koordinate zapisujemo kao uređene m -torke tj. koordinate vektora x zapisujemo kao $(x_1, \dots, x_m)$. Iz istog razloga i baze zapisujemo kao uređene m -torke. Primetimo da kada izaberemo bazu B dobro je definisano preslikavanje $\kappa_B : V^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, formulom $\kappa_B(x) = (x_1, \dots, x_m)$. Preslikavanje κ_B zove se **koordinatizacija** ili **koordinatno preslikavanje** i ono zavisi od unapred odabrane baze. Primetimo da tvrđenje (i2) iz prethodne Teoreme kaže da sve baze vektorskog prostora imaju 'jednak'⁷ broj elemenata, što nam omogućuje da definišemo pojam dimenzije vektorskog prostora. Dakle, **dimenzija vektorskog prostora** V je kardinalni broj neke njegove baze⁸.

Kažemo da je V **konačnodimenzionim vektorski prostor** ako ima neku bazu koja ima konačno mnogo elemenata. U ovom tekstu bavimo se samo konačnodimenzionim vektorskim prostorima.

Primer 1. $\mathbb{R}^3$ ima dimenziju 3, jer je npr. jedna njegova baza $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

Primer 2. $\mathbb{R}[x]$ nije konačno dimenzion jer je skup $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ jedna njegova baza.

Napomena. (1) Ako je $B = \{v_i, |i \in I\}$ baza od V , tada proizvoljni vektor $v \in V$ ima jedinstvenu reprezentaciju u obliku **konačne sume**

$$v = \sum_i \alpha_i v_i.$$

Brojevi α_i zovu se **komponente vektora** v u bazi B .

(2) Primetimo da je prirodno bazu vektorskog prostora posmatrati kao uređen skup.

6.6. Kanonska baza u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Kao što znamo važi:

Teorema. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ je vektorski prostor uz operacije sabiranja i množenja sa skalarom date sa:

- (s) $x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$
- (m) $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$

⁷ tj. da postoji bijekcija sa jedne baze na drugu.

⁸ pa time i svake.

Kanonska baza. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ ima jednu istaknutu bazu⁹, koju nazivamo **kanonska ili standardna baza**, i koju čine vektori

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Lako se proverava da je skup $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ skup generatora:

neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tada imamo

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

i da je linearno nezavisan

$$\begin{aligned} 0 &= (0, 0, \dots, 0) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \text{odakle sledi: } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

6.7. Svojstva koordinatizacije. Sledeća teorema daje osnovne osobine svake koordinatizacije.

Teorema 1. Neka je $B = (e_1, \dots, e_m)$, baza realnog vektorskog prostora V^m . Tada:

- (i1) κ_B je bijekcija.
- (i2) $\kappa_B(x + y) = \kappa_B(x) + \kappa_B(y)$, $x, y \in V$.
- (i3) $\kappa_B(\alpha x) = \alpha \kappa_B(x)$, $x \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka su $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ i $y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$.

(i1) ako je $\kappa_B(x) = \kappa_B(y)$, tada je

$$\kappa_B(x) = (x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_m) = \kappa_B(y) \quad x_i = y_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{tj. preslikavanje } \kappa_B \text{ je '1-1'}.$$

Da bismo pokazali da je preslikavanje κ_B 'na' i tako završili dokaz ove tvrdnje, za vektor $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ uočimo vektor $x = z_1 e_1 + z_2 e_2 + \dots + z_m e_m \in V^m$ za kojeg očigledno važi da $\kappa_B(x) = z$.

(i2) je posledica niza jednakosti

$$\begin{aligned} \kappa_B(x + y) &= \kappa_B \left(\sum_{i=1}^m x_i e_i + \sum_{i=1}^m y_i e_i \right) = \kappa_B \left(\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) e_i \right) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_m) + (y_1, y_2, \dots, y_m) = \kappa_B(x) + \kappa_B(y). \end{aligned}$$

(i3) sledi iz

$$\kappa_B(\alpha x) = \kappa_B \left(\sum_{i=1}^m \alpha x_i e_i \right) = \kappa_B \left(\sum_{i=1}^m (\alpha x_i) e_i \right) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_m) = \alpha (x_1, x_2, \dots, x_m) = \alpha \kappa_B(x).$$

Time je dokaz završen. □

Svojstva (i2) i (i3) iz prethodne teoreme su veoma važna jer ona pokazuju da je preslikavanje κ_B kompatibilno sa strukturama vektorskih prostora na V^m i $\mathbb{R}^m$.

Neka su V i U vektorski prostori nad poljem¹⁰ $\mathbb{R}$, tada preslikavanje, $A : V \longrightarrow U$, za koje važi:

⁹ čiji vektori n – torke imaju najjednostavnij koordinate.

¹⁰ nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F}$.

- (a) $A(x + y) = A(x) + A(y), \quad x, y \in V,$
 (h) $A(\alpha x) = \alpha A(x), \quad x \in V, \alpha \in \mathbb{R},$

nazivamo **linearni operator** ili **linearno preslikavanje**. Ako je linearno preslikavanje još i bijekcija onda kažemo da je izomorfizam vektorskih prostora V i U .

Teorema 2. *Vektorski prostori V i U nad poljem realnih brojeva su izomorfni akko imaju istu dimenziju.*

Primedba. Iz Teoreme 1 i Teoreme 2 vidimo da su vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ predstavnici klase ekvivalencije relacije $\cong$, i oni su najpogodniji za razna izračunavanja, te je tako teorija konačnodimenzionih prostora nad poljem $\mathbb{R}$ svedena na proučavanje vektorskih prostora $\mathbb{R}^n$.

6.9. Potprostor. Neka je V realni vektorski prostor i neka je $L \neq \emptyset$ podskup od V . L je **potprostor** od V ako je i sam vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ s obzirom na iste operacije sabiranja vektora i množenja vektora sa skalarima kao u V .

Nije se teško uveriti da su asocijativnost i komutativnost sabiranja i aksiome (VP2)-(VP5) nasledne osobine (sa skupa V na bilo koji njegov podskup), tako da dobijamo sledeću karakterizacionu teoremu.

Teorema (Karakterizacije potprostora). *Neka je $\emptyset \neq L$ podskup realnog vektorskog prostora V . Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

- (i1) L je potprostor vektorskog prostora V ,
 (i2) za proizvoljne vektore x, y iz L i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vektor $z = \alpha x + \beta y$ pripada L .

Dokaz. (i1) Ako je L potprostor tada je on zatvoren na operacije sabiranja vektora i množenja vektora sa skalarom pa lako sledi (i2). Primetimo da iz (i2) sledi (i1) jer su preostale aksiome nasledne osim eventualno neutrala za sabiranje i inverza za sabiranje. Kako je $\emptyset \neq L$ sledi da je za neki vektor $x = y \in L$ i $0 \in \mathbb{R}$ vektor $0 \cdot x + 0 \cdot y = \mathbf{0} \in L$. Dakle, $\mathbf{0} \in L$, pa je nula vektor jasno neutral i u L , a za $x, y \in L$ je i vektor $0 \cdot x + (-1) \cdot y = -y$ u L . Odakle, sledi da je L potprostor. Time je u potpunosti dokazana teorema. $\square$

Primer 1. Pokažimo da je $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$ i odredite mu dimenziju.

Rešenje. Neka su $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni elementi tada je: $x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$ i $y_1 - y_2 + 4y_3 = 0$.

Kako je $\alpha x + \beta y = z = (z_1, z_2, z_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$, imamo:

$$z_1 - z_2 + 4z_3 = \alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_2 + \beta y_2) + 4(\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 - x_2 + 4x_3) + \beta(y_1 - y_2 + 4y_3) = 0.$$

Dakle, V je zaista potprostor od $\mathbb{R}^3$. Sada nađimo jednu njegovu bazu. Neka je $x \in V$ tada redom imamo:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 4x_3, x_2, x_3) = x_2(1, 1, 0) + x_3(-4, 0, 1) = x_2 a + x_3 b,$$

odakle vidimo da vektori $a = (1, 1, 0)$ i $b = (-4, 0, 1)$ razapinju V , a lako se proveriti da su i linearno nezavisni pa je skup $\{a, b\}$ baza od V , i dimenzija od V jednaka je 2.

Primedba 1. Znamo da uslov kojim je definisan skup V predstavlja ravan koja prolazi kroz koordinatni početak (nula vektor u $\mathbb{R}^3$). Nije teško videti da samo ravni, koje sadrže nula vektor, predstavljaju vektorske potprostore u $\mathbb{R}^n$.

Primer 2. Pokažimo da su skupovi $\mathcal{S}_2$ i $\mathcal{K}_2$ kvadratnih 2×2 simetričnih i kososimetričnih matrica vektorski potprostore od $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ i nađimo neke njihove baze.

Rešenje. Da su $\mathcal{S}_2$ i $\mathcal{K}_2$ potprostore direktno sledi iz definicije i svojstava transponovanja. Nađimo sada neku bazu od $\mathcal{S}_2 = \{\mathcal{A} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathcal{A} = \mathcal{A}^T\}$. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_2$, tada je

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \mathcal{A}^T, \text{ odakle sledi da je } a = a, b = c, c = b, d = d, \text{ i vidimo da je}$$

$$\mathcal{A} = a\mathcal{E}_1 + b\mathcal{E}_2 + d\mathcal{E}_3, \text{ gde je } \mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \mathcal{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle vidimo da matrice $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ i $\mathcal{E}_3$ generišu $\mathcal{S}_2$, a lako se vidi da je taj skup linearno nezavisan te je $\dim \mathcal{S}_2 = 3$.

Analogno nalazimo da je potprostor $\mathcal{K}_2$ razapet sa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, te mu je dimenzija jednaka 1.

Sada formulišimo sledeću propoziciju, koja ne važi ako je V beskonačno dimenzioni vektorski prostor.

Propozicija. Neka je L potprostor konačnodimenzionog vektorskog prostora V .

Tada je $\dim L \leq n = \dim V$. Specijalno, ako je $\dim L = n$ tada je $L = V$.

Dokaz. Primetimo da proizvoljna baza od L ne može sadržavati više od n elemenata, jer je svaki podskup vektorskog prostora V koji ima više od n elemenata, linearno zavisao, pa kao takav ne bi mogao biti baza od L . Dakle, $\dim L \leq n$.

Ako je $\dim L = n$ tada L ima bazu B_L koja se sastoji od n elemenata i kako je to linearno nezavisan skup on je zbog 2.17 Teorema 1. (i2) baza od V , tako da je $L = V$. $\square$

Primedba. Proizvoljnu bazu B_L pravog potprostora L možemo uvek nadopuniti do baze čitavog vektorskog prostora V .

6.10. Presek potprostora. Direktan proizvod potprostora. U mnogim matematičkim oblastima postoje slični načini konstrukcije novih podstrukture iz datih. Jedan od najklasičniji je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 1. Neka je $\mathcal{F} = \{L_i, i \in I\}$ familija¹¹ potprostora realnog vektorskog prostora V . Tada je i

$$L = \bigcap_{i \in I} L_i \quad \text{potprostor od } V.$$

Dokaz. Dovoljno je proveriti neke od ekvivalentnih uslova iz prethodne teoreme. Proverimo uslove (i3), dakle neka su x, y proizvoljni vektori iz L i α, β proizvoljni skalari. Tada redom imamo niz ekvivalencija:

$$x, y \in L \text{ i } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \iff x, y \in L_i \text{ } (\forall i \in I) \text{ i } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \xrightarrow{L_i \text{ je potpr.}} \alpha x + \beta y \in L_i, \text{ } (\forall i \in I)$$

$$\iff \alpha x + \beta y \in L. \quad \square$$

Drugi način da od poznatih vektorskih prostora nad poljem $\mathbb{R}(\mathbb{F})$ dobijamo nove je direktan proizvod prostora. Neka su V i W dva vektorska prostora nad $\mathbb{R}$. Tada na

¹¹ I je proizvoljan neprazan skup.

njihovom Dekartovom proizvodu, $V \times W$, definišemo sabiranje vektora i množenje vektora sa skalarom:

$$(s) \quad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2), \text{ gde su } v_1, v_2 \in V \text{ i } w_1, w_2 \in W,$$

$$(ms) \quad \lambda \cdot (v, w) = (\lambda \cdot_V v, \lambda \cdot_W w), \text{ gde su } v \in V, w \in W \text{ i } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$, tada je $(V \times W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ takođe vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Potrebno je proveriti aksiome vektorskog prostora (VP1)-(VP5).

(VP1): $(V \times W, +)$ je Abelova grupa, tj. za sve $v, v_1, v_2, v_3 \in V, w, w_1, w_2, w_3 \in W$, imamo

$$\begin{aligned} \text{Asoc.: } ((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) + (v_3, w_3) &= (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2) + (v_3, w_3) = ((v_1 +_V v_2) +_V v_3, (w_1 +_W w_2) +_W w_3) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{asocijativnost važi u } V \text{ i } W \\ \text{jer su vektorski prostori} \end{array} \right\} = (v_1 +_V (v_2 +_V v_3), w_1 +_W (w_2 +_W w_3)) = (v_1, w_1) + (v_2 +_V v_3, w_2 +_W w_3) \\ &= (v_1, w_1) + ((v_2, w_2) + (v_3, w_3)). \end{aligned}$$

$$\text{neut.: } (v, w) + (\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W) = (v +_V \mathbf{0}_V, w +_W \mathbf{0}_W) = (v, w) = (\mathbf{0}_V +_V v, \mathbf{0}_W +_W w) = (v, w) + (\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W)$$

tj. neutral u $V \times W$ je $(\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W)$ gde su $\mathbf{0}_V$ i $\mathbf{0}_W$ neutralni elementi u $(V, +)$ i $(W, +)$, redom.

$$\text{inv.: } (v, w) + (-v, -w) = ((v +_V (-v)), w +_W (-w)) = (\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W) = ((-v) +_V v, (-w) +_W w) = (-v, -w) + (v, w)$$

tj. inverz od (v, w) u $V \times W$ je $(-v, -w)$ gde su $-v$ i $-w$ inverzi od v i w u $(V, +)$ i $(W, +)$, redom.

$$\begin{aligned} \text{komu.: } (v_1, w_1) + (v_2, w_2) &= (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{komutativnost važi u } V \text{ i } W \\ \text{jer su vektorski prostori} \end{array} \right\} = (v_2 +_V v_1, w_2 +_W w_1) \\ &= (v_2, w_2) + (v_1, w_1). \end{aligned}$$

Slično, proveravamo i ostale aksiome, tj. $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, redom imamo

$$\begin{aligned} \text{(VP2): } \alpha \cdot (\beta \cdot (v, w)) &= \alpha \cdot (\beta \cdot_V v, \beta \cdot_W w) = (\alpha \cdot_V (\beta \cdot_V v), \alpha \cdot_W (\beta \cdot_W w)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{(VP2) važi u } V \text{ i } W \\ \text{jer su vekt. prostori} \end{array} \right\} = ((\alpha \beta) \cdot_V v, (\alpha \beta) \cdot_W w) \\ &= (\alpha \beta) \cdot (v, w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(VP3): } (\alpha + \beta) \cdot (v, w) &= ((\alpha + \beta) \cdot_V v, (\alpha + \beta) \cdot_W w) = (\alpha \cdot_V v + \beta \cdot_V v, \alpha \cdot_W w + \beta \cdot_W w) = \left\{ \begin{array}{l} \text{(VP3) važi u } V \text{ i } W \\ \text{jer su vekt. prostori} \end{array} \right\} \\ &= (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w) + (\beta \cdot_V v, \beta \cdot_W w) = \alpha \cdot (v, w) + \beta \cdot (v, w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(VP4): } \alpha \cdot ((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) &= \alpha \cdot (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2) = (\alpha \cdot (v_1 +_V v_2), \alpha \cdot (w_1 +_W w_2)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{(VP4) važi u } V \text{ i } W \\ \text{jer su vekt. prostori} \end{array} \right\} \\ &= (\alpha \cdot_V v_1 + \alpha \cdot_V v_2, \alpha \cdot_W w_1 + \alpha \cdot_W w_2) = (\alpha \cdot_V v_1, \alpha \cdot_W w_1) + (\alpha \cdot_V v_2, \alpha \cdot_W w_2) = \alpha \cdot (v_1, w_1) + \alpha \cdot (v_2, w_2). \end{aligned}$$

$$\text{(VP5): } 1 \cdot (v, w) = (1 \cdot_V v, 1 \cdot_W w) = \left\{ \begin{array}{l} \text{(VP5) važi u } V \text{ i } W \\ \text{jer su vekt. prostori} \end{array} \right\} = (v, w).$$

Time je završen dokaz. □

Napomenimo da ćemo iz oznaka za sabiranje $(+)$ i množenje $(\cdot)$ ubuduće izostavljati oznake skupova na kojem one deluju. Štaviše često ćemo kod svih vrsta množenja izostavljati i $\cdot$.

Primedba 1. Ovako definisan proizvod vektorskih prostora zove se i **spoljašnji direktni proizvod** vektorskih prostora V i W , jer ne pretpostavljamo da su V i W potprostori istog vektorskog prostora. Uskoro ćemo videti i konstrukciju unutrašnjeg direktnog

proizvoda kada ćemo pretpostavljati da su V i W vektorski potprostori nekog vektorskog prostora.

Primedba 2. Ako malo analiziramo vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ tada lako možemo zaključiti da je on jedan specijalni slučaj direktnog proizvoda od n primeraka vektorskog prostora $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n - \text{ primeraka}}.$$

6.11. Lineal. Ako je $S \subseteq V$ proizvoljan podskup vektorskog prostora V , tada postoji najmanji potprostor od V koji sadrži skup S , koji se naziva **lineal nad skupom** S i za kojeg koristimo oznaku $\mathcal{L}(S)$.

Neke od očiglednih osobina lineala sadržane su u sledećoj propoziciji.

Propozicija. Neka su S i S_1 neki podskupovi vektorskog prostora V . Tada,

(i1) ako je S potprostor od V onda je $\mathcal{L}(S) = S$.

(i2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$.

(i3) ako je $S \subseteq S_1$ tada je $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(S_1)$.

Eksplícitan opis lineala dat je u sledećoj teoremi.

Teorema. Neka je S neki podskup realnog vektorskog prostora V . Tada je

$$\mathcal{L}(S) = \bigcap_{\substack{M \text{ potpr. od } V \\ S \subseteq M}} M = \left\{ \alpha_1 a_{i_1} + \cdots + \alpha_k a_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, a_{i_j} \in S \right\},$$

tj., $\mathcal{L}(S)$ je skup svih linearnih kombinacija elemenata iz S .

Dokaz. Iz definicije je jasno da je $\mathcal{L}(S)$ jednak preseku svih potprostora od V koji sadrže skup S . Ako obeležimo skup sa desne strane gornje jednakosti sa L , vidimo da on sadrži sve elemente skupa S (kao jednočlane linearne kombinacije sa skalarom 1), tj. $S \subseteq L$. Da je L potprostor lako sledi jer zbir dva vektora koji su linearne kombinacije vektora iz L dužina n i m je linearna kombinacija dužine manje ili jednake $n + m$. Proizvod skalara $\lambda \in \mathbb{R}$ i linearne kombinacije vektora iz S opet je linearna kombinacija istih vektora. Ako je M neki potprostor od V koji sadrži S onda M (jer je potprostor) mora sadržavati bilo koju linearnu kombinaciju vektora iz S , tj. $L \subseteq M$. Drugim rečima L je najmanji potprostor koji sadrži skup S , pa se podudara sa linealom $\mathcal{L}(S)$. $\square$

Primer. Primetimo da:

(i1) ako je $0 \neq a_1 \in V$ da je tada $\mathcal{L}(a_1)$ jednodimenzioni potprostor od V , kojeg nazivamo **vektorska prava** ili **samo prava** od V ,

(i2) ako su a_1 i a_2 linearno nezavisni vektori od V , tada je $\mathcal{L}(a_1, a_2)$ dvodimenzioni potprostor od V , kojeg nazivamo **vektorska ravan** ili **samo ravan** od V .

Nastavljajući na analogan način vidimo da je vektorski prostor V lineal nad bilo kojom svojom bazom B , tj. $V = \mathcal{L}(B)$.

6.12. Suma potprostora. Neka su L i M potprostori konačnodimenzionog vektorskog prostora V . Suma potprostora L i M je najmanji potprostor od V koji sadrži L i M , dakle, $L + M = \mathcal{L}(L \cup M)$.

Za sumu potprostora L i M kažemo da je **direktna** ako je $L \cap M = \{0\}$.

Oznake koje se u literaturi najčešće koriste za direktnu sumu su $L \oplus M$ i $L \dot{+} M$.

Ako je $L \oplus M = V$ onda kažemo da je M **direktni komplement** od L u V i da je L **direktni komplement** od M u V .

Teorema 1. Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V . Tada je

$$L + M = \mathcal{L}(L \cup M) = \{v \mid v = l + m, l \in L, m \in M\}.$$

Dokaz. Obeležimo sa $N = \{v \mid v = l + m, l \in L, m \in M\}$. Dovoljno je pokazati da je N najmanji potprostor od V , koji sadrži skupove L i M . Prvo proverimo da je N potprostor: neka su $x = l_1 + m_1$ i $y = l_2 + m_2$ elementi skupa N i neka su α, β skalari iz $\mathbb{R}$, tada imamo redom

$$z = \alpha x + \beta y = \alpha(l_1 + m_1) + \beta(l_2 + m_2) = (\alpha l_1 + \beta l_2) + (\alpha m_1 + \beta m_2) = l + m,$$

gde je $l = \alpha l_1 + \beta l_2 \in L$ i $m = \alpha m_1 + \beta m_2 \in M$, jer su L i M potprostori. Odavde odmah sledi (vidi 6.9 Teorema) da je N je potprostor. Očigledno N sadrži L jer $L \ni l = l + 0 \in N$. Slično se vidi da N sadrži i M . Ako je W potprostor od V koji sadrži potprostore L i M , tada W mora sadržavati¹² sve vektore oblika $l + m$ ($l \in L, m \in M$), tj. $N \subseteq W$. I dokaz je gotov. $\square$

Važi i sledeća propozicija koja daje karakterizaciju direktne sume vektorskih potprostora.

Propozicija. Neka je V vektorski prostor. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

- (i1) suma $L + M$ je direktna,
- (i2) svaki vektor iz $L + M$ ima jedinstven prikaz u obliku zbira jednog vektora iz L i jednog iz M .

Dokaz. Pretpostavimo da je suma $L + M$ direktna, i neka neki vektor $x \in L + M$ ima prikaze $x = l + m = l_1 + m_1$, gde su $l, l_1 \in L$ i $m, m_1 \in M$. Iz ove relacije odmah sledi da je vektor $y = l - l_1 = m_1 - m$, u $L \cap M = \{0\}$ (jer $l - l_1 \in L$ i $m_1 - m \in M$), tj. $l = l_1$ i $m = m_1$.

Obratno, ako je $0 \neq x \in L \cap M$, tada vektori x i 0 pripadaju i L i M , pa vektor x ima barem dva prikaza u obliku: $x = x + 0 = 0 + x$ što je u kontradikciji sa jedinstvenošću tog prikaz u obliku zbira jednog vektora iz L i jednog iz M . Dakle, $L \cap M = \{0\}$. $\square$

U sledećoj teoremi dokazujemo poznatu **Grasmanovu formulu**, koja dovodi u vezu dimenzije sume i preseka dva vektorska potprostora sa njihovim dimenzijama. Preciznije važi,

Teorema 2 Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V dimenzije n . Tada važi sledeća formula

$$(6.6) \quad \dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M).$$

Formula (5) zove se **Grasmanova formula**.

¹² vidi 6.9 Teorema (i2).

Dokaz. Konstruišimo bazu od $L + M$. Neka je $B_{L \cap M} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ baza potprostora $L \cap M$ koju, nadopunimo vektorima $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l\}$ do baze $B_L = \{c_1, c_2, \dots, c_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l\}$ od L i vektorima $\{b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_m\}$ do baze $B_M = \{c_1, c_2, \dots, c_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_m\}$ od M .

Tvrdimo da je skup $B = \{c_1, c_2, \dots, c_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l, b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_m\}$, baza potprostora $L + M$.

Kako B sadrži baze potprostora L i M , skup B je generator potprostora $L + M = \mathcal{L}(L \cup M)$ i preostaje nam da pokažemo njegovu linearnu nezavisnost. Posmatrajmo relaciju,

$$\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \alpha_{k+2} a_{k+2} + \dots + \alpha_l a_l + \beta_{k+1} b_{k+1} + \beta_{k+2} b_{k+2} + \dots + \beta_m b_m = \mathbf{0},$$

koju možemo prepisati u ekvivalentnom obliku,

$$x = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \alpha_{k+2} a_{k+2} + \dots + \alpha_l a_l = -(\beta_{k+1} b_{k+1} + \beta_{k+2} b_{k+2} + \dots + \beta_m b_m),$$

odakle zaključujemo da je $x \in L$ ¹³ i $x \in M$,¹⁴ tj. $x \in L \cap M$, tako da imamo

$$x = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \dots + \delta_k c_k = -(\beta_{k+1} b_{k+1} + \beta_{k+2} b_{k+2} + \dots + \beta_m b_m), \quad \text{ili ekvivalentno}$$

$$(6.7) \quad \mathbf{0} = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \dots + \delta_k c_k + \beta_{k+1} b_{k+1} + \beta_{k+2} b_{k+2} + \dots + \beta_m b_m.$$

Iz poslednje relacije (6.7) sledi da je $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_m = 0$ jer je skup B_M baza pa je specijalno i linearno nezavisan. Odavde sledi da je $x = 0$. I na kraju ako iskoristimo da je $x \in L$, tj. da je linearna kombinacija vektora baze B_L zaključujemo da je i $\gamma_1 = \dots = \gamma_k = \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_l = 0$ tj. skup B je i linearno nezavisan pa je samim tim i baza vektorskog prostora $L + M$. Formula za dimenzije sada sledi prebrajanjem baza odgovarajućih potprostora, tj.

$$\dim(L + M) = l + (m - k) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M). \quad \square$$

Primetimo da iz prethodne teoreme možemo dobiti još jednu karakterizaciju direktne sume potprostora.

Posledica. $L + M$ je direktna akko je $\dim(L + M) = \dim L + \dim M$.

Dokaz. Suma potprostora $L + M$ je direktna akko je $L \cap M = \{\mathbf{0}\}$, a to je ekvivalentno sa $\dim L \cap M = 0$. $\square$

Primedba. Jasno je da za svaki potprostor L od V postoji njegov direktni komplement, tj. potprostor M takav da je $L \oplus M = V$. Sa $M = V \ominus L$ obeležavamo direktni komplement od L u V . Očigledno, direktni komplement nije jedinstven, ali je dimenzija svih direktnih komplementa jedinstvena: $\dim M = \dim V - \dim L$.

Primer 1. U $\mathbb{R}^3$, posmatrajmo potprostor $L = \mathcal{L}(\{e_1, e_2\})$, gde su e_1 i e_2 vektori kanonske baze. Tada znamo da je dimenzija svakog direktnog komplementa jednaka 1. Neki direktni komplementi¹⁵ su:

$$M_1 = \mathcal{L}(\{(0, 0, 1)\}), \quad M_2 = \mathcal{L}(\{(1, 1, 1)\}), \quad M_3 = \mathcal{L}(\{(2, -1, 1)\}), \dots$$

Primer 2. U tački 6.9 pokazali smo da su skupovi $\mathcal{S}_2$ i $\mathcal{K}_2$ simetričnih i koso simetričnih matrica potprostori vektorskog prostora $\mathbb{M}_2$. Pokažimo da je suma $\mathcal{S}_2 + \mathcal{K}_2$ direktna i jednaka $\mathbb{M}_2$.

Posledica: svaka se matrica može zapisati kao zbir jedne simetrične i jedne kososimetrične matrice.

¹³ kao linearna kombinacija vektora baze B_L .

¹⁴ kao linearna kombinacija nekih vektora baze B_M .

¹⁵ Šta je zajedničko svim vektorima sa kojima su određeni svi direktni komplementi od V ?

Rešenje. Kako je $\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{K}_2 = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} = \mathcal{A}^\tau = -\mathcal{A}\} = \{0\}$, suma je direktna i imamo,

$$\dim(\mathcal{S}_2 + \mathcal{K}_2) = 4 \text{ tako da je } \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{K}_2 = \mathbb{M}_2(\mathbb{R}). \text{ Traženi prikaz je: } \mathcal{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^\tau)}_{\in \mathcal{S}_2} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\tau)}_{\in \mathcal{K}_2}.$$

Ista dekompozicija važi i u proizvoljnoj dimenziji, tj. $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{K}_n = \mathbb{M}_n$.

6.12. Koordinate vektora u različitim bazama. Neka je V vektorski prostor i neka su date dve baze od V , $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Tada je moguće vektore baze f izraziti preko vektora baze e , tj.

$$(6.8) \quad f_k = T_{ef} e_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} e_i, \quad \gamma_{ik} \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Matrica T_{ef} zove se **matrica prelaska** sa baze e u bazu f . Za proizvoljni vektor $x \in V$ imamo:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i, \text{ neka je } x(f) = (x_1, \dots, x_n) \text{ i } x(e) = (x'_1, \dots, x'_n).$$

Koristeći formule (6.8) dobijamo vezu između koordinata vektora x u bazama f i e ,

$$(6.9) \quad x(e) = T_{ef} x(f) \quad \text{ili} \quad x(f) = [T_{ef}]^{-1} x(e).$$

Očigledno važi: $T_{fe}^{-1} = T_{ef}$.

Ako je g treća baza od V onda nakon eliminacije baze f dobijamo:

$$x(e) = T_{ef} T_{fg} x(g), \text{ i kako je } x(e) = T_{eg} x(g), \text{ zaključujemo da je } T_{ef} T_{fg} = T_{eg}.$$

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. Neka su e, e' i e'' tri baze vektorskog prostora V . Tada važi,

- (i1) $x(e) = T_{ee'} x(e')$,
- (i2) $T_{ee''} = T_{ee'} \cdot T_{e'e''}$,
- (i3) $[T_{ee'}]^{-1} = T_{e'e}$.

Primedba. Primetimo da samo nula vektor $\mathbf{0}$ u svim bazama ima iste koordinate $(0, 0, \dots, 0)$.

2. Skalarni proizvod

6.13. Skalarni proizvod. Kako je za svaki vektor dobro definisan intenzitet (dužina), i kako su za sve vektore osim nula vektora dobro definisani pravac i smer, pod **uglom** između nenula vektora x i y podrazumevamo manji od dva ugla koja grade pozitivni

delovi osa određenih tim vektorima, vidi Sliku 1. Prema tome ugao između dva vektora pripada segmentu $[0, \pi]$.

Skalarni ili unutrašnji proizvod vektor je binarna operacija $\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definisana na sledeći način: za $x, y \in V$

$$(6.10) \quad x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos w,$$

gde je w ugao između vektora x i $y \in V$ (Slika 1).

Za skalarni proizvod se koriste i druge oznake: $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$. Vektorski prostor V snabdeven skalarnim proizvodom označavaćemo sa V_e . Mi ćemo u ovom tekstu za skalarni proizvod dva vektora $x, y \in V$ koristiti oznaku $\langle x, y \rangle$.

Iz definicije (6.10) direktno sledi da je

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \text{akko je ispunjena najmanje jedna od relacija} \quad x = \mathbf{0}, \quad y = \mathbf{0}, \quad w = \pi/2.$$

Od posebnog interesa je poslednji slučaj i tada za dva (nenula) vektora kažemo da su **ortogonalni** ili **normalni** ako je ugao koji oni grade $\pi/2$. Koristeći definiciju skalarnog proizvoda i svojstva projektovanja (vidi **Dodatak**) svojstva ovaj zapis skalarnog proizvoda preko projekcija vektora u sledećoj Teoremi u kojoj su date najvažnije osobine skalarnog proizvoda.

Teorema 1. Neka su $x, y, z \in V_e$ proizvoljni vektori i α neki realan broj tada je

$$\begin{aligned} (E1) \quad \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle, & (E4) \quad \langle x, x \rangle &\geq 0, \\ (E2) \quad \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, & (E5) \quad \langle x, x \rangle &= 0, \text{ ako i samo je } x = \mathbf{0}. \\ (E3) \quad \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

Dokaz. Svojstva (E1), (E4) i (E5) slede neposredno iz definicije skalarnog proizvoda.

Za dokaz svojstava (E2) i (E3) vidi **Dodatak** (Skalarni proizvod). □

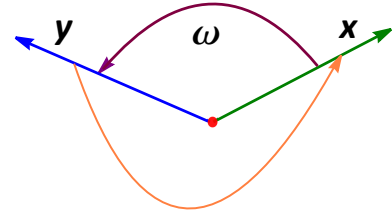
Svaki vektorski prostor V_e u koji je uvedena operacija $\cdot$ sa osobinama (E1) – (E5) naziva se **euklidski**¹⁶ **vektorski prostor**.

6.14. Skalarni proizvod u koordinatama. Nađimo sada skalarni proizvod dva vektora u funkciji njihovih koordinata. U tom cilju izaberimo¹⁷ najpre međusobno normalne jedinične vektore (e_1, e_2, e_3) za bazu prostora V_e . Tada su skalarni proizvodi vektora e_1, e_2, e_3 dati sledećom tabelom:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	e_1	e_2	e_3	Uvodeći simbol δ_{ij} na sledeći način	nalazimo da je
e_1	1	0	0	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$	$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$
e_2	0	1	0		
e_3	0	0	1		

¹⁶ $\epsilon\upsilon\kappa\lambda\epsilon\delta\eta\zeta$, Euclid 330–275, grčki matematičar.

¹⁷ Postojanje takve baze sledi iz geometrijskih razloga.



Slika 1. Ugao između dva vektora

Upravo uvedeni simbol δ_{ij} poznat je kao **Kronekerov (Kroneckerov) δ_{ij} simbol**¹⁸ ili kraće **Kroneckerov δ** . Neka su

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \sum_{i=1}^3 x_i e_i, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 = \sum_{j=1}^3 y_j e_j,$$

dva proizvoljna vektora prostora V_e , na osnovu **Teoreme 1.** imamo,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i \right), \left(\sum_{j=1}^3 y_j e_j \right) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j \delta_{ij} \\ (6.11) \quad &= \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \end{aligned}$$

Iz prethodnog računa sledi da gornja tablica (matrica) množenja između baznih vektora (koja se zove **Gramova matrica** vektora e_1, e_2 i e_3) u potpunosti određuje skalarni proizvod $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na $\mathbb{R}^3$.

Primetimo da je upravo dokazana formula za skalarni proizvod (6.11) tako jednostavna jer je baza **ortonormirana**, tj. važi $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Ako je $a = (a_1, a_2, a_3)$ neka druga baza koja nije ortonormirana, tada je njena Gramova matrica simetrična,

$$a_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle = \langle a_j, a_i \rangle = a_{ji}, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3.$$

i tada bi formula za skalarni proizvod u koordinatama bila funkcija najviše od 6 skalarnih proizvoda baznih vektora.

6.14. Standardni skalarni proizvod. Prethodni račun u $\mathbb{R}^3$ lako se može generalisati i na $\mathbb{R}^n$, tj. ako u $\mathbb{R}^n$ definišemo preslikavanje formulom:

$$(6.12) \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n,$$

$$\text{gde je } v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ i } w = (w_1, w_2, \dots, w_n),$$

tada se lako proverava da je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definisano formulom (6.12) skalarni proizvod na $\mathbb{R}^n$.

6.15. Norma i ugao u euklidskim prostorima. U svakom euklidskom prostoru dužina (norma) vektora v , može se izraziti formulom: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Takođe, u svakom euklidskom prostoru može se dobro definisati i pojam ugla, koristeći **Koši (Cauchy) – Švarcova (Schwartz) nejednakost**.

¹⁸Kronecker Leopold, 1823–1891, nemački matematičar.

Teorema. *Za bilo koja dva vektora v i w euklidskog vektorskog prostora V_e važi nejednakost:*

$$(6.13) \quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako su vektori v i w linearno zavisni.

Dokaz. Primetimo prvo da ako je neki od vektora u ili v jednak 0 tada nejednakost očigledno važi. Zato pretpostavimo da je $u \neq 0 \neq v$ i za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ važi:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 = \{\text{ako izaberemo } \lambda = -\frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}\} = \\ &= \|u\|^2 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|v\|^2}, \quad \text{odakle je} \quad \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \quad \text{tj.} \quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|. \end{aligned}$$

Iz prve nejednakosti u izvođenju odmah sledi da jednakost važi akko $u + \lambda v = 0$, tj. ako su u i v linearno zavisni. $\square$

Iz ove nejednakosti sledi

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1, \quad \text{i postoji jedinstveni ugao } \theta \in [0, \pi] \text{ takav da je} \quad \cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

i tada ugao θ proglasimo uglom između vektora v i w , tj. $\theta = \angle(v, w)$.

Posledica. (Nejednakost trougla) *Za bilo koja dva vektora v i w euklidskog vektorskog prostora V_e važi nejednakost:*

$$(6.14) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

PRIMEDBA. Iz prethodna nejednakosti (6.14) sledi da je zbir dužina dve stranice u trouglu uvek veći ili jednak dužini treće stranice.

Prethodnih nekoliko tvrdnji pokazuju da u svakom euklidskom prostoru možemo uvesti osnovne geometrijske koncepte: dužinu i ugao¹⁹.

6.16. Ortogonalnost i ortonormirana baza. Za vektore v i w euklidskog prostora V_e kažemo da su ortogonalni (normalni) i pišemo $v \perp w$ ako je $\langle v, w \rangle = 0$.

Kažemo da je baza e ortonormirana ako važi:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

• Iz osobina skalarnog proizvoda sledi da ako je e ortonormirana baza euklidskog prostora V_e , da je

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n,$$

gde je $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$ i $w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + \dots + w_n e_n$.

¹⁹ Podsetite se Euklidovih aksioma.

Ortonormirana baza uvek postoji, jer važi:

Teorema 1. *Neka je $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ proizvoljna baza euklidskog prostora V , tada postoji (pozitivno orijentisana) ortonormirana baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ takva da je*

$$(6.15) \quad \begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} e_1, \\ f_2 &= \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2, \\ &\vdots \\ f_n &= \alpha_{1n} e_1 + \alpha_{2n} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n. \end{aligned}$$

Prethodna teorema poznata je i kao **Gram–Šmitov (Schmidtov) postupak ortogonalizacije**, koji predstavlja jedan linearan algoritam kojim se proizvoljnoj bazi f dodeljuje ortonormirana baza e .

Teorema 2. *Svaki realni n –dimenzioni euklidski prostor izomorfan je euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, sa standardnim skalarnim proizvodom.*

PRIMEDBA. Prethodna teorema svodi izučavanje n –dimenzionih euklidskih prostora na izučavanje euklidskog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ sa standardnim skalarnim proizvodom.

6.18. Orijehtacija. Kao što znamo na pravoj kada izaberemo koordinatni početak postoje dva smeru levo i desno. Izaberemo vektor x koordinatne ose Ox tako da je kraj vektora x desno od njegovog početka i tu bazu proglasimo **pozitivnom**. Ako sada izaberemo neki drugi koordinatni sistem na istoj pravoj $O'y$, tada je on takođe **pozitivan** akko je $y = \alpha x$, za $\alpha > 0$. U suprotnom, tj. ako je $\alpha < 0$ kažemo da je koordinatni sistem $O'y$ **negativno orijentisan**. U ravni postupamo na isti način, izaberemo neki koordinatni sistem Oxy takav da se od vrha vektora x krećemo prema vrhu vektora y , u uglu $\angle(x, y)$ kojeg oni grade, u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu i njega proglasimo za **pozitivan** (Slika 2). Ako sada izaberemo neki drugi koordinatni sistem $O'x'y'$, on će biti pozitivan ako se od vrha vektora x' krećemo prema vrhu vektora y' , u uglu $\angle(x', y')$, u istom smeru kao što se od vrha vektora x krećemo prema vrhu vektora y , u uglu $\angle(x, y)$. Ako se pomenuti smerovi ne podudaraju onda kažemo da je koordinatni sistem $O'x'y'$ suprotno orijentisan od koordinatnog sistema Oxy .

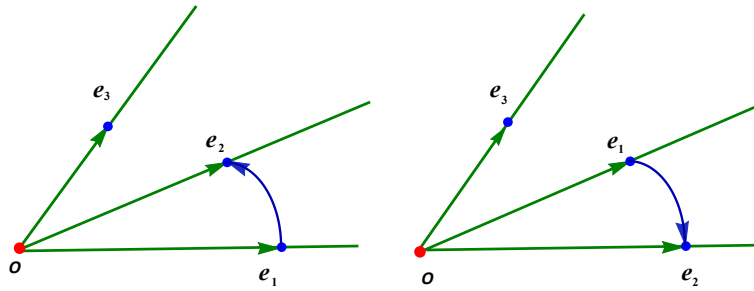
U prostoru takođe postupamo na analogan način, tj. izborom odgovarajuće baze. Za trojku linearno nezavisnih vektora²⁰ (x, y, z) kažemo da je **pozitivno orijentisana** (ili **kraće pozitivna**) ako bi prsti desne šake pokazivali kretanje od vrha prvog vektora x , u uglu $\angle(x, y)$ ka vrhu drugog vektora y (u ravni koja je određena njima), tada bi palac desne šake pokazivao onu stranu ravni određene vektorima x i y u kojoj se nalazi vrh vektora z ²¹, vidi Sliku 2. Ako je (x, y, z) pozitivno orijentisan reper²² onda su (y, x, z)

²⁰ koji tako čine bazu prostora V .

²¹ Baza (x, y, z) ne mora biti ortonormirana, pa nam je potrebno preciziranje.

²² Reper je sinonim za bazu ili za koordinatni sistem.

i $(x, -y, z)$ negativno orijentisani reperi. Primetimo da se cikličnom zamenom vektora nekog repera ne menja orijentacija baze, tj. reperi (x, y, z) , (y, z, x) i (z, x, y) imaju istu orijentaciju.

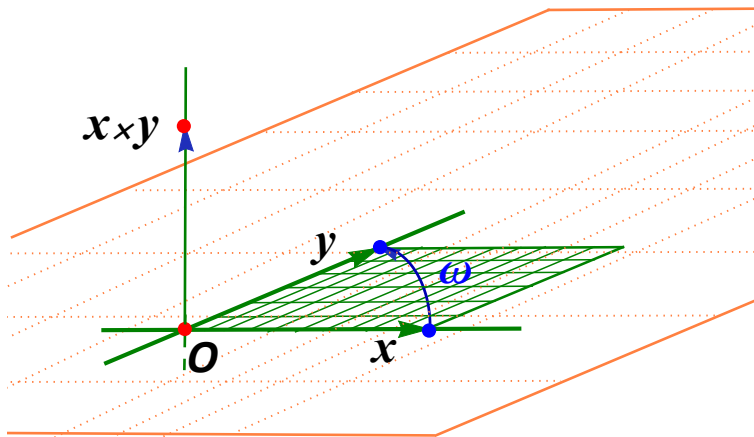


Slika 2. Pozitivni i negativni reper vektora

3. Vektorski i mešoviti proizvod

6.19. Vektorski i mešoviti proizvod. Vektorski ili spoljašnji proizvod vektora je binarna operacija $\times : V_e \times V_e \longrightarrow V_e$, kojom bilo kojem paru vektora x i y dodeljujemo vektor $x \times y$ (Slika 3) koji ima sledeća svojstva:

- (i) **Intenzitet.** $\|x \times y\| = \|x\| \|y\| \sin w$, gde je $w = \angle(x, y)$; drugim rečima intenzitet vektora $x \times y$ jednak je površini paralelograma koji je određen vektorima x i y . Ako je intenzitet vektorskog proizvoda 0 tada se pravac i smer ne definišu.
- (p) **Pravac.** Vektor $x \times y$ je normalan na svaki od vektora x i y ,
- (s) **Smer.** Uređena trojka vektora $(x, y, x \times y)$ pozitivno je orijentisana.



Slika 2. Vektorski proizvod

Mešoviti proizvod je preslikavanje, $[\cdot, \cdot, \cdot] : V_e \times V_e \times V_e \longrightarrow \mathbb{R}$, definisano formulom

$$(6.16) \quad [x, y, z] = (x \times y) \cdot z.$$

Geometrijska interpretacija mešovitog proizvoda data je u sledećoj teoremi.

Teorema 1. *Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda $[x, y, z]$ jednaka je zapremini paralelepipeda određenog vektorima x, y i z .*

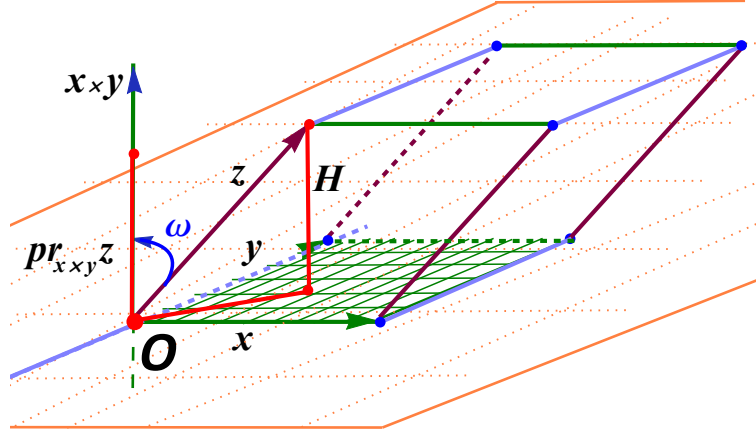
Dokaz. Neka vektori x i y određuju bazu paralelepipeda²³ čija je površina B (vidi Sliku 3). Primetimo da se tada odgovarajuća visina H dobija ortogonalnim projektovanjem vektora z na vektor $x \times y$. Odatle je zapremina

²³ grč. *parallelepipedon*, *parallellos* naporedan, *epipedon* ravan.

paralelepipeda V

$$V = B H = \|x \times y\| |\mathbf{pr}_{x \times y} z| = \|x \times y\| \|z\| \cos w = |(x \times y) \cdot z| = |[x, y, z]|,$$

pri čemu su korišćene osnovne osobine skalarnog i vektorskog množenja. $\square$



Slika 3. Geometrijska interpretacija mešovitoeg proizvoda

Osnovne osobine vektorskog i mešovitoeg proizvoda sakupljena su u sledećoj Teoremi.

Teorema 2. Neka su x, y, z, v proizvoljni vektori prostora V_e i $\alpha \in \mathbb{R}$ tada je

- | | |
|---|--|
| (L1) $x \times y = -(y \times x)$, | (P1) $[x, y, z] = -[y, x, z]$, |
| (L2) $(\alpha x) \times y = \alpha(x \times y)$, | (P2) $[x, y, z] = [y, z, x] = [z, x, y]$, |
| (L3) $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$, | (P3) $[\alpha x, y, z] = \alpha[x, y, z]$, |
| | (P4) $[x + y, z, v] = [x, z, v] + [y, z, v]$. |

Dokaz. Svojstva (L1), (L2), (P1) i (P3) dokazuju se direktno koristeći definicije vektorskog i mešovitoeg proizvoda kao i osobine skalarnog proizvoda date u 6.13 Teoremi 1. Kako je apsolutna vrednost mešovitoeg proizvoda vektora x, y i z jednaka zapremini paralelepipeda razapetog nad tim vektorima, imamo

$$|[x, y, z]| = |[y, z, x]| = |[z, x, y]|.$$

Da bismo završili dokaz svojstva (P2) potrebno je dokazati da isto orijentisani reperi imaju isti znak mešovitoeg proizvoda. Primetimo da je dovoljno pokazati jednakost $[x, y, z] = [y, z, x]$.

Pretpostavimo npr. da je $[x, y, z] > 0$. Iz dokaza prethodne Teoreme 1 vidimo da je ugao $\angle(x \times y, z)$ oštar, tj. da su vektori $x \times y$ i z sa iste strane ravni određene vektorima x i y . Tada su i vektori $y \times z$ i x sa iste strane ravni određene vektorima y i z (Slika 3), pa je i ugao $\angle(y \times z, x)$ oštar, tj. $[y, z, x] > 0$. Time je pokazano svojstvo (P2). Pokažimo sada osobinu (P4),

$$[x + y, z, v] = [z, v, x + y] = (z \times v) \cdot (x + y) = (z \times v) \cdot x + (z \times v) \cdot y = [z, v, x] + [z, v, y] = [x, z, v] + [y, z, v].$$

Za dokaz preostalog svojstva (L3) primetimo da je dovoljno proveriti da je

$$[(x + y) \times z] \cdot v = [(x \times z) + (y \times z)] \cdot v,$$

za proizvoljan vektor v , a to se svodi na upravo dokazano svojstvo (P4). $\square$

6.20. Vektorski i mešoviti proizvod u koordinatama. Ako je (e_1, e_2, e_3) ortonormirana baza vektorskog prostora V_e tada su vektorski proizvodi vektora baze zadati sledećim tabelama

$$\begin{array}{c|ccc} \times & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & \mathbf{0} & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & \mathbf{0} & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & \mathbf{0} \end{array}, \quad
\begin{array}{c|ccc} \times & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & \mathbf{0} & -e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & \mathbf{0} & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & \mathbf{0} \end{array},$$

pri čemu se prva tabela odnosi na slučaj kada je baza (e_1, e_2, e_3) pozitivno orijentisana, a druga, kada je ta orijentacija negativna. Sada imamo,

Teorema 1. *Neka je (e_1, e_2, e_3) pozitivno orijentisana ortonormirana baza vektorskog prostora V_e i neka su dati vektori, $x = \sum_i x_i e_i$, $y = \sum_i y_i e_i$ i $z = \sum_i z_i e_i$. Tada važe sledeće formule:*

$$(vp) \quad x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$$

$$(mp) \quad [x, y, z] = (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3.$$

Dokaz. Ako iskoristimo Teoremu 2, 6.19. imamo

$$x \times y = \left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 y_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (e_i \times e_j) = \left\{ \begin{array}{l} \text{iz prve tabele pročitamo izraze } e_i \times e_j \\ \text{vidimo da od 9 članova preostane 6 i to} \\ \text{nakon grupisanja uz vektore } e_i \end{array} \right\}$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3,$$

$$[x, y, z] = (x \times y) \cdot z = ((x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3) \cdot (z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3)$$

$$= \{\text{jer je baza ortonormirana}\} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3,$$

Time je dokaz teoreme završen. □

Primetimo da, slično kao i u slučaju skalarnog proizvoda, je vektorski proizvod u potpunosti određen tablicom množenja vektorskih proizvoda baznih vektora e_1, e_2 i e_3 što je posledica svojstava vektorskog proizvoda (L1), (L2) i (L3). Ova primedba se odnosi na proizvoljnu bazu (a_1, a_2, a_3) i tablica množenja zbog svojstva (L1) mora biti kososimetrična, tj.

$$a_{ij} = a_i \times a_j = -a_j \times a_i = -a_{ji}, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3.$$

i tada bi formula za skalarni proizvod u koordinatama bila funkcija najviše od 3 vektorska proizvoda baznih vektora (na dijagonali su uvek 0, i kosa simetrija pokazuje da je preostalih 6 mesta određeno samo sa tri elementa a_{12}, a_{13} i a_{23}).

Primetimo da se vektorski proizvod možemo zapisati u obliku formalne determinante:

$$(6.17) \quad v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3,$$

a mešoviti proizvod možemo zapisati u obliku determinante:

$$(6.18) \quad (v \times w) \cdot u = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

6.21. Gramova matrica. Za vektore $f_1, \dots, f_k$ iz V , posmatramo matricu

$$(6.19) \quad G(f_1, \dots, f_k) = \begin{bmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \dots & \langle f_1, f_k \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \dots & \langle f_2, f_k \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle f_k, f_1 \rangle & \langle f_k, f_2 \rangle & \dots & \langle f_k, f_k \rangle \end{bmatrix}$$

koja se zove **Gramova matrica**. Posebno važna funkcija je determinata ove matrice koja se zove **Gramova determinanta**, tj.

$$\Gamma(f_1, \dots, f_k) = \det(\langle f_i, f_j \rangle) = \det G(f_1, \dots, f_k).$$

Od mnogobrojnih svojstava Gramove determinante za nas su važna svojstva data u sledećoj teoremi.

Teorema. *Neka je V konačnodimenzioni euklidski prostor, i neka su $f_1, \dots, f_k \in V$ tada je:*

- (i1) $\Gamma(f_1 + \lambda f_2, f_2, \dots, f_k) = \Gamma(f_1, f_2, \dots, f_k).$
- (i2) Ako je $f_k \perp \mathcal{L}(\{f_1, \dots, f_{k-1}\})$ onda je $\Gamma(f_1, \dots, f_k) = \|f_k\|^2 \Gamma(f_1, \dots, f_{k-1}).$
- (i3) $\Gamma(f_1, \dots, f_k) = (\text{Vol } P(f_1, \dots, f_k))^2 \geq 0$, gde smo sa $\text{Vol } P(f_1, \dots, f_k)$ obeležili zapreminu k -dimenzionog paralelepipeda $P(f_1, \dots, f_k)$ razapetog vektorima $f_1, \dots, f_k.$
- (i4) Skup vektora $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ je linearno nezavisan akko $\Gamma(f_1, \dots, f_k) \neq 0.$

4. Linearni operatori

6.22. Definicija. Preslikavanje $A : U \longrightarrow V$, gde su U, V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$ ²⁴ nazivamo **linearni operator**²⁵ ili **linearna transformacija**²⁶ ako važi $(\forall x, y \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$:

- (a) $A(x + y) = A(x) + A(y),$
- (b) $A(\alpha x) = \alpha A(x),$

²⁴ ili nad proizvoljnim poljem $(\mathbb{F})$,

²⁵ Tradicionalno se preslikavanja između dva vektorska prostora nazivaju operatorima.

²⁶ Termin linearna transformacija se više koristi ako je $U = V.$

Ponekad se u obeležavanju linearnih operatora koristi i skraćena oznaka $Ax := A(x)$. Injektivni linearni operator nazivamo **monomorfizmom**, surjektivni **epimorfizmom**, a bijektivni **izomorfizmom**. Ako je $U = V$ tada za linearni operator kažemo da je **endomorfizam** od V , bijektivni endomorfizam nazivamo **automorfizmom**.

Skup svih linearnih operatora sa U u V obeležavamo sa $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, kada je poznato polje $\mathbb{F}$ onda ga ispuštamo iz ove oznake. Ako je $U = V$ oznaku još skraćujemo i pišemo samo $\text{Hom } V$.

PRIMEDBA. Napomenimo da su gornja dva uslova (a) i (b) ekvivalentna sa uslovom

$$(i2) \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \quad x, y \in U, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Primeri. (i1) **Nula preslikavanje**. Neka je $O : U \rightarrow V$, nula preslikavanje koje sve $x \in U$ preslikava u $O \in V$. Tada je jasno, da za sve x, y , i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi

$$O(\alpha x + \beta y) = O = \alpha O(x) + \beta O(y),$$

tj. nula preslikavanje je linearni operator (*nula operator*).

(i2) **Identičko preslikavanje**. Neka je V vektorski prostor, tada je identičko preslikavanje, $\text{id}(x) = x$, $\forall x \in V$, očigledno jedan linearni operator.

(i3) **Projekcija**. Neka je $P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ preslikavanje definisano formulom

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 0, x_3, 0),$$

tj. **projekcija** na ravan x_1x_3 . Pokažimo da projekcija P , zadovoljava uslov (i2) iz prethodne definicije, tj. da je linearni operator. Za vektore $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ i $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo redom,

$$\begin{aligned} P(\alpha x + \beta y) &= P(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1, 0, \alpha x_3 + \beta y_3, 0) \\ &= (\alpha x_1, 0, \alpha x_3, 0) + (\beta y_1, 0, \beta y_3, 0) = \alpha (x_1, 0, x_3, 0) + \beta (y_1, 0, y_3, 0) \\ &= \alpha P(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta P(y_1, y_2, y_3, y_4) = \alpha P(x) + \beta P(y). \end{aligned}$$

(i4) **Diferenciranje**. Neka je V vektorski prostor svih glatkih²⁷ funkcija na $\mathbb{R}$. Tada je operator diferenciranja $D = d/dt : V \rightarrow V$ linearan operator jer za sve $f, g \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ važi,

$$D(f + g) = \frac{d(f + g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt} = D(f) + D(g), \quad D(\alpha f) = \frac{d(\alpha f)}{dt} = \alpha \frac{df}{dt} = \alpha D(f).$$

Kao što smo videli u prethodnim primerima za proveravanje da je neko preslikavanje linearni operator koristićemo neki od dva ekvivalentna uslova iz definicije linearnog operatora, u zavisnosti od toga koja nam je od tri osobine najpogodnija. Obično će to biti uslov (i2), a ponekad (i1).

²⁷ 'glatka funkcija' = 'beskonačno puta diferencijabilna funkcija'.

Za proizvoljni linearni operator $A \in \mathbf{Hom}(U, V)$, kao i kod svakog preslikavanja, ima smisla posmatrati **sliku** preslikavanja $\mathbf{Im} A = A(U)$, ali kako u svakom vektorskom prostoru postoji istaknuti element-nula vektor, važnu ulogu igra i skup $\mathbf{Ker} A = A^{-1}(\mathbf{0}) = \{x \in U \mid Ax = \mathbf{0}\}$ kojeg nazivamo **jezgro** linearnog operatora A .

U narednim tvrđenjima bavimo se osnovnim svojstvima linearnih operatora.

Teorema 1. *Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$, i neka je $A \in \mathbf{Hom}(U, V)$ linearni operator. Tada je*

- (i1) $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
- (i2) $A(-x) = -A(x)$,
- (i3) *Ako je U_1 potprostor od U tada je i $A(U_1)$ potprostor od V ,*
- (i4) *Ako je V_1 potprostor od V tada je i $A^{-1}(V_1)$ potprostor od U ,*
- (i5) *Specijalno, $\mathbf{Im} A$ i $\mathbf{Ker} A$ su potprostori,*

Dokaz. (i1) Kako je $A(\mathbf{0}) = A(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = A(\mathbf{0}) + A(\mathbf{0})$, dodajući levoj i desnoj strani ove jednakosti inverzni element od $A(\mathbf{0})$, tj. $-A(\mathbf{0})$, dobijamo traženu jednakost.

(i2) Kako u svakom vektorskom prostoru važi: $-x = (-1) \cdot x$, biće $A(-x) = A((-1) \cdot x) = (-1) \cdot A(x) = -A(x)$.

(i3) Neka su $x, y \in A(U_1)$ tada postoje $u, v \in U_1$ takvi da je $A(u) = x$ i $A(v) = y$, i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada redom imamo: $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \cdot A(u) + \beta \cdot A(v) = A(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)$,

tj. vektor $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in A(U_1)$, budući da je vektor $z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U_1$ (jer je U_1 potprostor).

(i4) Neka su $x, y \in A^{-1}(V_1)$, tada postoje $u = A(x), v = A(y) \in V_1$, i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada za $z = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ redom imamo: $A(z) = A(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot A(x) + \beta \cdot A(y) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in V_1$,

jer je V_1 potprostor. Time je pokazano da je $A^{-1}(V_1)$ potprostor od U .

(i5) Kako je $\mathbf{Im} A = A(U)$, zbog (i3) $\mathbf{Im} A$ je potprostor od V . Slično za $V_1 = A^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{Ker} A$, na osnovu

(i4) zaključujemo da je vektorski prostor od U . □

Teorema 2. *Kompozicija linearnih operatora je linearni operator. Algebarska struktura $(\mathbf{Hom} V, \circ)$, za $\dim V \geq 2$ je nekomutativni monoid²⁸, čiji invertibilni elementi su bijekcije.*

Dokaz. Neka su $A : U \longrightarrow V$ i $B : V \longrightarrow W$ linearni operatori, pokažimo da je i $B \circ A : U \longrightarrow W$ linearni operator. Za $\forall x, y \in U$ i $\forall \alpha, \beta \in F$ imamo,

$$\begin{aligned} \underline{(A \circ B)(\alpha x + \beta y)} &= A(B(\alpha x + \beta y)) = A(\alpha B(x) + \beta B(y)) \\ &= \alpha A(B(x)) + \beta A(B(y)) = \underline{\alpha (A \circ B)(x) + \beta (A \circ B)(y)}. \end{aligned}$$

Prethodna tvrdnja pokazuje da je $\mathbf{Hom} V$ zatvoren s obzirom na kompoziciju. Kako je kompozicija preslikavanja asocijativna potrebno je još pokazati da postoji neutral. Očigledno je identičko preslikavanje neutral.

Pokažimo da ovaj monoid nije komutativan. Neka je $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ neka baza od V , i neka su

$$A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_1, 0, \dots, 0), \quad \text{ i } \quad B(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, 0, 0, \dots, 0),$$

linearni operatori²⁹ na V . Sada računamo,

$$(A \circ B)(1, 1, \dots, 1) = A(B(1, 1, \dots, 1)) = A(1, 0, \dots, 0) = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$(B \circ A)(1, 1, \dots, 1) = B(A(1, 1, \dots, 1)) = B(0, 1, 0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0),$$

²⁸ Algebarska struktura $(G, \diamond)$ je monoid ako je: $\diamond$ binarna operacija na skupu G , tj. $\diamond : G \times G \longrightarrow G$, koja je asocijativna i poseduje neutral.

²⁹ Dokazati !

odakle odmah sledi da je $A \circ B \neq B \circ A$.

Neka je $A \in \text{Hom } V$ bijekcija, potrebno je pokazati da je inverzno preslikavanje A^{-1} takođe linearno. Neka su a, b proizvoljni vektori iz V i α, β proizvoljni skalari i kako je A bijekcija, postoje vektori x i y iz V takvi da je $a = A(x)$ i $b = A(y)$, tako da redom imamo,

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha a + \beta b) &= A^{-1}(\alpha A(x) + \beta A(y)) = A^{-1}(A(\alpha x + \beta y)) \\ &= (A^{-1} \circ A)(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha A^{-1}(a) + \beta A^{-1}(b). \end{aligned}$$

Dakle, A^{-1} je linearna bijekcija, tj. automorfizam od V . □

6.23. Rang i defekt linearnog operatora. Neka je $A : U \longrightarrow V$ linearni operator, tada se postavlja prirodno pitanje: *koji je najmanji skup podataka koji u potpunosti određuje A .*

Odgovor na ovo pitanje daje sledeća lema.

Lema. *Linearni operator $A \in \text{Hom}(U, V)$ u potpunosti je određen svojim dejstvom na nekoj bazi e vektorskog prostora U .*

Dokaz. Neka je $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ neka baza od U . Obeležimo sa $f_i = Ae_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$) slike baznih vektora pri dejstvu operatora A . Ako sada uzmemo proizvoljni $x \in U$ postojaće jedinstveni skalari $x_1, x_2, \dots, x_m$ takvi da je $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$, jer je e baza od U . Tako da, koristeći linearnost od A , možemo izračunati Ax na sledeći način,

$$(6.20) \quad Ax = A\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i A(e_i) = \sum_{i=1}^m x_i f_i.$$

time je dokaz završen. □

Posledica. $\text{Im } A = \mathcal{L}(\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\})$.

Digresija. Formula (6.20) ponekad se zove i proširenje operatora A po linearnosti.

Neka je $A : U \longrightarrow V$ linearni operator i $\dim U, V < \infty$ ³⁰ i kako su $\text{Ker } A$ i $\text{Im } A$ potprostori definišemo **rang i defekt linearnog operatora**:

$$\text{rang } A = r(A) = \dim(\text{Im } A) \quad \text{i} \quad \text{defekt } A = d(A) = \dim(\text{Ker } A).$$

Važnu ulogu igra sledeća jednostavna teorema.

Teorema (o rang i defektu linearnog operatora). *Neka je $A : U \longrightarrow V$ linearni operator i neka je $\dim U < \infty$, tada je*

$$d(A) + r(A) = \dim U.$$

Dokaz. Neka je $d(A) = \dim \text{Ker } A$ defekt operatora A , i neka je $e_K = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ baza potprostora $\text{Ker } A$. Sada skup e_K nadopunimo vektorima $e_{d+1}, \dots, e_m$ do baze za čitav prostor U . Da bismo dovršili dokaz potrebno je pokazati da su vektori $Ae_{d+1}, \dots, Ae_m$ linearno nezavisni. U tu svrhu računamo,

$$0 = \lambda_{d+1} Ae_{d+1} + \lambda_{d+2} Ae_{d+2} + \dots + \lambda_m Ae_m = A(\lambda_{d+1} e_{d+1} + \lambda_{d+2} e_{d+2} + \dots + \lambda_m e_m),$$

odakle sledi da je vektor $\lambda_{d+1} e_{d+1} + \lambda_{d+2} e_{d+2} + \dots + \lambda_m e_m \in \text{Ker } A$. Kako je $e_K = (e_1, e_2, \dots, e_d)$, kao baza vektorskog prostora $\text{Ker } A$, ujedno i skup generatora od $\text{Ker } A$ sledi da je

$$(6.21) \quad \lambda_{d+1} e_{d+1} + \lambda_{d+2} e_{d+2} + \dots + \lambda_m e_m = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_d e_d.$$

³⁰ zapravo dovoljno je zahtevati samo da je $\dim U < \infty$.

S druge strane znamo da je $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ linearno nezavisan skup, jer je baza vektorskog prostora U , tako da je prethodna jednakost (6.21) moguća samo na trivijalan način, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. Time je pokazano da je skup $\{Ae_{d+1}, Ae_{d+2}, \dots, Ae_m\}$ linearno nezavisan, i dokaz je gotov. $\square$

Posledica 1. *Neka je L pravi potprostor konačnodimenzionog prostora U . Tada L i U nisu izomorfni, tj. ne postoji linearna bijekcija sa U na L .*

Dokaz. Kako je $L \subsetneq U$, tada je $\dim L < \dim U$ i pretpostavimo da postoji linearna bijekcija $A : U \rightarrow L$. Tada bi prethodna teorema implicirala, da je $n = \dim U = r(A) + d(A)$, a kako je $r(A) < n$ sledilo bi da je $d(A) \geq 1$, tj. A ne bi bilo injektivno preslikavanje. Dobijena kontradikcija pokazuje da ne postoji linearna bijekcija sa U na L pa oni nisu izomorfni. $\square$

Posledica 2. *Neka je V konačnodimenzioni prostor i neka je $A : V \rightarrow V$ linearni operator. Tada je ekvivalentno:*

- (i1) A je izomorfizam,
- (i2) A je monomorfizam,
- (i3) A je epimorfizam.

Dokaz. Iz definicija je jasno da iz (i1) slede (i2) i (i3). Dovoljno je dokazati da su tvrdnje (i2) i (i3) ekvivalentne. Dokažimo prvo da iz (i2) sledi (i3). Ako je A monomorfizam, onda je $\text{Ker } A = \{0\}$ i $d(A) = 0$, pa je $r(A) = \dim V$. Kako je s druge strane $\text{Im } A \subseteq V$ i oba vektorska prostora $\text{Im } A$ i V imaju istu dimenziju, oni se podudaraju tj. $\text{Im } A = V$.

Obrat, tj. neka je A epimorfizam, $\text{Im } A = V$, pa je $r(A) = \dim V$ i $d(A) = 0$. Sada iz $d(A) = 0$ zaključujemo da je $\text{Ker } A = \{0\}$, pa je A monomorfizam. $\square$

Primer 1. Neka je $\mathcal{P}_n = \mathbb{R}_n[t] = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ vektorski prostor realnih polinoma stepena manjeg od $n + 1$, i neka je $D = d/dt : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$ operator diferenciranja.

Odredimo rang i defekt operatora D . Kako je skup $e = (1, t, t^2, \dots, t^n)$ baza vektorskog prostora $\mathcal{P}_n$ i kako je $D(e) = (0, 1, 2t, \dots, n t^{n-1})$ zaključujemo da je $d(D) = 1$, jer D samo konstantne polinome preslikava u 0, tako da je, na osnovu **Teoreme o rang i defektu (TRD)**, $r(D) = n$ jer je $\dim \mathcal{P}_{n-1} = n$. Primetimo da je D epimorfizam realnih vektorskih prostora $\mathcal{P}_n$ i $\mathcal{P}_{n-1}$.

PRIMEDBA. Tvrdjenje **Posledica 1 i 2.** nisu tačna ako izbacimo uslov konačne dimenzionalnosti prostora U .

Primer 3: Projektor. Neka je V konačnodimenzioni vektorski prostor i neka je $P : V \rightarrow V$ linearni operator za koje važi da je $P^2 = P$. Linearni operatori sa ovom osobinom veoma su važni u raznim oblastima matematike i zovu se **projektori**.

Svaki projektor P zadovoljava sledeća svojstva:

- (i1) $x \in \text{Im } A$ ako i samo ako je $Px = x$,
- (i2) ako $P \neq \text{id}_V$ onda P nije izomorfizam,
- (i3) $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.

Dokaz. (i1) Neka je $x \in \text{Im } A$ onda postoji $y \in V$ takav da je $x = Py$, pa imamo redom: $Px = P(P(y)) = P^2y = Py = x$. Obratno, ako je $x = Px$ onda je jasno $x \in \text{Im } A$.

(i2) Pretpostavimo da je $P \neq \text{id}_V$, onda je $P - \text{id}_V \neq 0$ i postoji $0 \neq x \in V$ takav da je $(P - \text{id}_V)x \neq 0$ što je ekvivalentno sa $Px \neq x$, i sada (i1) implicira da $x \notin \text{Im } P$, tj. $\text{Im } P \neq V$ i P nije izomorfizam.

(i3) Neka je $x \in \text{Ker } P \cap \text{Im } P$ onda je $Px = 0$ i $Px = x$ odakle zaključujemo da je $x = 0$, pa je suma direktna i jednakost je posledica teoreme o rang i defektu. $\square$

6.24. Regularni operatori. Linearni operator A je **regularan** ako je maksimalnog ranga. Ova definicija ima sledeće dve mogućnosti u zavisnosti od odnosa dimenzija vektorskih prostora U i V :

(i1) ako je $\dim U \leq \dim V$

tada je A regularan akko je $\dim \text{Im } A = \dim U$ i $\text{Ker } A = \{0\}$,

(i2) ako je $\dim U > \dim V$

tada je A regularan akko je $\text{Im } A = V$.

U praksi nas će uglavnom interesovati prvi slučaj iz prethodne definicije. Za linearni operator A kažemo da je **singularan** ako je $\text{Ker } A \neq \{0\}$, tj. $d(A) \geq 1$. Primetimo, da u slučaju (i1) iz definicije regularnosti operatora sledi da su iskazi,

(r1) A nije regularan operator i

(r2) A je singularan operator,

ekvivalentni.

Primetimo, ako je $A : V \rightarrow V$ invertibilan element monoida $(\text{Hom } V, \circ)$, tada je A linearan i bijekcija, odakle sledi da je $\text{Ker } A$ trivijalno i A je regularan.

Obratno, ako je $A : V \rightarrow V$ regularan tada je $r(A) = \dim V$ i $d(A) = 0$. Iz $r(A) = \dim V$ i činjenice da je $\text{Im } A \subseteq V$ sledi da je $\text{Im } A = V$, tj. A je surjekcija. S druge strane $d(A) = 0$ implicira da je A injektivno preslikavanje. Dakle, u ovom slučaju A je bijekcija, koja ima linearni inverz A^{-1} (6.22 Teorema 2). Time smo pokazali sledeću propoziciju.

Propozicija 1. $A \in \text{Hom } V$ je A regularan akko je A invertibilan.

Sledeća propozicija pokazuje da komponovanje linearnog operatora sa leva ili sa desna sa regularnim operatorom ne menja njegov rang.

Propozicija 2. Neka su $A \in \text{Hom } V$, $B \in \text{Hom } (U, V)$ i $C \in \text{Hom } U$ linearni operatori takvi da su A i C regularni. Tada

(i1) $r(A \circ B) = r(B)$,

(i2) $r(B \circ C) = r(B)$,

(i3) $r(A \circ B \circ C) = r(B)$,

(i4) ako je V_1 potprostor vektorskog prostora V , tada je $\dim A(V_1) = \dim V_1$.

Napomenimo da linearni operator $A_1 = A|_{V_1}$ nazivamo **restrikcija operatora** A na potprostor V_1 .

Na skupu $\text{Hom}(U, V)$ definišemo sledeće dve relacije:

- (i1) $A \sim B$ ako je $r(A) = r(B)$,
- (i2) $A \approx B$ ako postoje regularni operatori $S \in \text{Hom } V$ i $T \in \text{Hom } U$ takvi da je $A = S \circ B \circ T$.

Očigledno, relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na $\text{Hom}(U, V)$, zato jer je u njenoj osnovi jednakost³¹, koja jeste relacija ekvivalencije. Ispostavlja se da je i relacija $\approx$ takođe relacija ekvivalencije, i da se podudara sa relacijom $\sim$, tj. važi,

Teorema 1. *Relacije $\sim$ i $\approx$ se podudaraju.*

Dokaz. Ako je $A \approx B$ tada iz prethodne Propozicije 2 sledi da je tada i $A \sim B$. Dokaz obratne implikacije je komplikovaniji i ostavljamo ga čitaocu za vežbu. $\square$

6.25. Izomorfizmi vektorskih prostora. Za dva vektorska prostora U i V nad poljem $\mathbb{R}$ kažemo da su **izomorfna** ako postoji barem jedan izomorfizam sa U u V , tj. postoji barem jedno bijektivno linearno preslikavanje $A : U \rightarrow V$. Oznaka koju koristimo za izomorfizam vektorskih prostora je $\cong$.

Time je definisana relacija 'biti izomorfan' ($\cong$) na skupu $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ svih konačnodimenzionalnih vektorskih prostora nad poljem $\mathbb{R}$. Osnovno svojstvo ove relacije sadržano je u sledećoj lemi.

Lema. *Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{V}(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Potrebno je proveriti da je relacija $\cong$ refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Za refleksivnost, dovoljno je posmatrati identičko preslikavanje $\text{id}_U : U \rightarrow U$, koje je, očigledno, linearno i bijekcija, tj. izomorfizam.

Ako su U i V izomorfni tada postoji linearna bijekcija $A : U \rightarrow V$. U tački 6.22 Teorema 2 pokazali smo da je tada i preslikavanje $A^{-1} : V \rightarrow U$ linearno, a kako je i bijekcija, iz definicije sledi da su V i U izomorfni, tj. relacija $\cong$ je simetrična.

Neka su U, V i $W \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$ vektorski prostori nad $\mathbb{R}$ takvi da je $U \cong V$ i $V \cong W$. Tada postoje linearne bijekcije $A : U \rightarrow V$ i $B : V \rightarrow W$. U tački 6.22 Teorema 2 pokazali smo takođe da je $C = A \circ B$ linearno preslikavanje, a kako je i kompozicija bijekcija bijekcija, sledi da je preslikavanje $C : U \rightarrow W$ izomorfizam vektorskih prostora U i W . Time je pokazana i tranzitivnost relacije $\cong$. $\square$

Kao što znamo, svaka relacije ekvivalencije na nekom skupu razbija taj skup u međusobno disjunktne klase ekvivalencije. Tako je i u upravo posmatranom slučaju skupa $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ i relacije $\cong$. Stoga je potrebno naći neku jednostavnu karakterizaciju klasa ekvivalencije relacije $\cong$ kao i najjednostavnije predstavnike istih. Odgovor na prvo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema. *Dva konačnodimenzionalna vektorska prostora U i V nad istim poljem su izomorfna ako i samo ako imaju istu dimenziju.*

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $\dim U = \dim V = n$. Tada postoje baze $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ od U i $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ od V . Sada definišemo operator $A : U \rightarrow V$, formulom $A(e_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ i operator A proširimo po linearnosti formulom (6.20). Pokažimo da je preslikavanje A , '1-1' i 'na'. Ako je $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ i

³¹ rangova matrica.

$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ biće $Ax = Ay$ akko

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i A(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i=1}^n y_i f_i = \sum_{i=1}^n y_i A(e_i) = A\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = Ay.$$

Kako su koeficijenti nekog vektora u bazi f jedinstveno određeni prethodna jednakost je moguća akko je $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tada je $x = y$, tj. A je '1-1'.

Da bismo pokazali da je A 'na' uzmimo proizvoljni vektor $z = \sum_{i=1}^n z_i f_i \in V$, i sada se nije teško ubediti da je $Ax = z$ za $x = \sum_{i=1}^n z_i e_i$.

Obratno, pretpostavimo sada da su U i V izomorfni, tj. postoji linearna bijekcija $A : U \rightarrow V$. Zbog teoreme o rang i defektu primenjene na operator A prvo imamo,

$$\dim U = r(A) + d(A) = \{\text{jer je } A \text{ monomorfizam } d(A) = 0\} = r(A) = \{\text{jer je } A \text{ 'na'}\} = \dim V,$$

i dokaz je gotov. □

Odgovor na drugo pitanje, tj. da pronademo nekog predstavnika klasa ekvivalencije relacije $\cong$, već znamo: to su vektorski prostori $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, ($n \in \mathbb{N}$), vidi tačku 6.2. Iz pomenute tačke možemo videti da su oznake u prostorima $\mathbb{R}^n$ najjednostavnije i da su oni najbolji prototipovi vektorskih prostora nad poljem $\mathbb{R}$ dimenzije n . Prethodna činjenica pokazuje važnost vektorskih prostora $\mathbb{R}^n$, u suštini sva naša istraživanja o konačnodimenzionim vektorskim prostorima možemo svesti na proučavanja vektorskih prostora $\mathbb{R}^n$.

6.26. Algebra $\text{Hom } V$. U prethodnim tačkama bavili smo se nekim svojstvima linearnih operatora nad poljem $\mathbb{R}$ (sve isto važi nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F}$), tj. elementima skupa $\text{Hom}(U, V)$. Ova tačka posvećena je otkrivanju algebarske strukture skupa $\text{Hom}(U, V)$. Tako dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 1. (i1) Uređena četvorka $\text{Hom}(U, V) = (\text{Hom}(U, V), \mathbb{R}, +, \cdot)$, gde je

$$(a) (A + B)(x) = Ax + Bx, \text{ za sve } A, B \in \text{Hom}(U, V) \text{ i za sve } x \in U,$$

$$(m) (\lambda \cdot A)(x) = \lambda \cdot Ax, \text{ za sve } A \in \text{Hom}(U, V), \lambda \in \mathbb{R} \text{ i za sve } x \in U.$$

je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$.

(i2) Ako su $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ i $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ neke dve baze vektorskih prostora U i V , redom, i ako sa E_{ij} obeležimo linearni operator, koji u paru baza e i f deluje na sledeći način:

$$(6.22) \quad E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i, \text{ tada je skup } E = \{E_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$$

baza vektorskog prostora $\text{Hom}(U, V)$. Specijalno, $\dim \text{Hom}(U, V) = \dim U \cdot \dim V$.

Dokaz. (i1) Iz definicije sabiranja linearnih operatora i množenja linearnih operatora sa skalarima lako se vidi da je $\text{Hom}(U, V)$ vektorski prostor, jer se potrebna svojstva linearnih operatora svode na odgovarajuća svojstva u vektorskim prostorima U i V .

(i2) Potrebno je proveriti da je skup operatora E ³² linearno nezavisan i da je skup generatora.

³²Primetite da su sada, u smislu definicije vektorskog prostora, vektori linearni operatori.

Linearna nezavisnost skupa E sledi iz

$$\mathbb{O}(e_k) = \mathbf{0} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} E_{ij} \right) (e_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} E_{ij}(e_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} \delta_{jk} f_i = \sum_{i=1}^n \lambda_{ik} f_i, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

i kako je skup $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ linearno nezavisan, prethodna jednakost moguća je samo na trivijalan način: $\lambda_{k1} = \lambda_{k2} = \dots = \lambda_{kn} = 0$, za sve $k = 1, 2, \dots, m$.

Sada uzmimo proizvoljni $A \in \text{Hom}(U, V)$, tada u paru baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ i $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, imamo

$$(6.23) \quad \boxed{Ae_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} f_i}, \quad \alpha_{ik} \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Posmatrajmo sada linearni operator $B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} E_{ij}$. Tvrdimo da je $B = A$, i da bi to dokazali potrebno je da proverimo da operatori A i B jednako deluju na bazi e . Sada računamo,

$$B(e_k) = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} E_{ij} \right) (e_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} E_{ij}(e_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \delta_{jk} f_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} f_i \stackrel{(6.23)}{=} Ae_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

odakle sledi da je linearno nezavisan skup E i skup generatora vektorskog prostora $\text{Hom}(U, V)$, tj. E je baza od $\text{Hom}(U, V)$. Kako skup E ima $m \cdot n$ elemenata sledi i formula za dimenziju od $\text{Hom}(U, V)$. $\square$

Primetimo, da smo u dokazu tvrdnje (i2) prethodne teoreme morali uzeti par baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ i $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, od U i V , redom. I tada smo linearnom operatoru A formulom (6.23) dodelili matricu $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$. Iz tačke 6.3 znamo da je skup $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ takođe vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije $m \cdot n$, iste kao i vektorski prostor $\text{Hom}(U, V)$. Dakle, sada za fiksirane baze $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ i $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, od U i V , redom, možemo definisati fundamentalno preslikavanje,

$$(6.24) \quad \varphi_{e,f} : \text{Hom}(U, V) \longrightarrow \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R}), \quad \text{formulom} \quad \varphi_{e,f}(A) \stackrel{(6.23)}{=} \mathcal{A} = (\alpha_{ij}).$$

Ispostavlja se da je preslikavanje $\varphi_{e,f}$ linearno i bijekcija, tj. da važi:

Teorema 2. *Vektorski prostori $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V)$ i $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ su izomorfni.*

PRIMEDBA 1. Zbog onoga što je rečeno na kraju prethodne tačke, mogli smo u razmatranjima ove tačke uzeti da je $U = \mathbb{R}^m$ i $V = \mathbb{R}^n$.

PRIMEDBA 2. Kao što znamo kompozicija linearnih operatora je linearni operator, i da bismo to iskoristili da dobijemo neku bogatiju strukturu na $\text{Hom}(U, V)$, potrebno je uzeti da je $U = V$. Od ranije znamo da je $(\text{Hom } V, \circ)$ monoid. U tački 6.11 Teorema pokazali smo da je $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ asocijativna $\mathbb{R}$ -algebra sa jedinicom. Sada očekujemo da isto važi i za $\text{Hom } V$, i da se preslikavanje $\varphi_e = \varphi_{e,e}$ može proširiti do izomorfizma $\mathbb{R}$ -algebri $(\text{Hom } V, \circ)$ i $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Da je to tako dokazujemo u sledećoj teoremi.

Teorema 3. (i1) *Uređena petorka $\text{Hom } V = (\text{Hom } V, \mathbb{R}, +, \circ, \cdot)$, je asocijativna algebra sa jedinicom.*

(i2) *Asocijativne algebre sa jedinicom $\text{Hom } V$ i $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ su izomorfne.*

(i3) *Izomorfizam $\varphi_e : \text{Hom } V \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ preslikava regularne (invertibilne) operatore u regularne (invertibilne) matrice.*

Posledica. Neka je $\varphi_e(A) = \mathcal{A}$. Matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$ je regularna ako i samo ako $r(A) = n$.

PRIMEDBA 1. Primetimo, termini "regularan" i "invertibilan" podudaraju se u algebri $\text{Hom } V$ i $\mathbb{M}_n$.

PRIMEDBA 2. Iz gornjeg dokaza postaje jasnije zašto je množenje matrica uvedeno relativno komplikovanom formulom. Suština je u činjenici da množenju matrica odgovara kompozicija odgovarajućih operatora. Budući da su linearni operatori apstraktni objekti (kao takvi nisu operativni), njima nakon što izaberemo neke baze vektorskih prostora, dodeljujemo matrice (matrice operatora u izabranoj bazi) sa kojima znamo računati (jer su matrice operativni objekti). Time je rešen problem računanja u algebri $\text{Hom } V$, tj. ono je izomorfizmom φ_e svedeno na računanje u algebri $\mathbb{M}_n$. Jasno, važi i obratna veza, tj. kada nešto računamo sa matricama na uobičajen način, u suštini radimo (u pozadini) sa nekim linearnim operatorima.

Primetimo, da na izomorfizam φ_e možemo gledati kao na 'prevodilac' sa jezika linearnih operatora na jezik matrica.

5. Elementarne transformacije

6.27. Rang matrice. Očekujemo da se svi pojmovi koje smo definisali (i eventualno budemo kasnije) za linearne operatore direktno prenose pomoću izomorfizma $\varphi_{e,f}$, na matrice.

Očigledno je da iz formule (6.23) sledi da vektori $a_1 = Ae_1, a_2 = Ae_2, \dots, a_m = Ae_m$ čine kolone matrice $\varphi_{e,f}(A) = \mathcal{A} = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, i kako s druge strane znamo da vektori $a_1 = Ae_1, a_2 = Ae_2, \dots, a_m = Ae_m$ razapinju potprostor $\text{Im } A$, čija dimenzija je rang linearnog operatora A i koji je jednak maksimalnom broju linearno nezavisnih vektora u skupu $\{a_1 = Ae_1, a_2 = Ae_2, \dots, a_m = Ae_m\}$, definišemo rang matrice $\mathcal{A}$ kao maksimalan broj njenih linearno nezavisnih kolona.

Dakle, ako je data neka matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tada na nju možemo gledati kao na sliku nekog operatora $A \in \text{Hom}(U, V)$ pri dejstvu izomorfizma $\varphi_{e,f}$, pri čemu su e i f neke baze od U i V , redom. Jasno, rang operatora A ne zavisi od izbora baza e i f .

Ako je $\mathcal{A}$ neka generička (u opštem obliku) matrica, tada ne možemo jednim pogledom na matricu $\mathcal{A}$ odrediti maksimalan broj njenih linearno nezavisnih kolona. Ali za sledeću matricu,

$$\mathbb{D}_{nm}^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & \mathcal{O}_{r\,m-r} \\ \hline \mathcal{O}_{n-r\,r} & \mathcal{O}_{n-r\,m-r} \end{array} \right],$$

pri čemu je $\mathbb{I}_r$ jedinična matrica reda r ($r \leq \min\{m, n\}$) i gde su $\mathcal{O}_{r\,m-r}$, $\mathcal{O}_{n-r\,r}$ i $\mathcal{O}_{n-r\,m-r}$ nula matrice odgovarajućih redova, nije teško odrediti njen rang i on iznosi r .

Matrice $\mathbb{D}_{mn}^r$ nazivamo **kanonskim matricama** ranga r tipa $m \times n$.

Postavlja se pitanje kako polaznu matricu dovesti nekim transformacijama, koje ne menjaju rang, do neke od kanonskih matrica $\mathbb{D}_{nm}^r$?

Odgovor na ovo pitanje daju sledeće jednostavne transformacije, koje zbog toga nazivamo **elementarnim transformacijama**.

Elementarne transformacije (ET) nad vrstama (kolonama) su:

- (el1) Množenje vrste (kolone) sa skalarom $\neq 0$,
- (el2) Zamena dve vrste (kolone),
- (el3) Dodavanje j -te vrste (kolone) i -toj vrsti (koloni), $i \neq j$.

Primetimo da se elementarne transformacije mogu realizovati množenjem polazne matrice sa regularnim matricama koje se malo razlikuju od jedinične matrice. Formula za množenje matrica (6.1) je komplikovana i da bi se ovako jednostavne elementarne transformacije mogle realizovati množenjem polazne matrice *elementarnim matricama*, te elementarne matrice se vrlo malo razlikuju od jedinične matrice. Videćemo uskoro da se elementarne transformacije nad vrstama mogu realizovati množenjem elementarnim matricama s leva, a nad kolonama s desna. Pre nego što uvedemo elementarne matrice prisetimo se **tačke 6.4** gde smo uveli sledeće oznake: Jediničnu matricu možemo videti kao dopisane kolone vektora kanonske baze $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, tj. $\mathbb{I}_n = [e_1, e_2, \dots, e_n] \in \mathbb{M}_n$. Podsetimo se da smo vektore kanonske baze vektorskog prostora matrica $\mathbb{M}_n$ obeležavali sa $\mathbb{E}_{ij}$. Elementarne matrice koje odgovaraju elementarnim transformacijama (el1), (el2) i (el3), redom su :

$$\mathbb{F}_{i,\lambda} = {}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}_{ij} = [e_1, \dots, \overset{i}{e}_j, \dots, \overset{j}{e}_i, \dots, e_n], \quad \mathbb{E}'_{ij} = {}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \overset{j}{0} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

PRIMEDBA. Iz gornjeg zapisa elementarnih matrica vidimo da je:

(em1) matrica $\mathbb{F}_{i,\lambda}$ dijagonalna što zapisujemo kao $\mathbb{F}_{i,\lambda} = \text{diag}[1, 1, \dots, \overset{i}{\lambda}, 1, \dots, 1] \in \mathbb{M}_n$ pri čemu $\lambda \neq 0$.

(em2) matrica $\mathbb{G}_{ij}$ $i < j$, dobija se iz jedinične matrice $\mathbb{I}_n$ ako zamenimo i -tu i j -tu kolonu (ili vrstu).

(em3) matrica $\mathbb{E}'_{ij}$ jednaka je $\mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij}$.

Primetimo da su sva tri tipa elementarnih matrica maksimalnog ranga n , pa su regularne i imaju inverze:

(em1) Lako sledi jer je $\mathbb{F}_{i,\lambda} \mathbb{F}_{i,\frac{1}{\lambda}} = \mathbb{I}_n$, i kako je inverzna matrica jedinstvena sledi da je $\mathbb{F}_{i,\lambda}^{-1} = \mathbb{F}_{i,\frac{1}{\lambda}}$.

(em2) Budući da se matrica $\mathbb{G}_{ij}$ dobije iz jedinične matrice ako u jediničnoj matrici zamenimo i -tu i j -tu kolonu (ili vrstu), pa ako to još jednom uradimo dobićemo jediničnu matricu, tako vidimo da je $\mathbb{G}_{ij}^2 = \mathbb{I}_n$. Odakle opet zbog jedinstvenosti inverza sledi da je $\mathbb{G}_{ij}^{-1} = \mathbb{G}_{ij}$.

(em3) Ako pomnožimo matricu $\mathbb{E}'_{ij} = \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij}$ sa matricom $\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{ij}$ dobićemo redom $(\mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij})(\mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{ij}) = \mathbb{I}_n^2 - \mathbb{E}_{ij}^2 = \mathbb{I}_n$, jer je $\mathbb{I}_n^2 = \mathbb{I}_n$ i $\mathbb{E}_{ij}^2 = \mathcal{O}$ (za $i < j$).
Primetimo da smo time pokazali da je $(\mathbb{E}'_{ij})^{-1} = \mathbb{I}_n - \mathbb{E}_{ij}$.

Primer. Neka je data matrica $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \in M_{2,3}$.

Izračunajte matrice $\mathbb{F}_{2,5} \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \mathbb{F}_{3,3}$, $\mathbb{G}_{32} \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \mathbb{G}_{32}$, i $\mathbb{E}'_{12} \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \mathbb{E}'_{23}$.

Rešenje. Kako je matrica $\mathcal{A}$ tipa 2×3 ne postoji matrica $\mathbb{G}_{32} \mathcal{A}$ jer je matrica $\mathbb{G}_{32}$ tipa 3×3 i ne može se pomnožiti matricom tipa 2×3 . Ostale matrice postoje i jednake su:

$$\mathbb{F}_{2,5} \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 5\alpha_{21} & 5\alpha_{22} & 5\alpha_{23} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} \mathbb{F}_{3,3} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 3\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 3\alpha_{23} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} \mathbb{G}_{32} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{E}'_{12} \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{21} & \alpha_{12} + \alpha_{22} & \alpha_{13} + \alpha_{23} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} \mathbb{E}'_{23} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{12} + \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{22} + \alpha_{23} \end{bmatrix},$$

Sledeća teorema pokazuje da u konačno koraka primenom elementarnih transformacija nad vrstama i kolonama³³ polazne matrice $\mathcal{A}$ dolazimo do neke kanonske matrice iz koje odmah vidimo koliki je rang polazne matrice $\mathcal{A}$.

Teorema. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ neka matrica ranga $r \in \{0, 1, \dots, \min(n, m)\}$. Tada postoji konačan broj elementarnih transformacija nad vrstama i kolonama matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ tako da njihovom primenom, matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ svodimo na kanonsku matricu $\mathbb{D}_{nm}^r$.

Specijalno, ako je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ regularna matrica tada ju je moguće svesti na jediničnu matricu primenom elementarnih transformacija **samo** nad vrstama (kolonama) matrica $\mathcal{A}$.

Dokaz. Dokaz je algoritamski³⁴, zato ga dajemo u obliku koraka algoritma.

- (i0) Pretpostavimo da je $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \neq \mathbb{D}_{nm}^r$, jer tada nemamo šta dokazivati.
- (i1) Postoji neki matični element matrice $\mathcal{A}_0$ koji se ne poništava, tj. $\alpha_{ij} \neq 0$,
- (i2) i -tu vrstu matrice $\mathcal{A}_0$ prvo pomnožimo sa $1/\alpha_{ij}$ tako da će u dobijenoj matrici $\mathcal{A}_1 = (\alpha_{ij}^1)$ matični element na mestu (i, j) biti jednak 1.
- (i3) i -tu vrstu matrice $\mathcal{A}_1$ množimo redom elementima $-\alpha_{1j}^1, -\alpha_{2j}^1, \dots, -\alpha_{i-1,j}^1, -\alpha_{i+1,j}^1, \dots, -\alpha_{1n}^1$ i dodajemo redom 1.-oj, 2.-oj, ..., $(i-1)$ -oj, $(i+1)$ -oj, ..., n -toj vrsti matrice $\mathcal{A}_1$. Nakon primene ovih elementarnih transformacija dolazimo do matrice $\mathcal{A}_2 = (\alpha_{ij}^2)$ u kojoj su svi elementi j -te kolone jednaki 0 osim elementa α_{ij}^2 koji je jednak 1.
- (i4) Sada množimo redom j -tu kolonu matrice $\mathcal{A}_2$ sa $-\alpha_{i1}^2, -\alpha_{i2}^2, \dots, -\alpha_{ij-1}^2, -\alpha_{ij+1}^2, \dots, -\alpha_{im}^2$ i dodajemo redom 1.-oj, 2.-oj, ..., $(j-1)$ -oj, $(j+1)$ -oj, ..., m -toj koloni matrice $\mathcal{A}_2$. Nakon primene ovih elementarnih transformacija dolazimo do matrice $\mathcal{A}_3 = (\alpha_{ij}^3)$ u kojoj su svi elementi i -te vrste i j -te kolone jednaki 0 osim elementa α_{ij}^3 koji je jednak 1.
- (i5) ako se matrica $\mathcal{A}_3$ može svesti nekim zamenama vrsta i kolona na matricu $\mathbb{D}_{nm}^r$ onda smo gotovi, a ako to nije slučaj možemo pronaći matični element $0 \neq \alpha_{i_1 j_1}^3$ ($i_1 \neq i, j_1 \neq j$) matrice $\mathcal{A}_3$, i vratimo se na korak (i1), jer je ispunjen uslov iz (i1), ali za matricu $\mathcal{A}_3$. Zatim ponovimo korake (i2), (i3), (i4) i (i5), za matricu $\mathcal{A}_3$ (umesto $\mathcal{A}_0$), itd....
- (i6) Algoritam, ako nije završio u koraku (i0), zbog konačnog broja vrsta i kolona matrice $\mathcal{A}$, mora završiti u nekoj primeni koraka (i5).

³³ koje ne menjanju rang !

³⁴ i primenjujemo ga pri rešavanju konkretnih zadataka

U slučaju kada je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ regularna matrica, u prethodnom algoritmu samo preskočimo korak (i4), i u najviše $n + 1$ ³⁵ ponavljanja koraka (i1),(i2),(i3) i (i5) dolazimo do jedinične matrice. $\square$

Primedba 1. Kako smo videli da elementarnim transformacijama (el1), (el2) i (el3) nad vrstama odgovara množenje s leva regularnim matricama $\mathbf{F}_{i,\lambda}$, $\mathbf{G}_{ij}$ i $\mathbf{E}'_{ij}$, redom, a elementarnim transformacijama nad kolonama odgovara množenje s desna tim istim matricama, prethodna teorema implicira sledeću relaciju:

$$(6.25) \quad \mathbf{D}_{nm}^r = \underbrace{\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \cdots \mathcal{S}_k}_{\mathcal{S}} \mathcal{A} \underbrace{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 \cdots \mathcal{T}_s}_{\mathcal{T}} = \mathcal{S} \mathcal{A} \mathcal{T}$$

gde su matrice $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ regularne kao proizvod regularnih elementarnih matrica $\mathcal{S}_p \in \{\mathbf{F}_{i,\lambda}, \mathbf{G}_{ij}, \mathbf{E}'_{ij} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, i \neq j, i, j = 1, \dots, n\}$ i $\mathcal{T}_p \in \{\mathbf{F}_{i,\lambda}, \mathbf{G}_{ij}, \mathbf{E}'_{ij} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, i \neq j, i, j = 1, \dots, m\}$ i

Primedba. Kako primenom elementarnih transformacija polaznu matricu $\mathcal{A}$, ranga r , svodimo na kanonsku matricu $\mathbf{D}_{nm}^r$, i kako kanonska matrica $\mathbf{D}_{nm}^r$, ima jednake maksimalne brojeve linearno nezavisnih vrsta i kolona (njih r), zaključujemo da i polazna matrica $\mathcal{A}$ ima jednake maksimalne brojeve linearno nezavisnih vrsta i kolona. Drugim rečima definicija ranga matrice ne zavisi od izbora da li rang računamo po kolonama ili vrstama.

Primer. Odredimo dimenziju lineala razapetog vektorima: $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$ i $a_3 = (8, 1, 3)$. Problem je ekvivalentan određivanju ranga matrice $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & \boxed{1} \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(1) Uočimo prvo jedinicu na komponenti (2,3) matrice $\mathcal{A}$, a zatim pomnožimo prvo 3.-ću kolonu matrice $\mathcal{A}$ sa (-4) i dodamo 1.-oj koloni, a zatim 3.-ću kolonu pomnožimo sa (-3) i dodamo 2.-oj koloni. Nakon ovih elementarnih transformacija dobijamo, $\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} -27 & -21 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ -9 & -7 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) Sada pomnožimo 2.-gu vrstu matrice $\mathcal{A}_1$ sa (-8) i dodamo 1.-oj i 2.-gu vrstu sa (-3) i dodamo 3.-oj vrsti, tako da imamo $\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} -27 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -7 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) U matrici $\mathcal{A}_2$ pomnožimo prvu kolonu sa (-1/9), a drugu sa (-1/7) tako da dobijamo $\mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) Ako sada pomnožimo 3.-ću vrstu matrice $\mathcal{A}_3$ sa (-3) i dodamo 1.-oj vrsti, dobijamo $\mathcal{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(5) i ako na kraju pomnožimo 1.-vu kolonu matrice $\mathcal{A}_4$ sa (-1) i dodamo 2.-oj koloni, a zatim zamenimo 1.-vu i 3.-ću vrstu, a zatim i 3.-ću i 2.-gu kolonu dobićemo $\mathcal{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{D}_{33}^2$.

Dakle, kako je $\mathcal{A} \sim \mathbb{D}_{33}^2$ zaključujemo da je $r(\mathcal{A}) = 2 = \dim \mathcal{L}(\{a_1, a_2, a_3\})$.

³⁵ Zašto ne mora biti uvek dovoljno n ponavljanja (koraka (i1),(i2),(i3) i (i5)) da bismo završili posao ?

6.28. Određivanje inverzne matrice. Navedimo sada jednu od "najekonomičnijih" i najboljih metoda za nalaženje inverza koja se zasniva na elementarnim transformacijama nad vrstama polazne matrice $\mathcal{A}$. Da bismo odredili inverz (ako postoji) matrice $\mathcal{A}$ formiramo matricu $n \times (2n)$ tako što dopišemo jediničnu matricu reda n sa desne (leve) strane matrice $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{B} = [\mathcal{A} \mid \mathbb{I}_n]$. Zatim vršimo elementarne transformacije ((el1), (el2) i (el3)) isključivo nad vrstama matrice $\mathcal{B}$, dok ne "transformišemo" $\mathcal{A}$ u $\mathbb{I}_n$, istovremeno se u desnoj polovini matrice $\mathcal{B}$, matrica $\mathbb{I}_n$ transformiše u $\mathcal{A}^{-1}$, tj. imamo:

$$(6.26) \quad [\mathcal{A} \mid \mathbb{I}_n] \xrightarrow{\text{el. transformacije}} [\mathbb{I}_n \mid \mathcal{A}^{-1}].$$

Opravdajmo sada ovu proceduru. Pretpostavimo da matrica $\mathcal{A}$ ima inverznu matricu. Budući da vršimo elementarne transformacije nad vrstama matrice $\mathcal{A}$, matricu $\mathcal{A}$ množimo, sa leve strane, nekim od matrica iz skupa $\{\mathbb{F}_{i,\lambda}, \mathbb{G}_{ij}, \mathbb{E}'_{ij} \mid \lambda \neq 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ dok $\mathcal{A}$ ne transformišemo u $\mathbb{I}_n$, tako da je $\mathcal{S} \cdot \mathcal{A} = \mathbb{I}_n$, gde je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_m \cdot \mathcal{S}_{m-1} \cdot \mathcal{S}_2 \cdot \mathcal{S}_1$.

Množenjem jednakosti $\mathcal{S} \cdot \mathcal{A} = \mathbb{I}_n$ inverzom matrice $\mathcal{A}$ s desna, dobijamo

$$\mathcal{S} \cdot (\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1}) = \boxed{\mathcal{S} \cdot \mathbb{I}_n} = \mathbb{I}_n \cdot \mathcal{A}^{-1} = \boxed{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Odakle, sledi da je $\mathcal{S} \cdot \mathbb{I}_n = \mathcal{A}^{-1}$, tj. ako nad matricom $\mathbb{I}_n$ izvršimo iste transformacije (kao i nad matricom $\mathcal{A}$) opisane matricom $\mathcal{S}$ ona će se transformisati u matricu $\mathcal{A}^{-1}$.

Primedba 1. Primetimo da opisana procedura daje i odgovor na pitanje da li je polazna matrica $\mathcal{A}$ regularna. Ako $\mathcal{A}$ nije regularna onda umesto matrice $\mathbb{I}_n = \mathbb{D}_{nn}^n$, dobijemo neku od kanonskih matrica $\mathbb{D}_{nn}^r$, za $r < n$.

Primedba 2. Isti postupak može se provesti vršeći isključivo elementarne transformacije nad kolonama, ali tada je potrebno matricu $\mathbb{I}_n$ dopisati ispod (ili iznad) matrice $\mathcal{A}$, tj.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathbb{I}_n \end{bmatrix}.$$

Primer. Korišćenjem elementarnih transformacija nad vrstama, odrediti inverz matrice,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Formirajmo, prvo matricu reda $n \times (2n)$ tako što dopišemo jediničnu matricu n sa desne strane matrice $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{B} = [\mathcal{A} \mid \mathbb{I}_n]$.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} 2.v \times (-3) + 1.v \\ 2.v \times (-2) + 3.v \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} 3.v \times (7) + 1.v \\ 3.v \times (-2) + 2.v \end{array} \right\} \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & -17 & 7 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & -17 & 7 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} 1.v + 2.v \\ 1.v \times (-1) \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 17 & -7 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{zamenimo 1.-vu} \\ \text{i 2.-gu vrstu} \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -12 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 17 & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \end{array} \right], \quad \text{Dakle, } \mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.29. Zavisnost matrice operatora o bazi. Neka su U, V i W konačnodimenzioni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$, i neka je $m = \dim U$, $n = \dim V$ i $l = \dim W$. Neka su dati operatori $A : U \longrightarrow V$ i $B : V \longrightarrow W$. i redom baze e, f i g u prostorima U, V i W , i ako je $Ae_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f_i$, $Bf_k = \sum_{l=1}^p \beta_{lk} g_l$, tada je u tački 6.22 pokazano da za matricu linearnog operatora $C = B \circ A$ važi

$$(6.27) \quad C = C(g, e) = B(g, f) A(f, e) = \mathcal{B} \mathcal{A}.$$

U tački 6.12 rešen je problem, veze između koordinata nekog vektora $x \in U$ u paru baza e i e' . Ta veza data je u 6.12 Teorema, tj. važi

$$(6.28) \quad x(e) = T_{ee'} x(e'), \quad \text{gde je } T_{ee'} \text{ matrica prelaska sa baze } e \text{ u bazu } e'.$$

Sada nas interesuje nešto komplikovaniji problem pronalaženje veze između matrice proizvoljnog operatora $A : U \longrightarrow V$ u parovima baza (e, f) i (e', f') .

Rešenje. Neka su e, e' dve baze od U , i f, f' dve baze vektorskog prostora V i neka je $A : U \longrightarrow V$ linearni operator. Uzmimo proizvoljni vektor $x \in U$ i posmatrajmo jednakost $y = Ax$. Koristeći sada formulu (6.27) ova jednakost u paru baza (e, f) ima oblik:

$$(6.29) \quad y(f) = A(f, e) x(e).$$

Analogna formula u paru baza (e', f') glasi:

$$(6.30) \quad y(f') = A(f', e') x(e').$$

Sada iz (6.29), (6.30) i nekoliko primena formule (6.28) dobijamo,

$$A(f, e) T_{ee'} x(e') = A(f, e) x(e) = \boxed{y(f) = T_{ff'} y(f')} = T_{ff'} A(f', e') x(e'),$$

kako je x proizvoljan vektor, iz prethodne formule sledi

$$(6.31) \quad T_{ff'} A(f', e') = A(f, e) T_{ee'} \quad \text{odakle je} \quad A(f', e') = [T_{ff'}]^{-1} A(f, e) T_{ee'},$$

jer je $T_{ff'}$ regularna matrica. Od posebnog interesa je slučaj kada je $V = U$ i kada se baze, e i f odnosno e' i f' , podudaraju tada (6.31) postaje:

$$(6.32) \quad A(e', e') = [T_{ee'}]^{-1} A(e, e) T_{ee'}, \quad \text{ili} \quad A(e') = [T_{ee'}]^{-1} A(e) T_{ee'}.$$

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. Neka su U, V konačnodimenzioni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$. Neka je $A : U \longrightarrow V$ linearni operator i neka su e, e' baze od U i f, f' od V . Tada je veza između matrica operatora A u parovima baza (e, f) i (e', f') data formulom,

$$A(f', e') = [T_{ff'}]^{-1} A(f, e) T_{ee'},$$

pri čemu su $T_{ee'}$ i $T_{ff'}$ matrice prelaska sa baza e u e' i f u f' , redom.

Specijalno, ako je $V = U$ i ako se baze, e i f , odnosno e' i f' podudaraju, tada je

$$(6.33) \quad A(e') = [T_{ee'}]^{-1} A(e) T_{ee'}.$$

Primedba 1. Postavlja se pitanje da li postoje operatori, koji imaju istu matricu u svim bazama. Odgovor na ovo pitanje možemo dobiti, analizirajući jednakost (6.33), u kojoj se matrice $A(e')$ i $A(e)$ podudaraju, tj. $A(e') = A(e) = \mathcal{A}$. Množeći sada

jednakost (6.33) sa leva matricom $T_{ee'} = \mathcal{T}$ dolazimo do relacije $\mathcal{T}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{T}$, koja mora da važi za svaku regularnu matricu $\mathcal{T}$. Jasno, nula operator $\mathbb{O}$ i identitet id , koji su neutrali za sabiranje matrica i množenje matrica, u svakoj bazi imaju iste matrice i to nula matricu $\mathcal{O}_n$ i jediničnu matricu $\mathbb{I}_n$, redom. Ispostavlja se da je tada $\mathcal{A} = \lambda \mathbb{I}_n$.

Primer 2. U tački 6.24 uveli smo relaciju ekvivalentnosti za linearne operatore, koju prenosimo i na matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ su ekvivalentne ako postoje regularne matrice $\mathcal{S} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ i $\mathcal{T} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ takve da je $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{B}\mathcal{T}$. Pokazali smo da je ekvivalentnost matrica relacija ekvivalencije, čije su klase ekvivalencije karakterisane rangom nekog od predstavnika klase. Dakle, u istoj klasi su samo one matrice koje imaju isti rang.

Poslednja relacija (6.33) inspiriše nas da uvedemo relaciju **sličnosti matrica** na skupu kvadratnih matrica $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: *matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ su **slične** ako postoji regularna matrica $\mathcal{T} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takva da je $\mathcal{B} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$.*

Tada važi sledeća jednostavna činjenica.

Propozicija. *Relacija sličnosti matrica na $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Analogno dokazu za relaciju ekvivalentnosti matrica. □

Prethodna teorema otkriva i šta su klase ekvivalencije relacije sličnosti – to su linearni operatori. Dakle, ako su matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ slične tada postoji neki linearni operator $A \in V \cong \mathbb{R}^n$ i baze e, e' tako da je $\mathcal{A}$ matrica operatora A u bazi e , a $\mathcal{B}$ matrica istog operatora A u bazi e' i pri tome je $\mathcal{T} = T_{ee'}$, matrica prelaska sa baze e u bazu e' . Štaviše, možemo uzeti da je baza e kanonska baza u $\mathbb{R}^n$.

Primer 1. Neka je e kanonska baza u $\mathbb{R}^3$, a $f = (f_1, f_2, f_3)$ baza koja se sastoji od vektora $f_1 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$, $f_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$ i $f_3 = -e_1 + 2e_2 + 5e_3$ i neka je $A \in \text{Hom } \mathbb{R}^3$ linearni operator zadat svojom matricom u bazi e ,

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađimo matricu operatora A u bazi f .

Rešenje. Koristeći formulu $A(f) = T^{-1}A(e)T$, gdje je T matrica prelaska sa baze e u bazu f . Prvo nalazimo,

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ a zatim } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i na kraju } A(f) = \begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Determinanta

6.31. Definicija determinante matrice. U ovoj glavi, kao i u nastavku matrice i linearne operator ćemo obeležavati istim simbolima $A, B, C, \dots$, jer će iz konteksta biti jasno o kojem se pojmu radi tako da neće doći do neke zabune.

Determinanta je funkcija, $\det : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, koju definišemo induktivno na sledeći način:

$$n = 1 : \quad \det[a_{11}] = a_{11}$$

$$n = 2 : \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$n = 3 : \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\text{gde su: } A_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = -\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A_{13} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

$\vdots \quad \vdots$

Pretpostavimo da znamo izračunati determinantu matrice reda $k > 3$. Tada definišemo za

$$k : \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + (-1)^{1+k}A_{1k}$$

gde je A_{1j} algebarski komplement ili kofaktor od elementa a_{1j} . Za algebarski komplement A_{ij} važi veza,

$$(6.34) \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A),$$

gde je

$$\Delta_{ij}(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j-1} & \alpha_{1j+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j-1} & \alpha_{2j+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i-11} & \alpha_{i-12} & \dots & \alpha_{i-1j-1} & \alpha_{i-1j+1} & \dots & \alpha_{i-1n} \\ \alpha_{i+11} & \alpha_{i+12} & \dots & \alpha_{i+1j-1} & \alpha_{i+1j+1} & \dots & \alpha_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nj-1} & \alpha_{nj+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

.(6.34)

Primetimo da je $\Delta_{ij}(A)$ determinanta matrica reda $k - 1$, koje se iz matrice A dobija izbacivanjem i -te vrste i j -te kolone. Broj $\Delta_{ij}(A)$ nazivamo **minora** matrice A određena elementom a_{ij} . Budući da su minore $\Delta_{ij}(A)$ reda manjeg od k njih znamo izračunati po induktivnoj pretpostavci, i tako odrediti sve algebarske komplemente, a zatim i $\det A$.

Primer 1. Izračunajmo po definiciji determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Računamo determinantu matrice A razvojem po 1. vrsti (po definiciji).

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (5 + 4) + 2 \cdot (-1 - 6) - 4 \cdot (-2 + 15) = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-7) + (-4) \cdot 13 = 27 - 14 - 52 = -39. \end{aligned}$$

Primer 2. Izračunajmo determinantu gornje trougaone matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$.

Rešenje. Računamo determinantu matrice A razvojem po 1. vrsti (po definiciji).

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} + 0 \cdot a_{23}) - a_{12} \cdot (0 \cdot a_{33} - 0 \cdot a_{23}) - a_{13} \cdot (0 \cdot 0 + 0 \cdot a_{23}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}. \end{aligned}$$

Prethodni primer nije teško generalisati indukcijom na matrice proizvoljnog reda, tj. determinanta gornje trougaone matrice $A = (a_{ij}) \in M_n$ jednaka je proizvodu dijagonalnih elemenata matrice, $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

6.32. Još o definiciji determinante. Svojstva determinante. Pojam determinante se u opštem slučaju definiše koristeći grupu permutacija. Preciznije, sa pojmom permutacije smo se susreli već u 1. glavi ovog teksta, **Uvod**, na sledeći način: za proizvoljni prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ prvo definišemo skup $\mathbb{S}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, a zatim posmatramo bijekcije skupa $\mathbb{S}_n$ koje nazivamo i **permutacijama skupa $\mathbb{S}_n$** . Jasno, $(\mathbb{S}_n, \circ)$ je grupa³⁶ koju nazivamo **grupom permutacija ili simetričnom grupom $\mathbb{S}_n$** . Kao što znamo³⁷, simetrična grupa ima $|\mathbb{S}_n| = n!$ elemenata. Elemente grupe $\mathbb{S}_n$ zapisujemo na sledeći način,

$$(6.35) \quad \sigma = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{array} \right).$$

³⁶ Kompozicija dve bijekcije je bijekcija, kompozicija je uvek asocijativna operacija, neutral za kompoziciju funkcija uvek je identičko preslikavanje i inverz bijekcije je bijekcija.

³⁷ Vidi **Uvod**.

U zapisu permutacije (6.35) gornja vrsta predstavlja elemente skupa $\mathbb{S}_n$, a donja njihove slike. Dakle, za matricu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ definišemo,

$$(6.36) \quad \det A = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

gde je $\mathbb{S}_n$ grupa permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, a $I(\sigma)$ je broj inverzija permutacije σ . Inverzija permutacije σ je svaki uređeni par indeksa (i, j) takav da je $i < j$, a $\sigma(i) > \sigma(j)$. Da bismo izračunali broj inverzija permutacije σ , potrebno je proveriti sve uređene parove $(i, j), i < j$ pri čemu $i, j = 1, 2, \dots, n$. Takvih uređenih parova ima $\binom{n}{2}$. Iz upravo rečenog, jasno je da formula (6.36) nema praktičnu vrednost jer je računanje determinante pomoću ove formule veoma komplikovano: u sumi se pojavljuje $n!$ sabiraka, i za svaki sabirak (permutaciju) je potrebno izračunati broj njenih inverzija $n(n-1)/2$. Formula (6.36) ima teoretski značaj jer je osnovno sredstvo za dokazivanje naredne teoreme.

Teorema. Neka je data matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(i1) determinante matrice A i njoj transponovane matrice A^T su jednake,

$$\det A = \det [a_1, a_2, \dots, a_n] = \det [a^1, a^2, \dots, a^n] = \det A^T.$$

(i2) ako neku kolonu (vrstu) matrice A pomnožimo sa skalarom onda je determinanta te matrice jednaka proizvodu datog skalara i determinante polazne matrice A , tj. preciznije

$$\det [a_1, a_2, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n] = \lambda \det [a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n] = \lambda \det A,$$

$i \in \{1, \dots, n\}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Specijalno, vidimo da je $\det(\lambda \mathbb{I}_n) = \lambda^n$.

(i3) ako je $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ matrica i b proizvoljni vektor ($\in \mathbb{R}^n$) tada za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ važi

$$\det [a_1, a_2, \dots, a_i + b, \dots, a_n] = \det [a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n] + \det [a_1, a_2, \dots, b, \dots, a_n].$$

Analogna tvrdnja važi i za kolone.

(i4) Ako u nekoj matrici zamenimo dve vrste (kolone) onda determinanta menja znak, ili preciznije $\forall j, k = 1, \dots, n, j < k$,

$$\det [a^1, a^2, \dots, a^j, \dots, a^k, \dots, a^j, \dots, a^n] = - \det [a^1, a^2, \dots, a^k, \dots, a^j, \dots, a^n].$$

(i5) Ako je neka vrsta (kolona) matrice A nula vektor (tj. sastoji se od samih nula) onda je $\det A = 0$

(i6) Ako matrica A ima barem dve proporcionalne vrste (kolone) onda je $\det A = 0$.

(i7) Dodavanje linearne kombinacije vrsta (kolona) nekoj drugoj vrsti (koloni) matrice ne menja njenu determinantu ili preciznije (za vrste), ako je $b = \sum_{j \neq i} \alpha_j a_j$, tada je

$$\det [a_1, a_2, \dots, a_i + b, \dots, a_n] = \det [a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n] = \det A.$$

(i8) *Bine*³⁸-*Košijeva*³⁹ teorema. Za bilo koje dve matrice A i $B \in \mathbb{M}_n$ važi formula:

$$\det A B = \det A \cdot \det B.$$

PRIMEDBA. Napomenimo da se naša induktivna definicija determinante (vidi tačku 6.31) može izvesti iz formule (6.36) i zove se Laplasov⁴⁰ razvoj determinante po 1.-oj vrsti. Determinanta proizvoljne matrice može se izračunati razvojem po bilo kojoj vrsti i koloni. Preciznije, za $S \in \mathbb{M}_n$ i za sve $i, r \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi:

$$(6.37) \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} A_{rj} = \delta_{ir} \det A,$$

$$(6.38) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} A_{ir} = \delta_{jr} \det A.$$

Napomena. U slučaju kada je u formuli (6.37) $i = r$, tada dobijenu sumu nazivamo Laplasovim razvojem determinante po i -toj vrsti, a u slučaju kada je u (6.38) $j = r$, druga suma predstavlja Laplasov razvoj determinante po j -toj koloni.

Primetimo da gornje dve formule (6.37) i (6.38) podsećaju na formulu za proizvod matrica, i kada malo bolje pogledamo vidimo da ih možemo prepisati kao proizvod matrica,

$$(6.39) \quad A \cdot \tilde{A} = (\det A) \mathbb{I}_n = \tilde{A} \cdot A,$$

gde je matrica $\tilde{A} = (A_{ji}) = (A_{ij})^\tau$, transponovana matrica algebarskih komplementa matrice A koju nazivamo **adjunkta matrice** A i obeležavamo je sa $\text{adj} A = (A_{ij})^\tau$. Ako je matrica A regularna tada je $\det A \neq 0$, i prethodna formula (6.39), zbog jedinstvenosti inverza, implicira (nakon deljenja sa $\det A$) da je

$$(6.40) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A.$$

6.33. Determinanta kao alternirajući multilinearano preslikavanje. Determinantu matrice $A = (a_{ij})$ možemo shvatiti kao i funkciju njenih vrsta (a^j) ili kolona (a_i), pri tome j -ta vrsta matrice A je vektor $a^j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, a i -ta kolona matrice A je vektor $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$. Tako da na determinantu možemo gledati i kao na funkciju, $\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ primeraka } \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\det A = \det [a_1, a_2, \dots, a_n] = \det [a^1, a^2, \dots, a^n].$$

³⁸ Jacques Philippe Marie Binet, 1786–1856, francuski matematičar i fizičar.

³⁹ Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857, čuveni francuski matematičar, inženjer i fizičar.

⁴⁰ Pierre-Simon, Marquis de Laplace, 1749–1827, veliki francuski matematičar, teorijski mehaničar i astronom.

Svojstva (i2) i (i3) iz 6.32 Teoreme, pokazuju da determinanta shvaćena kao funkcija svojih kolona (vrsta) je linearna po svakom argumentu⁴¹ Takva preslikavanja zovu se **multilinearna (više linearna)**. Svojstvo (i4), iz iste teoreme, kaže da ako zamenimo bilo koja dva argumenta u determinanti promeni se znak determinante, i ovo svojstvo zove se **alterniranost**, tj. kažemo da je **determinanta alternirajuće preslikavanje svojih kolona (vrsta)**. Ispostavlja se da ta dva svojstva suštinska svojstva determinante i da se sva ostala svojstva mogu izvesti iz multilinearnosti i alterniranosti⁴². Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema. *Neka je $d : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, funkcija koja ima svojstva:*

- (ml) *d je multilinearn preslikavanje kolona matrice,*
- (a) *d je alternirajuće preslikavanje kolona, tj. ako u matrici $A = [a_1, \dots, a_n]$ postoje dve jednake kolone onda je $d(A) = 0$ (ili formalnije: $i \neq j$, $a_i = a_j$ tada je $d(A) = 0$),*
- (n) *$d(\mathbb{I}_n) = 1$,*

tada je $d = \det$.

Digresija. Drugim rečima determinanta je jedinstveno određena sa tri svojstva (ml), (a) i (n).

6.34. Determinanta matrice i elementarne transformacije. Primitimo da svojstva (i2) i (i7), kao i 6.31 Primer 2 pokazuju da determinantu polazne matrice možemo računati koristeći elementarne transformacije. Nije se teško ubediti da važi sledeća propozicija.

Propozicija. *Neka je $\mathbb{E}$ neka elementarna matrica reda n , tada za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ važi da je $\det(\mathbb{E} A) = \det \mathbb{E} \det A = \det(A \mathbb{E})$.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{E}$ proizvoljna elementarna matrica reda n , i neka je A neka matrica reda n . Tada je $\mathbb{E} \in \{\mathbb{E}'_{ij}, \mathbb{F}_{k,\lambda}, \mathbb{G}_{ij} \mid \lambda \neq 0, i, j, k = 1, 2, \dots, n, i \neq j\}$, i tačke 6.27 znamo da matrica:

- (e1) $\mathbb{F}_{i,\lambda} A$ ima sve jednake vrste, osim i -te, kao i matrica A , a i -ta vrsta matrice $\mathbb{F}_{i,\lambda} A$ jednaka je proizvodu i -te vrste matrice A sa λ .
- (e2) $\mathbb{G}_{ij} A$ ima sve jednake vrste, osim i -te i j -te, kao i matrica A , a i -ta vrsta matrice $\mathbb{G}_{ij} A$ jednaka je j -toj vrsti matrice A i j -te vrste matrice $\mathbb{G}_{ij} A$ jednaka je i -toj vrsti matrice A .
- (e3) $\mathbb{E}'_{ij} A$ ima sve jednake vrste, osim i -te, kao i matrica A , a i -ta vrsta matrice $\mathbb{E}'_{ij} A$ jednaka je zbiru i -te i j -te vrste matrice A .

Kako je matrica $\mathbb{F}_{i,\lambda} = \text{diag}[1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1]$ dijagonalna, njena determinanta je proizvod dijagonalnih elemenata, tj. $\det \mathbb{F}_{i,\lambda} = \lambda \neq 0$. Matrica $\mathbb{G}_{ij}$ se dobija iz jedinične matrice $\mathbb{I}_n$ zamenom i -te i j -te vrste, tako da je na osnovu, 6.32 Teorema (i4) $\det \mathbb{G}_{ij} = -1$. I na kraju primetimo da je $\mathbb{E}'_{ij} = \mathbb{I}_n + \mathbb{E}_{ij}$ gornje trougaona matrica, koja na glavnoj dijagonali ima sve 1, tako da je (6.31 Primer 2) $\det \mathbb{E}'_{ij} = 1$.

Ako množimo matricu A s desna elementarnim matricama $\mathbb{E}'_{ij}, \mathbb{F}_{k,\lambda}, \mathbb{G}_{ij}$ onda u iskazima (e1), (e2) i (e3) treba zameniti reč vrsta sa reči kolona, tj. tada vršimo elementarne transformacije nad kolonama.

⁴¹ Npr. Linearni funkcional ima samo jedan vektorski argument i po njemu je linearan.

⁴² Tvđenje (i4) iz 6.32 Teoreme ekvivalentno je sa tvđenjem: Ako u matrici $A = [a_1, \dots, a_n]$ postoje dve jednake kolone onda je $\det(A) = 0$.

Sada na osnovu svojstva 6.32 Teorema (i2),(i3) i 6.31 Primer 2, imamo redom

$$(e1) \det \mathbb{F}_{i,\lambda} \mathcal{A} = \det [a^1, \dots, a^{i-1}, \lambda a^i, a^{i+1}, \dots, a^n] = \lambda \det [a^1, \dots, a^i, \dots, a^n] = \det \mathbb{F}_{i,\lambda} \det \mathcal{A}.$$

$$(e2) \det \mathbb{G}_{ij} \mathcal{A} = -\det \mathcal{A} = \det \mathbb{G}_{ij} \det \mathcal{A}.$$

$$(e3) \det \mathbb{E}'_{ij} \mathcal{A} = \det [a^1, \dots, a^{i-1}, a^i + a^j, a^{i+1}, \dots, a^n] = \det [a^1, \dots, a^{i-1}, a^i, a^{i+1}, \dots, a^n] = \det \mathbb{E}'_{ij} \det \mathcal{A}.$$

Analogno se tretira množenje elementarnom matricom $\mathbb{E}$ matrice $\mathcal{A}$ s desna, jer tada vršimo elementarne transformacije nad kolonama matrice $\mathcal{A}$. $\square$

Praktično izračunavanje determinante matrice. Posmatrajući opšti član determinante matrice (vidi (6.36)), $\xi_A(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, zaključujemo da ako u nekoj vrsti ili koloni (ili u više njih) ima mnogo 0 računanje determinante matrice se pojednostavljuje. Sve metode za praktično računanje determinante matrice svode se na to da se korišćenjem svojstava determinantne funkcije, opisanih u prethodnim tačkama 6.32-6.33, determinanta polazne matrice svede na neki specijalni oblik (tj. takav da matrica ima mnogo 0) iz kojeg je lakše odrediti determinantu.

Osnovna metoda za izračunavanje determinante matrice je **svođenje na trougaoni oblik** (gornje ili donje trougaone matrice) korišćenjem svojstava determinante. Prethodna propozicija omogućuje da korišćenjem elementarnih transformacija pojednostavnimo polaznu determinantu, tj. da nakon primene konačnog broja elementarnih transformacija dovedemo u kontrolisanu vezu determinantu polazne matrice i determinantu neke trougaone matrice, čija je determinanta proizvod dijagonalnih elemenata. Pri tome prethodna propozicija daje i vezu između determinante polazne matrice i dobijene trougaone matrice, tj. preciznije ako je $\mathbb{T}$ trougaona matrica takva da je

$$\mathbb{T} = \mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2 \dots \mathbb{E}_k \mathcal{A} \mathbb{E}_{k+1} \dots \mathbb{E}_m,$$

pri čemu su $\mathbb{E}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ elementarne matrice, tada Bine-Košijeva teorema daje

$$(6.41) \quad \det \mathbb{T} = \det \mathcal{A} \prod_{i=1}^m \det \mathbb{E}_i, \quad \text{odakle je, jer je}$$

$$\det \mathbb{E}_i \neq 0, i = 1, \dots, m, \quad \det \mathcal{A} = \frac{\det \mathbb{T}}{\prod_{i=1}^m \det \mathbb{E}_i}.$$

6.34. Primene determinante. Determinanta se pojavljuje u mnogim problemima, tako npr. determinanta daje jednostavnu karakterizaciju da li je neka matrica regularna, jer važi i

Teorema 1. *Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je regularna akko $\det A \neq 0$.*

Dokaz. Ako je matrica A regularna, tada ona ima inverz i važi

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n \quad \text{Ako na ovu jednakost primenimo determinantu, dobijamo}$$

$$\det A \det A^{-1} = \det (A \cdot A^{-1}) = \det \mathbb{I}_n = 1.$$

Odakle, sledi da je $\det A \neq 0$.

Obratno, neka je $\det A \neq 0$. Pretpostavimo da A nije regularna, tada koristeći (6.41)(prvu formulu) dobili bismo s jedne strane da je $\det \mathbb{T} = 0$, jer matrica A nije regularna (pa barem jedan dijagonalni element jednak je 0) dok je desna strane te jednakosti različita od 0, jer je proizvod brojeva različitih od nule ($\det A \neq 0$, i $\det E_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m$). Dobijena kontradikcija pokazuje da je pretpostavka da matrica A nije regularna je pogrešna, tj. A mora biti regularna. $\square$

Determinanta i vektorski i mešoviti proizvod. Determinanta nam omogućuje da vektorski i mešoviti proizvod u koordinatama zapišemo na jednostavniji način. Preciznije, 6.20 Teoremu, možemo prepisati na sledeći način.

Teorema 2. *Neka je (e_1, e_2, e_3) pozitivno orijentisana ortonormirana baza vektorskog prostora V_e i neka su dati vektori, $x = \sum_i x_i e_i$, $y = \sum_i y_i e_i$ i $z = \sum_i z_i e_i$. Tada važe sledeće formule:*

$$(vp) \quad x \times y = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (mp) \quad [x, y, z] = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Primer 1. Izračunavanje determinante matrica,

$$(i1) \quad \begin{bmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -7 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad (i2) \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix} \quad (i3) \quad \begin{bmatrix} x & x & a+x \\ x & b+x & x \\ c+x & x & x \end{bmatrix}.$$

Rešenje. (i2) izračunajmo determinantu date matrice Laplaceovim razvojem po prvoj vrsti

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} - \beta \cdot \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \\ = \alpha \cdot (\alpha^2 - \beta\gamma) - \beta \cdot (\gamma\alpha - \beta^2) + \gamma \cdot (\gamma^2 - \alpha\beta) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma.$$

(i3) računamo determinantu razvojem po 3. koloni

$$\begin{vmatrix} x & x & a+x \\ x & b+x & x \\ c+x & x & x \end{vmatrix} = (a+x) \cdot \begin{vmatrix} x & b+x \\ c+x & x \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ c+x & x \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ x & b+x \end{vmatrix} \\ = (a+x) \cdot (x^2 - (b+x)(c+x)) - x \cdot (x^2 - x(c+x)) + x \cdot (x(b+x) - x^2) = \dots \\ = -abc - x(ab + ac + bc).$$

Primedba. U sledećem poglavlju posvećenom rešavanju sistema linearnih jednačina takođe ćemo koristiti determinante (Kramerov sistem).

Primer 1. Izračunajte sledeće determinante.

$$(i1) \quad \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}, \quad (i2) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix},$$

$$(i3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 9 & -4 \\ 1 & 8 & -1 & 27 & 12 \\ 1 & 16 & -1 & 81 & -32 \end{vmatrix}.$$

7. Sistemi linearnih jednačina

6.36. Definicija. Neka je dat skup $F = \{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ linearnih polinoma u promenljivima $x_1, \dots, x_m$. Skup F definiše sledeći **sistem linearnih jednačina**:

$$(6.42) \quad \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_m) &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1m}x_m - \beta_1 = 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_m) &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2m}x_m - \beta_2 = 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nm}x_m - \beta_n = 0, \end{aligned}$$

koji kraće zapisujemo kao

$$(6.43) \quad \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} x_k = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sistem (6.42) možemo zapisati još u kompaktnijem matričnom obliku, tj. kao $\mathcal{A}X = B$,

$$(6.44) \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Matricu $\mathcal{A}$ iz matričnog zapisa nazivamo **matricom sistema**. Sistemu (6.42) dodeljujemo sledeću matricu:

$$(6.45) \quad \mathcal{A}_p = [\mathcal{A} \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} & \beta_n \end{array} \right],$$

koja nazivamo **proširenom matricom sistema**.

Rešenje sistema (6.42) je svaka uređena m -torka $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ iz $\mathbb{R}^m$ koja za-menom: $x_i = \gamma_i$, $i = 1, \dots, m$, u sistemu (6.42) daje identitete u polju $\mathbb{R}$.

Primetimo da u slučaju kada je $m = n$ i kada je $\mathcal{A}$ invertibilna matrica, onda iz matrične jednačine $\mathcal{A}X = B$ dobijamo da je rešenje dato formulom:

$$X = \mathcal{A}^{-1} B.$$

6.37. Geometrijska interpretacija. Ako su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$, pri čemu je $\dim U = m$ i $\dim V = n$ i ako u tim prostorima izaberemo baze e i f , tada matrica $\mathcal{A}$ predstavlja matricu linearnog operatora $A : U \rightarrow V$. Prema tome, rešavanje sistema (6.42) svodi se na određivanje vektora $x \in U$ takvog da je $Ax = b$. Matricu, ili bolje reći kolonu, koja odgovara vektorima $x \in U$ i $b \in V$ obeležavaćemo redom sa X i B .

Štaviše možemo uzeti da je $U = \mathbb{R}^m$ i $V = \mathbb{R}^n$ i da je $\mathcal{A}$ matrica operatora u kanonskom paru baza e od U i f od V . Sve ono što smo naučili do sada o linearnim operatorima, omogućuje nam mnogo jednostavniji pogled na linearne sisteme jednačina. Tako da su imamo sledeću teoremu.

Teorema 1. *Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$, pri čemu je $\dim U = m$ i $\dim V = n$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:*

- (i1) *sistem (6.42) ima rešenja.*
- (i2) $b \in \operatorname{Im} A$.
- (i3) $\operatorname{rang} \mathcal{A} = \operatorname{rang} \mathcal{A}_p$.

Digresija. Ekvivalencija uslova (i1) i (i3) poznata je kao Kroneker⁴³–Kapelijeva⁴⁴ teorema

Dokaz. Ekvivalentnost iskaza (i1) i (i2) je očigledna, jer je (i2) samo reformulacija činjenice da sistem ima rešenja na jeziku linearnih operatora.

Pokažimo ekvivalentnost iskaza (i2) i (i3). Ako je $b \in \operatorname{Im} A$ i kako kolone matrice $\mathcal{A}$ predstavljaju skup generatora potprostora $\operatorname{Im} A$, sledi da je $b \in \mathcal{L}(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m)$, tj. $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}_p)$. Obratno, neka je $r = r(\mathcal{A})$, tada postoje indeksi $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r$ takvi da su vektori (kolone matrice $\mathcal{A}$) $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ linearno nezavisni, a preostale kolone matrice $\mathcal{A}$ su njihove linearne kombinacije. Kako je $r = r(\mathcal{A}_p)$, tada je i poslednja kolona te matrice, a ta je b , linearna kombinacija kolona $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$, drugim rečima $b \in \operatorname{Im} A$. $\square$

Odavde odmah dobijamo jednostavnu posledicu.

Posledica. *Ako je $\operatorname{rang} \mathcal{A} = n$, tj. ako je $\operatorname{Im} A = V$ onda sistem (6.42) ima rešenja.*

Kramerov sistem⁴⁵. Sistem jednačina (6.43) zove se **Kramerov** ako je:

- (i1) $m = n$,
- (i2) ako je $\operatorname{rang} \mathcal{A} = n$.

Teorema 2. *Kramerov sistem jednačina uvek ima jedinstveno rešenje, koje je dato formulom*

$$(6.46) \quad x_k = \frac{\mathcal{D}_k}{\mathcal{D}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

⁴³ Kronecker Leopold, 1823–1891, nemački matematičar

⁴⁴ Capelli Alfredo, 1855–1910, italijanski matematičar.

⁴⁵ Gabriel Cramer, 1704–1752, švajcarski matematičar

gde je $\mathcal{D} = \det \mathcal{A} = \det [a_1, a_2, \dots, a_n]$ determinanta matrice sistema, i gde su $\mathcal{D}_k = \det [a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n]$, determinante matrica koje se dobijaju iz matrice $\mathcal{A}$ zamenom njene k -te kolone vektorom b ,

$$(6.47) \quad \mathcal{D}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\,k-1} & \beta_1 & \alpha_{1\,k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\,k-1} & \beta_2 & \alpha_{2\,k+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n\,k-1} & \beta_n & \alpha_{n\,k+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Primitimo da je uslov $\text{rang } \mathcal{A} = n$ ekvivalentan sa uslovom $\det \mathcal{A} \neq 0$, tako da Kramerov sistem uvek ima jedinstveno rešenje, koje je dato formulom $X = \mathcal{A}^{-1} b$. U 6.32 dokazali smo formulu (6.40),

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \text{adj } \mathcal{A},$$

tako da je

$$(6.48) \quad X = \mathcal{A}^{-1} b = \frac{1}{\det \mathcal{A}} (\text{adj } \mathcal{A}) b \quad \text{ili koordinatno} \quad x_k = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} A_{jk} \beta_j, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Koristeći Laplasov razvoj matrice $\mathcal{D}_k$ po k -toj koloni vidimo da je

$$\mathcal{D}_k = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} A_{jk} \beta_j$$

tako da iz (6.48) odmah sledi tražena formula. □

6.38. Homogeni sistem. Za linearni sistem jednačina (6.42) kažemo da je **homogen** ako je

$$b = \mathbf{0}, \quad \text{ili ekvivalentno} \quad \beta_1 = \dots = \beta_m = 0.$$

Ako se setimo geometrijske interpretacije linearnih sistema datih u tački 6.37 onda vidimo da je rešavanje homogenog sistema ekvivalentno rešavanju jednačine $Ax = \mathbf{0}$, tj. nalaženju jezgra linearnog operatora A . Preciznije, imamo sledeću teoremu.

Teorema. Neka je dat homogeni sistem $AX = \mathbf{0}$, takav da je rang od $\mathcal{A}$ jednak r i defekt od $\mathcal{A}$ jednak je $d = m - r$.

- (i1) Skup rešenja homogenog sistema je jezgro linearnog operatora A . Tada postoji baza $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ potprostora $\text{Ker } A$ takva da je svako rešenje sistema oblika

$$(6.49) \quad x = \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i \quad \text{za neki izbor parametara } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d.$$

- (i2) Homogeni sistem uvek ima barem trivijalno rešenje $X = \mathbf{0}$, tj. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, tako da je uvek **konzistentan (ne protivrečan)**.
 (i3) Homogeni Kramerov sistem ima samo trivijalno rešenje.
 (i4) Homogeni sistem u kojem je broj jednačina m manji od broja nepoznatih n uvek ima netrivialno rešenje.

Dokaz. (i1) primetimo da na jeziku linearnih operatora sistem jednačina $\mathcal{A}X = \mathbf{0}$, zapravo tvrdi da je vektor x rešenje sistema akko $x \in \text{Ker } A$. Pri tome operatoru A odgovara matrica $\mathcal{A}$, a vektoru $x \in U$ kolona X . Dakle, ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(\mathcal{A}) = r$, tada je, zbog teoreme o rang i defektu linearnog operatora, $d = \text{defekt}(A) = \dim U - r = m - r$, i postoji neka baza $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ od $\text{Ker } A$ takva da je svako rešenje sistema oblika

$$(6.50) \quad x = \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i \quad \text{za neki izbor parametara } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d.$$

(i2) sledi iz (i1) jer je u nula vektor uvek u jezgru linearnog operatora A .

(i3) Prema **Teorema 5.2** svaki **Kramerov** sistem ima jedinstveno rešenje, a prema (i2) znamo da je $\mathbf{0}$ uvek rešenje svakog homogenog sistema (pa tako i **Kramerovog**), koje se onda mora podudarati sa tim koje pomenuta teorema⁴⁶ daje.

(i4) Ako je $\dim V = n < m$ tada iz teoreme o rang i defektu linearnog operatora, sledi da je $d(A) \geq 1$, i postoji $\mathbf{0} \neq x \in \text{Ker } A$. $\square$

Primedba 1. Ako uzmemo u obzir da smo na početku izabrali baze e i f , u prostorima U i V i ako označimo sa $W_i = v_i(e)$, $i = 1, 2, \dots, d$, koordinatne matrice $(m \times 1)$ vektora baze v_i s obzirom na bazu e , onda skup $\{W_1, W_2, \dots, W_d\}$ zovemo **fundamentalnim skupom rešenja** homogenog sistema. Dakle, svaki vektor X koji je rešenje ovog homogenog sistema može se zapisati u obliku,

$$(6.51) \quad X = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \dots + \lambda_d W_d.$$

Rezimirajmo, homogeni sistem za koji je $d = \text{defekt } \mathcal{A} = m - \text{rang } \mathcal{A} \neq 0$, ima tačno d fundamentalnih rešenja i svako drugo rešenje sistema je njihova linearna kombinacija.

6.39. Nehomogeni sistem. Za sistem (6.42) kažemo da je **nehomogen** ako je vektor $B \neq \mathbf{0}$, tj. ako barem jedan od β_i nije 0. Svakom nehomogenom sistemu $\mathcal{A}X = B$ pridružen je homogeni sistem $\mathcal{A}X = \mathbf{0}$.

Zbog **6.37 Teorema 1**, ako nehomogeni sistem ima rešenja onda je⁴⁷ dobro definisan broj, $r = r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}_p)$, kojeg zovemo **rang sistema**.

Da bismo rešili nehomogeni sistem, koristimo interpretaciju datu u tački 6.37. Dakle, neka je $A : U \rightarrow V$, linearni operator kojem u paru izabranih baza e (od U) i f (od V) odgovara matrica $\mathcal{A}$. Ako pretpostavimo da je nehomogeni sistem konzistentan, onda skup

$$A^{-1}(b) = \{x \in U \mid Ax = b\}$$

nije prazan. Izaberimo sada neko **partikularno** rešenje, v_0 , nehomogenog sistema i ako je v bilo koje drugo rešenje nehomogenog sistema, tada imamo (jer su $v, v_0 \in A^{-1}(b)$):

$$A(v - v_0) = A(v) - A(v_0) = b - b = \mathbf{0},$$

⁴⁶Drugi način da se u to ubedimo jeste da u rešenje **Kramerovog** sistema dato u **Teorema 5.2** uvrstimo da je $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$.

⁴⁷ vektor b u slici operatora A

odakle zaključujemo da je vektor $v - v_0$ rešenje pripadnog homogenog sistema. Prema tome, $v - v_0 \in \text{Ker } A$, tj. $v \in v_0 + \text{Ker } A$, ili ekvivalentno $A^{-1}(b) \subseteq v_0 + \text{Ker } A$. Očigledno važi i druga inkluzija, tako da je $A^{-1}(b) = v_0 + \text{Ker } A$. Dakle, rešenje nehomogenog sistema je linearna mnogostrukost, određena nekim partikularnim rešenjem v_0 i paralelna je potprostoru $\text{Ker } A$. Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. *Neka je $\mathcal{A}X = B \neq \mathbf{0}$, nehomogeni sistem takav da je $r = r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}_p)$ rang sistema, i defekt od $\mathcal{A}$ jednak je $d = m - r$. Tada je skup rešenja sistema $\mathcal{A}X = B$ linearna mnogostrukost, tj.*

$$(6.52) \quad x = v_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i,$$

gde je v_0 neko partikularno rešenje sistema, $(v_1, v_2, \dots, v_d)$ baza potprostora $\text{Ker } A$ i gde su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{F}$ slobodni parametri⁴⁸.

Primedba 1. Ako sada sa W_0 označimo vektor (matricu tipa $m \times 1$) koji odgovara vektoru v_0 u bazi e , tj. $W_0 = v_0(e)$ i slično $X = x(e)$ i ako su $W_i, i = 1, \dots, d$ fundamentalna rešenja pridruženog homogenog sistema (vidi 5.3.), onda vidimo da postoje skalari $\lambda_i, i = 1, \dots, d$ takvi da je

$$(6.53) \quad X - W_0 = \sum_{i=1}^d \lambda_i W_i \quad \text{ili ekvivalentno,} \quad X = W_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i W_i,$$

odakle sledi da je opšte rešenje nehomogenog sistema suma bilo kojeg partikularnog rešenja tog sistema i opšteg rešenja pridruženog homogenog sistema.

Primedba 2. Prethodni zaključak sugerise i metodu za rešavanje nehomogenih sistema, a ona se sastoji u tome da se prvo reši pridruženi homogeni sistem, a zatim se "pogodi" jedno partikularno rešenje, te je opšte rešenje sistema dato formulom (6.53).

Posledica. *Neka je $\mathcal{A}X = B$ linearni sistem jednačina nad poljem $\mathbb{R}$. Tada skup rešenja ovog sistema može biti:*

- (i1) prazan skup ($B \notin \text{Im } \mathcal{A}$),
- (i2) jednočlan skup (ako je sistem Kramerov)
- (i3) beskonačan skup (ako je $\dim \text{Ker } \mathcal{A} \geq 1$).

Dokaz. Ako je dati linearni sistem konzistentan, tj. ima rešenja, tada je skup rešenja linearnog sistema $\mathcal{A}X = B$ linearna mnogostrukost dimenzije d . U slučaju da je $d = 0$ u oba slučaja postoji samo jedno rešenje. Ako je $d > 0$, tada je skup rešenja beskonačan. $\square$

6.40. Gausova metoda eliminacije. Za praktično određivanje rešenja sistema (6.42) postoje razne metode, od kojih smo već neke spomenuli u slučaju kada je matrica

⁴⁸njihova 'sloboda' ogleda se u tome da svakom izboru brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ odgovara jedno rešenje polaznog sistema.

$\mathcal{A}$ kvadratna i regularna. Tada je sistem Kramerov i opšte rešenje sistema (6.42) dato formulom $X = \mathcal{A}^{-1} B$ tj. komponente vektora X mogu se izračunati tako što se odredi inverz matrice $\mathcal{A}$ ili se primene Kramerove formule $x_k = \mathcal{D}_k / \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Ove metode osim očigledne manjkavosti, koja se odnosi na primenjivost samo u specijalnim slučajevima, uključuju i računanje determinante matrice sistema koje zahteva mnogo vremena i mnogo računskih operacija, što predstavlja drugu veliku manjkavost ove metode. Zbog ove činjenice rešavanje linearnih sistema ovom metodom (i kada je primenjiva) treba izbegavati, posebno ako je $n \geq 4$. Problemi u ovoj metodi nastaju ako matrica sistema nije regularna, tj. kada je $\det \mathcal{A} = 0$. U tom slučaju prvom metodom ne možemo ni zaključiti da li je sistem konzistentan, a da bismo zaključili Kramerovom metodom da sistem nije konzistentan morali bismo izračunati determinante $\mathcal{D}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ i ako se barem jedna od njih ne poništava sistem nema rešenja, ali i ako se sve poništavaju opet ništa ne znamo o skupu rešenja polaznog sistema.

Metoda koja je **dobra**, mora biti primenjiva u svim slučajevima i mora davati odgovore na sledeća pitanja: *da li je sistem konzistentan i kako izgleda skup rešenja*. Pri tome metoda mora biti i ekonomična, tj. broj potrebnih operacija ne sme biti isuviše veliki, npr. treba biti sličan broju operacija kao i pri određivanju ranga matrice sistema. Naravno, odmah se pitamo da li možemo i za ovu namenu primeniti metodu zasnovanu na **elementarnim transformacijama**. Odgovor na ovo pitanje je potvrđan i ova metoda zove se **Gausova metoda eliminacije** i zasniva se na **elementarnim transformacijama** koje vršimo **nad vrstama**⁴⁹ proširene matrice sistema $\mathcal{A}_p$. Podsetimo se da smo kod određivanja ranga proizvoljne matrice $\mathcal{A}$, čiji rang ne možemo odrediti pogledom na datu matricu, vršili elementarne transformacije (koje ne menjaju rang!) nad polaznom matricom dok je nismo sveli na neku od kanonskih matrica $\mathbb{D}_{nm}^r$, čiji je rang jednak broju r , tj. jednak je broju jedinica duž glavne dijagonale. Ideja koja stoji iza Gausove metode je analogna. Dakle, ako je data proširena matrica sistema $\mathcal{A}_p$ tada jednim pogledom na nju obično ne možemo odrediti skup rešenja polaznog sistema, već je potrebno transformisati matricu $\mathcal{A}_p$, korišćenjem nekih transformacija koje ne menjaju skup rešenja polaznog sistema, do matrice $\mathcal{A}'_p$ iz koje odmah (jednim pogledom) znamo napisati njen skup rešenja. Primetimo da sledeće **elementarne transformacije sistema linearnih jednačina (ETLSJ)** ne menjaju skup rešenja polaznog sistema:

- (el1) množenje neke jednačine skalarom različitim od 0,
- (el2) zamena redosleda bilo koje dve jednačine,
- (el3) dodavanje neke jednačine nekoj drugoj jednačini.

Ako samo malo razmislimo vidimo da su (ETLSJ) one iste elementarne transformacije (ET) **nad vrstama matrice** $\mathcal{A}_p$, koje smo koristili kod određivanja ranga matrice. Pri tome, na kraju dolazimo do transformisane proširene matrice sistema $\mathcal{A}'_p$, i gde se matrica $\mathcal{A}$ transformisala u matricu $\mathcal{A}'$ koja ima $r = \text{rang}(\mathcal{A})$ kolona i u svakoj od tih kolona nalazi se jedna 1 i svi ostali elementi su 0 (tj. te kolone su ustvari vektori

⁴⁹ koje predstavljaju jednačine sistema.

kanonske baze prostora $\mathbb{R}^n$). Kako te kolone matrice $\mathcal{A}'$ ne moraju biti prvih r kolona kanonske baze, na kraju je eventualno potrebno prenumerisati promenljive tako da pomenute kolone (vektori kanonske baze) matrice $\mathcal{A}'$ postanu prvih r kolona matrice $\mathcal{A}'$.

Ova poslednja transformacija u suštini predstavlja niz elementarnih transformacija zamene kolona i ona ne utiče na slobodni član tj, na transformisani vektor B' .

Preciznije, ako je $\text{rang } \mathcal{A} = r$ onda nam upravo opisana metoda, prvo primena elementarnih transformacija nad vrstama matrice $\mathcal{A}_p$ (ETLSJ) i na kraju po potrebi prenumeracijom promenljivih, daje:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ki} x_i = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \xrightarrow{\text{Gaus}} \quad \sum_{i=1}^m \alpha'_{ki} x_i = \beta'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ili matrično

$$\mathcal{A}_p = [\mathcal{A} \mid B] \quad \xrightarrow{\text{Gaus}} \quad \mathcal{A}'_p = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{I}_r & \mathcal{C} & B'_r \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r,m-r} & B'_{n-r} \end{array} \right],$$

pri čemu je $\mathbb{I}_r$ jedinična matrica reda r , $\mathcal{O}_{n-r,r}$ i $\mathcal{O}_{n-r,m-r}$ nula matrica naznačenih tipova i $B'_r = (\beta'_1, \dots, \beta'_r)^\tau$ i $B'_{n-r} = (\beta'_{r+1}, \dots, \beta'_n)^\tau$. Preciznije, matrica sistema je:

$$(6.54) \quad \mathcal{A}'_p = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha'_{1r+1} & \dots & \alpha'_{1m} & \beta'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha'_{2r+1} & \dots & \alpha'_{2m} & \beta'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha'_{rr+1} & \dots & \alpha'_{rm} & \beta'_r \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta'_n \end{array} \right],$$

i njoj odgovara sistem:

$$(6.55) \quad \begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r + \alpha'_{1r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + \alpha'_{1m} \cdot x_m = \beta'_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r + \alpha'_{2r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + \alpha'_{2m} \cdot x_m = \beta'_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_r + \alpha'_{rr+1} \cdot x_{r+1} + \dots + \alpha'_{rm} \cdot x_m = \beta'_r \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r + 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_m = \beta'_{r+1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r + 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_m = \beta'_n \end{array}.$$

Odavde odmah sledi da ako je vektor $B'_{n-r} \neq \mathbf{0}$, tj. ako je barem jedan od skalara $\beta'_j \neq 0$, $j = r+1, \dots, n$ onda sistem **nema rešenja** (nije konzistentan). Ako sistem ima rešenja tj. ako je $B'_{n-r} = \mathbf{0}$, onda u prethodnom sistemu prvo možemo zaboraviti

zadnjih $n - r$ jednačina, a zatim vidimo da je opšte rešenje:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \beta'_1 - (\alpha'_{1r+1} \cdot t_1 + \alpha'_{1r+2} \cdot t_2 + \cdots + \alpha'_{1m} \cdot t_d), \\
 x_2 &= \beta'_2 - (\alpha'_{2r+1} \cdot t_1 + \alpha'_{2r+2} \cdot t_2 + \cdots + \alpha'_{2m} \cdot t_d), \\
 &\vdots \\
 x_r &= \beta'_r - (\alpha'_{rr+1} \cdot t_1 + \alpha'_{rr+2} \cdot t_2 + \cdots + \alpha'_{rm} \cdot t_d), \\
 x_{r+1} &= t_1, \\
 &\vdots \\
 x_m &= t_d
 \end{aligned}
 \tag{6.56}$$

Primetimo da su $t_1, t_2, \dots, t_d$ slobodni parametri, tako da je dimenzija skupa rešenja ovog sistema jednaka d . Kao što znamo svako rešenje sistema (6.42) možemo zapisati u obliku $X = W_0 + W_h$, pri čemu je W_0 neko partikularno rešenje, a W_h rešenje pripadnog homogenog sistema.

U našem slučaju partikularno rešenje dobijamo ako u rešenje sistema datog formulama (6.56), uvrstimo $t_1 = t_2 = \cdots = t_d = 0$, a fundamentalna rešenja, W_i , $i = 1, \dots, d$, dobijamo ako npr. u rešenju sistema (6.56) izaberemo parametre tako da je $t_i = 1$, i $t_j = 0$, $j = 1, \dots, \hat{i}, \dots, d$. Prema tome, imamo da je:

$$\tag{6.57} \quad W_0 = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} -\alpha'_{1r+1} \\ -\alpha'_{2r+1} \\ \vdots \\ -\alpha'_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad W_d = \begin{bmatrix} -\alpha'_{1m} \\ -\alpha'_{2m} \\ \vdots \\ -\alpha'_{rm} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Očigledno, izborom parametara u definisanju fundamentalnih vektora W_i , dobija se linearno nezavisan skup tako da je $\{W_1, \dots, W_d\}$ fundamentalan skup vektora (tj. baza skupa rešenja pridruženog homogenog sistema). Dakle, opšte rešenje sistema (6.42) je

$$\tag{6.58} \quad X = W_0 + \underbrace{\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \cdots + \lambda_d W_d}_{W_h \in \text{Ker } \mathcal{A}}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{F}.$$

Time smo pokazali sledeću teoremu.

Teorema. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ neka matrica ranga r , i neka je $X \in \mathbb{R}^n$ neki vektor, takvi da je njima određen linearni sistem $\mathcal{A}X = B$. I neka je

$$\mathcal{A}'_p = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{I}_r & \mathcal{C} & B'_r \\ \mathcal{O}_{n-r,r} & \mathcal{O}_{n-r,m-r} & B'_{n-r} \end{array} \right],$$

transformisana proširena matrica sistema dobijena iz proširene matrice sistema $\mathcal{A}_p$ primenom (ETLSJ). Tada

(nk) linearni sistem, $\mathcal{A}X = B$, *nema rešenja* ako je vektor $B'_{n-r} \neq \mathbf{0}$.

(k) linearni sistem, $\mathcal{A}X = B$, *ima rešenja* ako je vektor $B'_{n-r} = \mathbf{0}$. I skup rešenja dat je formulom (6.58), gde je W_0 neko partikularno rešenje sistema i gde su fundamentalna rešenja pridruženog homogenog sistema $W_1, W_2, \dots, W_d$ data u (6.57).

Primedba 1. Gausova metoda eliminacije je dobra metoda jer daje odgovor na pitanje da li polazni sistem ima rešenja, daje eksplicitan opis skupa rešenja i najekonomičnija je metoda.

Primedba 2. Primitimo da se ovom metodom mogu rešavati sistemi nad poljem proizvoljne karakteristike. U slučaju kada je $\text{char } \mathbb{F} = p$ prost broj, pri elementarnim transformacijama (el1) i (el3) treba obratiti pažnju na tablicu množenja u tom polju.

6.41. Primeri. U ovoj tački dajemo nekoliko karakterističnih primera linearnih sistema, koje rešavamo Gausovom metodom.

1. Rešimo sledeći homogeni sistem jednačina nad poljem $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 0, \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Rešenje. Kako je sistem homogen, iz proširene matrice sistema možemo ispustiti poslednju nula kolonu, jer ne ona ne menja pri elementarnim transformacijama.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \\ \boxed{1} & 0 & 8 & 7 \end{array} \right] &\sim \left\{ \begin{array}{l} 4.v. \times (-2) + 1.v. \\ 4.v. \times (-3) + 2.v. \\ 4.v. \times (-7) + 3.v. \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & \boxed{1} & -12 & -13 \\ 0 & 2 & -25 & -27 \\ 0 & 4 & -50 & -54 \\ \boxed{1} & 0 & 8 & 7 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} 1.v. \times (-2) + 2.v. \\ 1.v. \times (-4) + 3.v. \end{array} \right\} \sim \\ \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & \boxed{1} & -12 & -13 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 8 & 7 \end{array} \right] &\sim \left\{ \begin{array}{l} 2.v. \times (-12) + 1.v. \\ 2.v. \times (-1) + 3.v. \\ 2.v. \times 8 + 4.v. \\ 2.v. \times (-1) \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{ispustimo 3.-ću vrstu} \\ 3.v. \longleftrightarrow 1.v. \\ 3.v. \longleftrightarrow 2.v. \end{array} \right\} \\ \sim \left[\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right] &\text{odakle je } x_1 = x_4, x_2 = x_4, x_3 = -x_4. \end{aligned}$$

Prema tome postoji samo jedno fundamentalno rešenje i ono je $W_1 = (1, 1, -1, 1)$ tako da je opšte rešenje oblika: $X = tW_1, \quad t \in \mathbb{F}$.

2. Pokažimo da sledeći sistem linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$ nema rešenja.

$$\begin{aligned} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 &= 84, \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 &= 72, \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 &= 59. \end{aligned}$$

Rešenje. Sistem rešavamo Gausovom metodom eliminacije vršeći elementarne transformacije nad vrstama proširene matrice sistema.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 105 & -175 & -315 & 245 & 84 \\ 90 & -150 & -270 & 210 & 72 \\ 75 & -125 & -225 & 175 & 59 \end{array} \right] &\sim \left\{ \begin{array}{l} 1.v. \times 1/7 \\ 2.v. \times 1/6 \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{15} & -25 & -45 & 35 & 12 \\ 15 & -25 & -45 & 35 & 12 \\ 75 & -125 & -225 & 175 & 59 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} 1.v. \times (-1) + 2.v. \\ 1.v. \times (-5) + 3.v. \end{array} \right\} \\ \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 15 & -25 & -45 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right], & \text{odakle odmah sledi da sistem nema rešenja jer treća vrsta} \\ & \text{implicira da je } 0 = -1. \end{aligned}$$

3. U zavisnosti od realnog parametra α rešimo sledeći sistem linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9, \\ \alpha x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11. \end{aligned}$$

Rešenje. Primenujući elementarne transformacije nad vrstama proširene matrice sistema redom imamo,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \alpha & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array} \right] &\sim \left\{ \begin{array}{l} 1.v. \times (-2) + 2.v. \\ 1.v. \times (-3) + 3.v. \\ 1.v. \times (-4) + 4.v. \end{array} \right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ \alpha - 8 & 0 & -3 & -6 & -9 \end{array} \right] \\ \sim \left\{ \begin{array}{l} 2.v. \times (-2) + 3.v. \\ 2.v. \times (-3) + 4.v. \\ 2.v. \times (-1) \end{array} \right\} &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha - 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine dobijamo dva slučaja: (a) $\alpha = 8$ i (b) $\alpha \neq 8$.

U slučaju (a) možemo ispustiti poslednje dve nula vrste, a zatim drugu vrstu pomnožimo sa (-3) i dodamo prvoj, tako da imamo:

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right], \quad \text{odakle je odmah:} \quad \begin{aligned} x_3 &= 3 - 2x_4, \\ x_2 &= 4 + 2x_1 - 2x_4. \end{aligned}$$

Odavde vidimo da je prostor rešenja dvodimenzionalan i da je opšte rešenje:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 4 + 2x_1 - 2x_4 \\ 3 - 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1, x_4 \in \mathbb{R}.$$

U slučaju (b) možemo ispitati samo treću (nula) vrstu, a zatim drugu vrstu pomnožimo sa (-3) i dodamo prvoj, i na kraju poslednju vrstu pomnožimo sa $1/(\alpha - 8)$ tako da konačno dobijamo:

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \text{odakle je odmah,} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 4 - 2x_4, \\ x_3 = 3 - 2x_4. \end{array}$$

Odavde vidimo da je prostor rešenja jednodimenzion i da je njegovo rešenje:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 - 2x_4 \\ 3 - 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

8. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori.

6.42. Polinoma. Kako su nam za razumevanje ove glave potrebna neka znanja o polinomima, uvod ove glave posvećujemo njima.

Izraz

$$(6.59) \quad f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}, \quad \alpha_n \neq 0,$$

zove se **polinom nad poljem $\mathbb{F}$** . U ovoj glavi polje $\mathbb{F}$ je uglavnom polje $\mathbb{R}$ ili polje $\mathbb{C}$ (ponekad). Skalari $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazivaju se koeficijenti polinoma f . **Stepen polinoma f** je broj $n \in \mathbb{N}_0$. Oznake koje koristimo za stepen polinoma su $\deg f$ i ∂f . Za ne-nula polinom f stepena n kažemo da je **moničan** ako je $\alpha_n = 1$.

Kao što znamo skup svih polinoma $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x]$ je vektorski prostor $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$ uz uobičajene operacije sabiranja polinoma i množenja polinoma sa skalarom, tj. za $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ i $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in \mathcal{P}$, uz $k = \max\{n, m\}$ definišemo

$$(s) \quad f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^k (a_i + b_i) x^i, \quad \text{pri čemu su } a_i = 0 \text{ za } i = n+1, \dots, k \text{ ako je } n < k \text{ ili}$$

$$b_j = 0 \text{ za } j = m+1, \dots, k, \text{ ako je } m < k.$$

$$(m) \quad \lambda \cdot f(x) = \sum_{i=0}^n (\lambda a_i) x^i.$$

Na skupu $\mathcal{P}$ defininisana je još i operacija množenja polinoma formulom

$$(mp) \quad f(x) g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i \quad \text{gde je } c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}.$$

Lako se proverava da je $(\mathcal{P}, +, \cdot)$ komutativan, asocijativan prsten sa jedinicom. Invertibilni elementi nalaze se samo među polinomima stepena 0, a to su svi elementi skupa $\mathbb{F}^*$ (ne-nula elementi polja $\mathbb{F}$). Kako je množenje polinoma kompatibilno sa sabiranjem polinoma i množenjem polinoma sa skalarima vidimo da je $\mathcal{P}$ asocijativna, komutativna $\mathbb{F}$ -algebra sa jedinicom. Lako se proverava da važe svojstva iz sledeće propozicije.

Propozicija. Neka su $f, g, h \in \mathcal{P}$, polinomi različiti od nula polinoma. Tada

- (i1) $f g \neq 0$,
- (i2) $\partial(f g) = \partial f + \partial g$,
- (i3) $f g$ je moničan ako su oba polinoma f i g monična,
- (i4) $f g$ je skalar *akko* f i g skalari,
- (i5) ako je $\partial(f + g) \neq 0$, tada je $\partial(f + g) \leq \max(\partial f, \partial g)$,
- (i6) ako je $f g = f h$, tada je $g = h$.

Primetimo da na polinom možemo gledati kao na funkciju sa $\mathbb{F}$ u $\mathbb{F}$ tretirajući x kao promenljivu iz $\mathbb{F}$, ili opštije kao funkciju sa $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ u $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, gde x tretiramo kao promenljivu iz $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$.

6.43. Teorema o deljenju polinoma. Najvažnija osobina polinoma sadržana je u teoremi o deljenju polinoma.

Teorema (o deljenju polinoma). *Za svaka dva polinoma $f, g \in \mathbb{F}[x]$ postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{F}[x]$ takvi da je:*

- (i1) $f(x) = q(x) g(x) + r(x)$,
- (i2) $0 \leq \partial r < \partial g$.

Dokaz. Jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dva para polinoma q, r i q_1, r_1 za koje važi:

$$f = q g + r = q_1 g + r_1.$$

Ako oduzmemo ove dve jednakosti dobijamo:

$$(6.60) \quad g(q - q_1) = r_1 - r.$$

Odavde vidimo da ako je $q - q_1 \neq 0$, onda je stepen leve strane jednakosti (6.60) veći ili jednak stepenu od g i strogo je veći od stepena desne strane iste. Kako je to nemoguće mora biti $q - q_1 = 0$, pa je onda i $r_1 - r = 0$. Time je dokazana jedinstvenost.

Egzistencija. Neka su dati polinomi $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ i $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$. Ako je $n < m$ onda stavimo da je $q(x) = 0$ i $r(x) = f(x)$ i dokaz je gotov. Zato pretpostavimo da je $n \geq m$ i imamo:

$$(6.61) \quad f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) = f_1(x), \quad n_1 = \partial f_1 < n,$$

ako je $n_1 \geq m$ onda sa $a_{n_1}^1$ označimo vodeći koeficijent od $f_1(x)$, i imamo:

$$(6.62) \quad f_1(x) - \frac{a_{n_1}^1}{b_m} x^{n_1-m} g(x) = f_2(x), \quad n_2 = \partial f_2 < n_1,$$

i nastavimo analogno dalje, itd.

Kako stepeni polinoma $f, f_1, f_2, \dots$ opadaju, jer je $n > n_1 > n_2 > \dots$, nakon konačno mnogo koraka dolazimo do polinoma f_{k-1} i f_k takvih da je:

$$(6.63) \quad f_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}^{k-1}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} g(x) = f_k(x)$$

i pri tome je $\partial f_k < m$. Sada iz relacija (6.61)-(6.63) dobijamo:

$$f(x) - \underbrace{\left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a_{n_1}^1}{b_m} x^{n_1-m} + \dots + \frac{a_{n_{k-1}}^{k-1}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} \right)}_{q(x)} g(x) = f_k(x) = r(x).$$

Iz gonje konstrukcije sledi da polinomi $q(x)$ i $r(x)$ zadovoljavaju oba tražena uslova (i1) i (i2), čime je završen i dokaz egzistencije. $\square$

Primedba. Primetimo da je dokaz egzistencije algoritamski, i da se u suštini radi o metodi koja se uči u srednjoj školi, i koja je ovde ispisana u opštem slučaju.

Posledica (Bezuova⁵⁰ lema). *Neka je $f \in \mathbb{F}[x]$ polinom. Ako je $f(a) = 0$ onda $x - a \mid f(x)$. Važi i obrat.*

Dokaz. Koristeći teoremu o deljenju polinoma imamo,

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x), \quad \text{ i } \quad 0 \leq r < 1,$$

odakle sledi da r mora biti polinom nultog stepena, tj. broj. Ako sada u ovu relaciju uvrstimo $x = a$ i iskoristimo da je $f(a) = 0$ dobijamo da je $r = 0$, što je ekvivalentno sa $x - a \mid f$.

Obrat je trivijalan. $\square$

Primer. Odredimo ostatak pri deljenju $f(x) = x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9$ sa $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

Rešenje. Zbog teoreme o deljenju polinoma znamo da je $f = gq + r$ i $\partial r < \partial g = 2$. Dakle, $r(x) = ax + b$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Sada je najbolje naći nule polinoma g , koje se zatim redom uvrste u relaciju iz teoreme o deljenju polinoma, koje se onda svode na neki linearni sistem. U našem slučaju to su brojevi: $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = -3$. Sada imamo:

$$f(1) = 11 = g(1)q(1) + r(1) = a + b = 11,$$

$$f(-3) = 27 = r(-3) = -3a + b = 27.$$

Rešenje ovog sistema je: $a = -4$ i $b = 15$, tako da je $r(x) = -4x + 15$.

Najveći zajednički delitelj (NZD). Neka je $\mathbb{F}$ polje. Polinom $g \in \mathbb{F}[x]$ je **delitelj** (divizor) polinoma $f \in \mathbb{F}[x]$ ako i samo ako postoji polinom $h \in \mathbb{F}[x]$ takav da je $f = gh$, što zapisujemo $g \mid f$ i čitamo g deli f .

Deljivost polinoma je relacija na skupu $\mathbb{F}[x]$ i njene osnovne osobine sadržaj su sledeće propozicije.

Propozicija. *Relacija deljivosti polinoma ima sledeće osobine:*

- (i1) *tranzitivnost: ako $g \mid f$ i $h \mid g$ sledi $h \mid f$,*
- (i2) *ako $g \mid f$ i $g \mid h$ onda $g \mid f \pm h$,*
- (i3) *ako $g \mid f$ tada $g \mid fh$, za svaki polinom $h \in \mathbb{F}[x]$,*
- (i4) *ako $g \mid f_1, f_2, \dots, f_k$ tada $g \mid f_1g_1 + f_2g_2 + \dots + f_kg_k$, za sve polinome $g_1, g_2, \dots, g_k \in \mathbb{F}[x]$,*
- (i5) *ako je $g(x) = c \neq 0$ ⁵¹ onda $g \mid f$, za svaki polinom $f \in \mathbb{F}[x]$,*
- (i6) *ako $g \mid f$ tada i $cg \mid f$, za svaki skalar $c \in \mathbb{F}$,*
- (i7) *$g \mid f$ i $\partial g = \partial f$ ako i samo ako je $g = cf$ za neko $c \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.*

⁵⁰ Etienne Bezout, 1730 -- 1783, francuski matematičar.

⁵¹ $\partial g = 0$, $g \neq 0$.

Dokazi ovih jednostavnih činjenica direktno slede iz definicija o ostavljamo iz za vežbu.

Najveći zajednički delitelj polinoma. Polinom $d(x)$ je najveći zajednički delitelj polinoma $f(x)$ i $g(x)$ ako i samo ako $d(x)$ ima sledeće osobine:

$$(NZD1) \quad d \mid f \text{ i } d \mid g,$$

$$(NZD2) \quad \text{ako } d_1 \mid f \text{ i } d_1 \mid g \text{ onda } d_1 \mid d,$$

$$(NZD3) \quad \text{vodeći koeficijent polinoma } d \text{ je } 1.$$

Oznaka koju koristimo za najveći zajednički delitelj je $\text{NZD}(f(x), g(x))$.

Primetimo da zbog uslova (NZD3), $\text{NZD}(f(x), g(x))$ je jedinstveno određen, a ako ispustimo taj uslov onda je $\text{NZD}(f(x), g(x))$ određen do na proizvod sa skalarom $c \neq 0$, tj. tada je određen samo njegov stepen.

Ako je $\text{NZD}(f, g) = 1$, kažemo da su polinomi f i g uzajamno prosti.

6.44. Posledice teoreme o deljenju polinoma. Iz teoreme o deljenju polinoma slede sva najvažnija svojstva prstena polinoma, na sličan način kao što iz teoreme o deljenju celih brojeva slede sva najvažnija svojstva prstena celih brojeva. U ovoj tački navodimo (bez dokaza najvažnije posledice teoreme o deljenju polinoma, čiji dokazi mogu se dobiti lakim modifikacijama istovetnih teorema kod celih brojeva.

Teorema 1 (Euklidov algoritam). *Neka su $f, g \in \mathbb{F}[x]$ polinomi takvi da je $\partial f \geq \partial g$. Tada je dobro definisan konačan niz jednakosti,*

$$(6.64) \quad \begin{array}{ll} f = g q_1 + r_1, & g = r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3, & r_2 = r_3 q_4 + r_4, \\ \vdots & \vdots \\ r_{k-3} = r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1}, & r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k, \\ \boxed{r_{k-1} = r_k q_{k+1}.} \end{array}$$

Tada je $\text{NZD}(f, g) = c r_k$, gde je $c \in \mathbb{F}^*$ jednak recipročnoj vrednosti vodećeg koeficijenta od r_k .

Primer 1. Nađimo, koristeći Euklidov algoritam, NZD polinoma $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$ i $g(x) = 3x^4 + 11x^3 + 23x^2 + 21x - 10$.

Rešenje. Koristeći Euklidov algoritam redom nalazimo: $q_1(x) = 1$, $r_1(x) = -6x^3 - 22x^2 - 16x + 8$, $q_2(x) = -\frac{1}{2}x$, $r_2(x) = 5(3x^2 + 5x - 2)$, i napokon $q_3(x) = -\frac{2}{5}(x + 2)$ i $r_3(x) = 0$.

Prema tome, $\text{NZD}(f, g) = x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$.

Teorema 2 (o NZD). *Neka su $f, g \in \mathbb{F}[x]$ polinomi, i neka je $\text{NZD}(f, g) = d$, onda postoje polinomi $u, v \in \mathbb{F}[x]$ takvi da je: $fu + gv = d$.*

Primer 2. Odredite u i v tako da je $fu + gv = d = \text{NZD}(f, g)$, za f i g iz prethodnog Primera 1.

Rešenje. Prve dve jednakosti iz Euklidovog algoritma prepisemo na sledeći način: $r_2 = g - r_1 q_2$ i $r_1 = f - g q_1$, pa ako 2. relaciju zamenimo u 1. dobijamo da je $r_2 = f(-q_2) + g(1 + q_1 q_2)$. Kako je r_2 proporcionalan sa d , potrebno ga je normirati, tj. podeliti sa 15. Tako nalazimo, je $u = -\frac{1}{15} q_2$ i $v = \frac{1}{15} (1 + q_1 q_2)$. Uvrštavanjem konkretnih polinoma iz pomenutog primera, konačno dobijamo: $u(x) = x/30$ i $v(x) = (2 - x)/30$.

6.45. O nulama polinoma. Pronalaženje nula realnih polinoma je jedan od osnovnih zadataka u teoriji polinoma. Postoje formule, za pronalaženje nula polinoma do stepena 4, i one se, osim za linearne polinome, izražavaju pomoću korena. Za polinome većeg stepena od 4 ne postoje takve formule za proizvoljni polinom. Početkom 19. veka E. Galoa⁵² je doneo nove i duboke ideje⁵³ kojima je dao odgovor kada se polinomijalne jednačine mogu rešiti pomoću korena. Sa praktične tačke za određivanje nula realnih polinoma koriste se numeričke metode. Mi se ovde nećemo baviti problemima određivanja nula polinoma, ali zato navodimo neka tvrđenja koja ćemo koristiti u nastavku.

Propozicija (o kompleksnim nulama realnog polinoma). *Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = 0$ onda je i $f(\bar{z}) = 0$.*

Dokaz. Neka je $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i = 0$. Ako ovu relaciju konjugujemo i iskoristimo da je konjugovanje automorfizam polja $\mathbb{C}$ ⁵⁴ dobijamo,

$$0 = \bar{0} = \overline{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i z^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} \overline{(z^i)} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} (\bar{z})^i = f(\bar{z}). \quad \square$$

Poznato je da polinomi sa realnim, pa pogotovo i sa racionalnim koeficijentima ne moraju imati nule u $\mathbb{R}$, ni u $\mathbb{Q}$, redom. I postavlja se pitanje da li postoje polja, koja imaju osobinu da svi polinomi sa koeficijentima u tim poljima imaju sve nule u tom polju. Prvo polje sa takvom osobinom je polje kompleksnih brojeva, i taj stav poznat je kao osnovni stav algebre.

Teorema (Osnovna teorema algebre). *Za svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stepena barem 1, postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takav da je $f(z_0) = 0$.*

Posledica. *Ako je $f \in \mathbb{C}[x]$ i ako je $\partial f = n \in \mathbb{N}$, onda je*

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n),$$

gde su $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ i gde je a_n vodeći koeficijent polinoma $f(x)$. Među nulama polinoma, tj. među brojevima $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ može biti istih.

Definicija. Polja koja imaju osobinu kao $\mathbb{C}$ u OTA nazivaju se **algebarski zatvorena polja**. Poznato je da za svako polje $\mathbb{F}$ postoji polje $\bar{\mathbb{F}}$, takvo da je $\mathbb{F} \subseteq \bar{\mathbb{F}}$ i da je $\bar{\mathbb{F}}$ algebarski zatvoreno i ono se naziva **algebarsko zatvorenje polja $\mathbb{F}$** .

⁵²Évariste Galois, 1811–1832, francuski matematičar.

⁵³od kojih je nastala i Galoaova teorija.

⁵⁴ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ i $\bar{\bar{a}} = a$, za $a \in \mathbb{R}$.

6.46. Ireducibilnost (nesvodljivost) polinoma. Razlaganje polinoma na proste faktore. Kažemo da je polinom $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ reducibilan (svodljiv) nad $\mathbb{F}$ ako postoje polinomi $g(x)$ i $h(x) \in \mathbb{F}[x]$, tako da je:

- (i1) $f(x) = g(x)h(x)$,
- (i2) $\partial g \geq 1$ i $\partial h \geq 1$.

Ako takvi polinomi ne postoje kažemo da je polinom $f(x)$ **ireducibilan ili nesvodljiv**. Ireducibilni polinom stepena barem jedan nazivamo **prostim polinomom** nad $\mathbb{F}$. Prosti polinomi u teoriji polinoma igraju istu ulogu kao i prosti brojevi u teoriji brojeva.

Primedba. Posledica prethodne definicije, i osobina množenja polinoma su:

- (i1) svaki polinom stepena 1 (linearan polinom) je ireducibilan nad bilo kojim poljem $\mathbb{F}$, tj. linearni polinomi su uvek ireducibilni.
- (i2) definicija ireducibilnosti zavisi o polju $\mathbb{F}$, kao što pokazuje sledeći primer. Polinom

$$f(x) = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

je svodljiv nad $\mathbb{C}$, ali je nesvodljiv nad $\mathbb{R}$.

Ireducibilni polinomi u prstenu polinoma $\mathbb{F}[x]$, gde je $\mathbb{F}$ polje, igraju istu ulogu kao i prosti brojevi u prstenu $\mathbb{Z}$, jer i među polinomima važi teorema o faktORIZACIJI polinoma na proste faktore,

Teorema 1. *Neka je $f \in \mathbb{F}[x]$ polinom stepena barem jedan tada postoji skalar $a_n \in \mathbb{F}$, i različiti prosti monični polinomi $p_1, p_2, \dots, p_m$ i prirodni brojevi $r_1, r_2, \dots, r_m$ takvi da je*

$$(6.65) \quad f(x) = a_n p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m}.$$

Dekompozicija (6.65) je jedinstvena do na permutaciju polinoma $p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \dots, p_m^{r_m}$.

Ireducibilni polinomi nad $\mathbb{C}$. Posledica OTA pokazuje da su samo linearni polinomi ireducibilni nad poljem $\mathbb{C}$.

Ireducibilni polinomi nad $\mathbb{R}$. Budući da polje $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno, skup ireducibilnih polinoma nad $\mathbb{R}$ ne može se sastojati samo od linearnih polinoma. Polje $\mathbb{R}$ je *prilično dobro* jer među ireducibilnim polinomima osim linearnih polinoma postoje još samo kvadratni polinomi, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2. *Ireducibilni polinomi nad $\mathbb{R}$ su oblika:*

- (l) $x - \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$ ili
- (k) $x^2 + px + q$; $p, q \in \mathbb{R}$ takvi da je $p^2 - 4q < 0$.

Dokaz. Neka je $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, neki realni polinom stepena barem jedan. Kako je polinom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ zbog Posledice OTA znamo da polinom $f(x)$ ima tačno n nula u $\mathbb{C}$, računajući višestrukost.

Realne nule označimo sa $\alpha_1, \dots, \alpha_j$, $j \leq n$ i primena Bezouve leme implicira

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_j) g(x),$$

i pri tome polinom $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ nema više realnih nula. Ako je $g(x) \neq 1$ tada $g(x)$ ima kompleksnu nulu (OTA), recimo $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, i zbog 6.45 Propozicija, imamo da je i $g(\bar{z}_1) = 0$, a zatim primena Bezouve leme daje,

$$g(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1) g_1(x).$$

Kako je $z_1 = a_1 + i b_1$ imamo da je

$$(x - z_1)(x - \bar{z}_1) = x^2 + \underbrace{(-2a_1)}_{p_1 \in \mathbb{R}} x + \underbrace{a_1^2 + b_1^2}_{q_1 \in \mathbb{R}}$$

i pri tome je $p_1^2 - 4q_1 = 4a_1^2 - 4a_1^2 - 4b_1^2 = -4b_1^2 < 0$, jer je $b_1 \neq 0$. Sada primenimo isto na polinom $g_1(x)$. Ako je $g_1(x) \neq 1$ postoji (zbog OTA) $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ takav da je: $g_1(z_2) = g_1(\bar{z}_2) = 0$, pa zbog Bezouve leme opet imamo

$$g_1(x) = (x - z_2)(x - \bar{z}_2) g_2(x),$$

itd. Nakon konačno mnogo koraka dobijamo,

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_j) (x^2 + p_1 x + q_1) \cdots (x^2 + p_k x + q_k),$$

pri čemu je $j + 2k = n$. □

Ireducibilnost nad $\mathbb{Q}$. Budući da je polje $\mathbb{Q}$ "manje algebarski savršeno" od polja $\mathbb{R}$, a pogotovo od polja $\mathbb{C}$ za očekivati je da ima mnogo više ireducibilnih polinoma. Štaviše nad $\mathbb{Q}$ postoje ireducibilni polinomi bilo kojeg stepena većeg od 0..

6.47. Karakteristični polinom i invarijante sličnosti. Karakteristični polinom matrice. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica, tada matricu $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_n$, gde je λ promenljiva, nazivamo karakteristična matrica od $\mathcal{A}$, a njenu determinantu tj. polinom u λ :

$$(6.66) \quad \det \mathcal{C} = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)$$

nazivamo karakterističnim polinom matrice $\mathcal{A}$. Jednačinu,

$$(6.67) \quad \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0,$$

nazivamo karakteristična jednačina matrice $\mathcal{A}$.

Koristeći definiciju determinante, uzastopnim primenama razvoja determinante po 1.-vrsti ili korišćenjem formule (6.36), vidimo da je $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)$ polinom n -tog stepena u λ , tj. uz $\mathcal{C} = (\gamma_{ij})$ imamo,

$$(6.68) \quad \begin{aligned} \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) &= \det \mathcal{C} = (\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda) \cdots (\alpha_{nn} - \lambda) + q(\lambda) \\ &= k_n \lambda^n + k_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + k_1 \lambda + k_0, \quad k_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pri čemu je $q(\lambda)$ polinom stepena ne većeg od $n - 2$.⁵⁵

Ako sve upravo rečeno uzmemo u obzir onda lako nalazimo da je

$$(6.69) \quad \begin{aligned} k_n &= (-1)^n, & k_0 &= \kappa(0) = \det \mathcal{A} \\ k_{n-1} &= (-1)^{n-1} \operatorname{Tr} \mathcal{A}, & \text{gde je } \operatorname{Tr} \mathcal{A} &= \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}. \end{aligned}$$

Veličina $\operatorname{Tr} \mathcal{A}$ zove se **trag** matrice $\mathcal{A}$.

Primer 1. Neka je $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Nađimo karakteristični polinom matrice $\mathcal{A}$.

Računamo,

$$\begin{aligned} 0 = \det \mathcal{C} &= \det (\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc \\ &= \lambda^2 - \operatorname{Tr}(\mathcal{A}) \lambda + \det \mathcal{A} \end{aligned}$$

Primetimo,

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) &= \mathcal{A}^2 - \operatorname{Tr}(\mathcal{A}) \mathcal{A} + (\det \mathcal{A}) \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (a + d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc - (a + d)a + ad - bc & ab + bd - (a + d)b \\ ca + dc - (a + d)c & cb + d^2 - (a + d)d + ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{O}_2. \end{aligned}$$

Činjenica, da je $\kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ nije slučajna i važi za sve matrice nad poljem $\mathbb{F}$ i zove se Hamilton⁵⁶-Kejlijeva⁵⁷ teorema.

Iz prethodnog računa sledi da ako je matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ singularna, tj. $\det \mathcal{A} = 0$, onda iz $\mathcal{O}_2 = \kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^2 - \operatorname{Tr}(\mathcal{A}) \mathcal{A}$, sledi da je ona proporcionalna svom kvadratu.

Invarijante sličnosti. U glavi posvećenoj linearnim operatorima uveli smo relaciju sličnosti matrica na sledeći način: kažemo da su matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{M}_n$ **slične** i pišemo $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, ako i samo ako postoji regularna matrica $\mathcal{T}$ takva da je $\mathcal{B} = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{T}$.

Pokazali smo da je sličnost matrica **relacija ekvivalencije** na $\mathbb{M}_n$. Kao što smo videli ranije, u istoj glavi, relacija koja povezuje matrice proizvoljnog linearnog operatora A u bazama e i e' je

$$(6.70) \quad A(e') = [T_{ee'}]^{-1} A(e) T_{ee'}.$$

Iz (6.70) i definicije sličnosti matrica odmah sledi da slične matrice predstavljaju zapis istog linearnog operatora u različitim bazama pri čemu je matrica $\mathcal{T}$ matrica prelaska sa prve baze u drugu.

Invarijante sličnosti su svojstva linearnog operatora $A \in \operatorname{Hom} V$ koja ne zavise od njegovog matričnog zapisa, tj. mogu se pročitati iz matrice operatora u bilo kojoj

⁵⁵ Primetimo da se λ pojavljuje samo u dijagonalnim elementima matrice $\mathcal{C}$ i to sa stepenom 1. S druge strane ako u opštem elementu, $\xi(\mathcal{C})$ od $\det \mathcal{C}$ izbacimo neki dijagonalni element, moramo izbaciti barem još jedan (jer se iz svake vrste i kolone matrice $\mathcal{C}$ nalazi tačno jedan faktor u $\xi(\mathcal{C})$), tako da je $q(\lambda)$ suma polinoma u λ čiji stepen ne premašuje $n - 2$.

⁵⁶ Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865, irski matematičar, astronom i fizičar.

⁵⁷ Arthur Cayley, 1821–1895, engleski matematičar.

bazi, jer su ista u svakoj bazi. Ispostavlja se da važi jednostavna, ali veoma važna činjenica.

Teorema. *Karakteristični polinom je invarijanta sličnosti.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ slične matrice, tada postoji regularna matrica $\mathcal{T}$ takva da je $\mathcal{B} = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{T}$, tako da sada nalazimo,

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{B}}(\lambda) &= \det(\mathcal{B} - \lambda \mathbb{I}_n) = \det(\mathcal{T}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{T} - \lambda \mathbb{I}_n) = \det(\mathcal{T}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{T} - \mathcal{T}^{-1}(\lambda \mathbb{I}_n) \mathcal{T}) = \det(\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_n) \mathcal{T}) \\ &= \det(\mathcal{T}^{-1}) \det(\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_n) \det(\mathcal{T}) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_n) = \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda),\end{aligned}$$

tj. slične matrice imaju isti karakteristični polinom. $\square$

Definicija. Tvrdnja prethodne teoreme, tj. činjenica da se karakteristični polinomi sličnih matrica podudaraju, omogućuje da definišemo **karakteristični polinom** linearnog operatora $A \in \text{Hom } V$ formulom:

$$\kappa_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{A(e)}(\lambda),$$

gde je e neka baza vektorskog prostora V .

Kako je karakteristični polinom invarijanta sličnosti, svi koeficijenti karakterističnog polinoma su takođe invarijante sličnosti operatora A . Specijalno, $\text{Tr } A$ i $\det A$ su invarijante sličnosti, i možemo, na analogan način, definisati trag i determinantu linarnog operatora $A \in \text{Hom } V$ formulom:

$$\text{Tr } A \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr } A(e), \quad \det A \stackrel{\text{def}}{=} \det A(e),$$

gde je e neka baza vektorskog prostora V .

Primer 2. Neka je R operator rotacije u ravni za ugao $\theta \in [0, 2\pi]$. Nađimo njegov karakteristični polinom. Kako karakteristični polinom ne zavisi o izabranoj bazi, nađimo matricu operatora R u standardnoj ortonormiranoj bazi $e = (e_1, e_2)$. Operator R deluje na sledeći način, vidi Sliku 1,

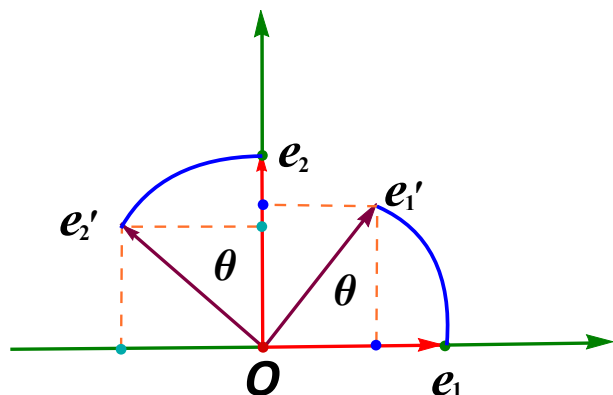
$$R(e_1) = (\cos \theta) e_1 + (\sin \theta) e_2,$$

$$R(e_2) = (-\sin \theta) e_1 + (\cos \theta) e_2,$$

$$\text{tako da je } R(e) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Odakle nalazimo,

$$\kappa_R(\lambda) = (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = \lambda^2 - 2(\cos \theta) \lambda + 1.$$



Slika 4. Operator rotacije

6.48. Hamilton-Kejljeva teorema. Budući da je množenje matrica asociativna operacija, za proizvoljnu matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$ dobro su definisani njeni stepeni, $\mathcal{A}^0 = \mathbb{I}_n$, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}$, ..., $\mathcal{A}^{n+1} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}$, a onda i linearne kombinacije istih. Drugim rečima, za bilo koji polinom $p \in \mathbb{R}[\lambda]$ ima smisla posmatrati matricu $p(\mathcal{A})$

koju dobijemo tako što promenljivu u polinomu $p(\lambda)$ zamenimo matricom $\mathcal{A}$. Štaviše, nije teško videti da vredi sledeća propozicija.

Propozicija. *Za proizvoljnu matricu $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ postoji polinom $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ takav da je $p(\mathcal{A}) = 0$.*

Dokaz. Posmatrajmo skup $E = \{\mathbb{I}_n, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{n^2}\} \subseteq \mathbb{M}_n$. Kako skup E ima $n^2 + 1$ element i kako je $\dim \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) = n^2$, zaključujemo da je skup E linearno zavisna, tj. postoje skalari $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2} \in \mathbb{R}$, od kojih barem jedan nije 0, takvi da je:

$$\alpha_0 \mathbb{I}_n + \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_2 \mathcal{A}^2 + \dots + \alpha_{n^2} \mathcal{A}^{n^2} = 0,$$

odakle sledi da je traženi polinom,

$$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_{n^2} \lambda^{n^2}.$$

I dokaz je gotov. □

Prethodna propozicija, za proizvoljnu matricu $\mathcal{A}$, daje egzistenciju polinoma kojeg poništava data matrica $\mathcal{A}$, i koji je stepena ne većeg od n^2 . Sada se postavlja pitanje da li za proizvoljnu matricu $\mathcal{A}$ postoji polinom manjeg stepena koji ju poništava. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan, i dat je u sledećoj teoremi.

Teorema (Hamilton – Kejli). *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica, tada je $\kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, tj. svaka matrica poništava svoj karakteristični polinom.*

Primedba. Ova teorema predstavlja značajno jače tvrđenje od prethodne propozicije, jer je stepen polinoma koji poništava datu matricu spušten sa n^2 na n . Postoje matrice kod kojih se taj stepen ne može sniziti npr. matrica $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ima karakteristični polinom $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ i očigledno ne postoji polinom prvog stepena kojeg bi poništavala matrica $\mathcal{A}$, jer $\mathcal{A}$ nije proporcionalna jediničnoj matrici.

6.49. Minimalni polinom matrice. U mnogim slučajevima postoji polinom manjeg stepena od reda matrice kojeg data matrica $\mathcal{A}$ poništava. Minimalni polinom matrice $\mathcal{A}$, u oznaci $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) \in (\mathbb{R})$, je monični polinom⁵⁸ najmanjeg stepena kojeg poništava matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ tj. važi

$$(6.71) \quad \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}.$$

Primetimo, da je minimalni polinom određen do na množenje sa ne-nula skalarom, i da bismo dobili njegovu jedinstvenost potrebno ga je normirati, npr. zahtevom da je vodeći koeficijent tog polinoma jednak 1. Osnovna svojstva minimalnog polinoma sadržana su u sledećoj teoremi, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 1. *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$.*

- (i1) *Ako je $p \in \mathbb{R}[\lambda]$ takav da je $p(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ tada $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) \mid p(\lambda)$. Specijalno, minimalni polinom matrice $\mathcal{A}$ deli njen karakteristični polinom.*
- (i2) *Minimalni polinom je invarijanta sličnosti.*

⁵⁸ Monični polinom je polinom čiji vodeći koeficijent je 1.

Primedba 1. Tvrdjenje (i2) prethodne teoreme, tj. činjenica da je $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mu_{\mathcal{B}}(\lambda)$ za slične matrice $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, omogućuje da definišemo minimalni polinom linearnog operatora $A \in \text{Hom } V$ formulom:

$$\mu_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{A(e)}(\lambda),$$

gde je e neka baza vektorskog prostora V .

Primena minimalnog i karakterističnog polinoma: invertiranje matrice. Ako je data neka matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$ i ako je dat polinom $p \in \mathbb{R}[x]$, takav da je $p(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ (a takvi su npr. karakteristični i minimalni polinom matrice $\mathcal{A}$), može se iskoristiti pod nekim uslovima da nađemo inverz matrice $\mathcal{A}$, kao što pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n$ matrica i $p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ polinom takav da je $p(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Ako je

(i1) $\alpha_0 \neq 0$, tada je $\mathcal{A}$ invertibilna matrica,

(i2) ako je $p = \mu_{\mathcal{A}}$, tada je $\mathcal{A}$ invertibilna matrica *akko* je $\alpha_0 \neq 0$.

Dokaz. (i1) Neka je $p(\lambda) = \alpha_k \lambda^k + \alpha_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$, tako da imamo,

$$\mathcal{O} = p(\mathcal{A}) = \alpha_k \mathcal{A}^k + \dots + \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_0 \mathbb{I}_n \quad \text{odakle je} \quad \mathbb{I}_n = \left(-\frac{1}{\alpha_0} (\alpha_k \mathcal{A}^{k-1} + \dots + \alpha_1 \mathbb{I}_n) \right) \mathcal{A},$$

odavde zbog jedinstvenosti inverzne matrice nalazimo,

$$(6.72) \quad \mathcal{A}^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} (\alpha_k \mathcal{A}^{k-1} + \dots + \alpha_1 \mathbb{I}_n).$$

Time je pokazano (i1).

(i2) Dovoljnost. Dokazana je u (i1) za sve polinome koje poništava matrica $\mathcal{A}$, pa i za minimalni polinom matrice $\mathcal{A}$.

Nužnost. Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ invertibilna matrica i da je $\alpha_0 = 0$, tada imamo

$$\mathcal{O} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_2 \mathcal{A}^2 + \dots + \mathcal{A}^n = \mathcal{A} (\alpha_1 \mathbb{I}_n + \alpha_2 \mathcal{A} + \dots + \mathcal{A}^{n-1}),$$

množeći ovu jednakost sa $\mathcal{A}^{-1}$ sa leve strane dobijamo da matrica $\mathcal{A}$ poništava i polinom

$$\nu(\lambda) = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \dots + \lambda^{n-1},$$

što je nemoguće jer je stepen polinoma ν manji od stepena minimalnog polinoma matrice $\mathcal{A}$. □

Primedba 3. Naravno iz (6.72) vidimo da je za nalaženje inverza matrice najekonomičnije koristiti minimalni polinom, jer je najmanjeg stepena.

Primer. Primenom upravo opisane metode u prethodnoj propoziciji, nađimo inverz

$$\text{matrice } \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Prvo nađimo karakteristični polinom matrice $\mathcal{A}$. Računamo

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 2 - 2\lambda) \\ &= -(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2. \end{aligned}$$

Formula (6.72) primenjena na naš slučaj daje,

$$\mathbb{I}_3 = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^2 - 4\mathcal{A} + 5\mathbb{I}_3)\mathcal{A}, \quad \text{tako da je} \quad \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^2 - 4\mathcal{A} + 5\mathbb{I}_3),$$

i nakon kraćeg računa nalazimo,

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^2 - 4\mathcal{A} + 5\mathbb{I}_3) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6.50. Sopstvene vrednosti linearnog operatora. Neka je V **realni** vektorski prostor. Tada se skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ zove se **sopstvena** (svojstvena, karakteristična) vrednost linearnog operatora $A \in \text{Hom } V$

ako postoji $0 \neq x \in V$ takav da je $Ax = \lambda x$.

Vektor x iz gornje definicije zovemo **sopstvenim** (svojstvenim, karakterističnim) vektorom koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ .⁵⁹ Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori sadrže najvažnije informacije (moglo bi se reći da su lična karta' linearnog operatora) o linearnom operatoru. Skup svih sopstvenih vrednosti linearnog operatora zove se **spektar operatora** A i obeležavamo ga sa $\text{Sp}(A)$.

Posmatrajmo skup $V_\lambda^A = V_\lambda = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\}$, koji se sastoji od sopstvenih vektora koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ i nula vektora. U sledećoj propoziciji otkrivamo algebarsku strukturu skupa V_λ^A .

Propozicija. V_λ^A je potprostor od V .

Skup V_λ^A nazivamo **sopstveni potprostor sopstvene vrednosti** λ operatora A .

Dokaz. Potrebno je proveriti jedan od ekvivalentnih uslova iz karakterizacije vektorskog potprostora. Dakle, neka su $x, y \in V_\lambda^A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Sada nalazimo,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \lambda \alpha x + \lambda \beta y = \lambda(\alpha x + \beta y),$$

odakle odmah vidimo da je $\alpha x + \beta y \in V_\lambda^A$, tj. V_λ^A je potprostor od V . □

Primedba. Primetimo da na sopstvenom prostoru V_λ^A operator A deluje kao skalar (množenjem sa skalarom) λ , jer je $Ax = \lambda x$. Dakle, ideja je da čitav prostor dekomponujemo, po mogućnosti, u uniju sopstvenih potprostora koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima i na svakom od njih bi operator A delovao kao skalar. Nažalost, to nije moguće uvek (za svaki linearni operator) uraditi !

Postavlja se pitanje šta su nule karakterističnog polinoma i kakva je njihova veza sa sopstvenim vrednostima. Odgovor na to pitanje dat je u sledećoj jednostavnoj, ali važnoj teoremi.

Teorema 1 (Karakterizacija sopstvenih vrednosti linearnog operatora). *Neka je A linearni operator na realnom⁶⁰ vektorskom prostoru V , tj. $A \in \text{Hom } V$. Tada je $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sopstvena vrednost linearnog operatora A **akko** $\kappa_A(\lambda_0) = 0$.*

⁵⁹ Obratite pažnju da je **sopstveni vektor** $x \neq 0$.

⁶⁰ Tvđenje ove teoreme važi za proizvoljno polje F .

Dokaz. Neka je λ_0 sopstvena vrednost operatora A , tada postoji $\mathbf{0} \neq x \in V$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Odakle sledi da je $(A - \lambda_0 \mathbb{I}_n)(x) = \mathbf{0}$, tj. operator $A - \lambda_0 \mathbb{I}_n$ je singularan, jer je njegovo jezgro netrivialno. Kako se determinanta singularnog operatora poništava, biće $\det(A - \lambda_0 \mathbb{I}_n) = 0$. Budući da je $\kappa_A(\lambda_0) = \det(A - \lambda_0 \mathbb{I}_n) = 0$, tj. λ_0 nula karakterističnog polinoma operatora A .

Za obrat je dovoljno krenuti u prethodnom nizu implikacija od poslednje ka prvoj. $\square$

Primedba 1. Kako je karakteristični polinom invarijanta sličnosti, prethodna teorema pokazuje da je pojam sopstvene vrednosti dobro definisan i ne zavisi od baze u kojoj posmatramo matricu operatora A .

Primedba 2. Primetimo da definicija sopstvene vrednosti bitno zavisi o polju nad kojim je V vektorski prostor, kao što pokazuje sledeći primer: neka je A operator kojem u nekoj bazi odgovara matrica $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Karakteristični polinom od A je $\mu_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Prema prethodnoj teoremi sopstvene vrednosti su nule karakterističnog polinoma, dakle ako operator A deluje na realnom vektorskom prostoru V onda A nema sopstvenih vrednosti, a ako je V kompleksan vektorski prostor (recimo $\mathbb{C}^2$) onda operator A ima dve sopstvene vrednosti $\lambda_{1,2} = \pm i$. Prethodna Primedba 2. otvara pitanje koliko najviše sopstvenih vrednosti može imati linearni operator. Odgovor na to pitanje dat je u sledećoj teoremi, koja je posledica onoga što smo naučili o ireducibilnim polinomima nad algebarski zatvorenim polju.

Teorema 2. *Linearni operator koji deluje na n -dimenzionom kompleksnom vektorskom prostoru⁶¹ ima tačno n -sopstvenih vrednosti (među kojima može biti istih).*

Dokaz. Kako je polje $\mathbb{C}$ algebarski zatvoreno samo su linearni polinomi nesvodljivi (ireducibilni), i svaki polinom, pa i karakteristični polinom od A dopušta faktorizaciju

$$(6.73) \quad \kappa_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

gde su $\lambda_i \in \mathbb{C}$, za sve $i = 1, \dots, n$. Kako su nule karakterističnog polinoma operatora A njegove sopstvene vrednosti, tvrdnja odmah sledi. $\square$

Primedba 3. Prethodna teorema pokazuje da linearni operator A koji deluje na n -dimenzionom vektorskom prostoru V može imati najviše $n = \partial \kappa_A$ sopstvenih vrednosti, tj. potrebno je da važi faktorizacija (6.73) karakterističnog polinoma κ_A (pri čemu su $\lambda_i \in \mathbb{F}$). Ona uvek važi ako je polje algebarski zatvoreno (kao npr. polje $\mathbb{C}$), a ponekad može da važi i ako polje nije algebarski zatvoreno (kao npr. polje $\mathbb{R}$.)

Znamo da minimalni polinom nekog operatora deli njegov karakteristični polinom, ali važi i više: karakteristični i minimalni polinom operatora imaju iste ireducibilne faktore, jer važi,

Teorema 3. *Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F}$ je ili $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$).*

- (i1) *Svaki ireducibilni faktor karakterističnog polinoma matrice $\mathcal{A}$ ujedno je i ireducibilni faktor minimalnog polinoma iste.*

⁶¹ Polje $\mathbb{C}$ je algebarski zatvoreno, jer svaki polinom stepena barem 1 iz $\mathbb{C}[x]$ ima barem jednu nulu u $\mathbb{C}$.

(i2) Ako karakteristični polinom $\kappa_A(\lambda)$ nema višestrukih nula onda je $\kappa_A(\lambda) = \mu_A(\lambda)$.

6.51. O dijagonalizaciji linearnog operatora. Neka je $A \in \text{Hom } V$ linearni operator koji je zadat u nekoj bazi e svojom matricom $A(e) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Proces nalaženja baze, ako takva postoji, u kojoj je matrica polaznog operatora dijagonalna zove se **dijagonalizacija linearnog operatora**. Za operator A kažemo da je **dijagonalizabilan** ako postoji baza f u kojoj je matrica operatora $A(f)$ dijagonalna. Naravno, dijagonalizabilnost zavisi o polju $\mathbb{F}$, jer su u procesu dijagonalizacije važne sopstvene vrednosti operatora, a kao što znamo one zavise o polju $\mathbb{F}$ nad kojim je V vektorski prostor.

Ipak postoje operatori koje se ne mogu svesti na dijagonalni oblik ni nad jednim poljem, takav je npr. operator A kojem u nekoj bazi e odgovara matrica

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je matrica $A(e)$ nilpotentna, tj. $A(e)^2 = \mathbf{0}$.

Sada je potrebno ispitati u kakvom su odnosu sopstveni vektori operatora A koji pripadaju različitim sopstvenim vrednostima.

Lema. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ međusobno različite sopstvene vrednosti linearnog operatora $A \in \text{Hom } V$ i neka su redom $v_1, v_2, \dots, v_k$ odgovarajući sopstveni vektori. Tada je skup vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linearno nezavisan.

Dokaz. Posmatrajmo jednačinu linearne nezavisnosti,

$$(6.74) \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}.$$

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju sopstvenih vrednosti.

Ako je $n = 1$ onda nemamo što dokazivati i tvrdnja očigledno važi. Zato pretpostavimo da je tvrdnja tačna ako imamo $n = k - 1$ međusobno različitu sopstvenu vrednost.

Ako jednakost (6.74) prvo pomnožimo sa λ_k , a zatim na istu jednakost delujemo operatorom A i iskoristimo da je $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, k$, dobijamo sistem,

$$(6.75) \quad \lambda_k (\alpha_1 v_1) + \lambda_k (\alpha_2 v_2) + \dots + \lambda_k (\alpha_k v_k) = \mathbf{0},$$

$$(6.76) \quad \lambda_1 (\alpha_1 v_1) + \lambda_2 (\alpha_2 v_2) + \dots + \lambda_k (\alpha_k v_k) = \mathbf{0}.$$

Ako od jednačine (6.76) oduzmemo jednačine (6.75), dobićemo,

$$(6.77) \quad (\lambda_1 - \lambda_k) \alpha_1 v_1 + (\lambda_2 - \lambda_k) \alpha_2 v_2 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \alpha_{k-1} v_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Sada u jednačini (6.77) iskoristimo pretpostavku indukcije primenjenu na $(k - 1)$ vektor $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$, i zaključujemo da su oni linearno nezavisni, tako da su svi skalari $(\lambda_i - \lambda_k) \alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Budući da su sve sopstvene vrednosti operatora A različite, $(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0, \forall i$, pa je $\alpha_i = 0$, za $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Sada se jednakost (6.74) svodi samo na $\alpha_k v_k = \mathbf{0}$ i kako se sopstveni vektor v_k ne poništava, sledi da je $\alpha_k = 0$. Time smo pokazali da jednačina linearne nezavisnosti (6.74) ima samo trivijalno rešenje, tj. skup $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je linearno nezavisan. $\square$

Teorema (o karakterizaciji dijagonalizabilnosti). Neka je $A \in \text{Hom } V$ linearni operator nad poljem $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) Tada su sledeći iskazi ekvivalentni,

- (i1) A je dijagonalizabilan.
 (i2) Postoji baza e od V koja se sastoji od sopstvenih vektora.

Dokaz. Sada ćemo dokazati ekvivalentnost iskaza (i1) i (i2).

Ako je A dijagonalizabilna onda postoji baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ od V u kojoj je matrica operatora A dijagonalna, tj. $A(e) = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$. Ako se setimo kako se linearnom operatoru dodeljuje matrica u datoj bazi (6.23), tada je $Ae_i = \lambda_i e_i$ za svaki $i = 1, 2, \dots, n$, a to znači da su svi vektori baze e sopstveni vektori.

Obratno, ako postoji baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ koja se sastoji od sopstvenih vektora operatora A , tada je očigledno matrica operatora u toj bazi $A(e) = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, a to je (i1).

U ovom slučaju lako nalazimo da je karakteristični polinom matrice $A(e) = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, jednak

$$\kappa_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

□

Posledica 1. Ako je operator A dijagonalizabilan, tada u bazi u kojoj je predstavljen dijagonalnom matricom, na glavnoj dijagonali nalaze se sopstvene vrednosti od A .

Dokaz. Očigledno, vidi dokaz prethodne teoreme. □

Posledica 2. Ako operator A ima $n = \dim V$ međusobno različitih sopstvenih vrednosti onda je on dijagonalizabilan.

Dokaz. Ako operator A ima $n = \dim V$ međusobno različitih sopstvenih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tada su odgovarajući sopstveni vektori $e_1, e_2, \dots, e_n$ linearno nezavisni prema prethodnoj lemi, a kako ih ima tačno $n = \dim V$, oni čine jednu bazu vektorskog prostora V , i tada prethodna teorema implicira dijagonalizabilnost operatora A . □

Proces dijagonalizacije. Sada imamo sve potrebne elemente da sastavimo algoritam za dijagonalizaciju datog lineranog operatora A , ako je on dijagonalizabilan. Taj algoritam ima sledeće korake:

- (i1) nađu se sve sopstvene vrednosti operatora A , tj. reši se sistem homogenih linearnih jednačina, $(\det A - \lambda \mathbb{I}_n)x = \mathbf{0}$,
 (i2) formira se polinom $p(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)$, pri čemu je $\text{Sp}(A) = \{\lambda_i, i = 1, \dots, k\}$ skup svih sopstvenih vrednosti operatora A ,
 (i3) proveriti se da li je $p(A) = 0$, ako jeste A je dijagonalizabilan; ako nije A nije dijagonalizabilan,
 (i4) ako je A dijagonalizabilan nađemo odgovarajuće sopstvene vektore u polaznoj bazi e , tj. vektore $v_i(e) = (t_{1i}, \dots, t_{ni})$, $i = 1, \dots, n$, i formiramo matricu prelaska T_{ev} ,
 (i5) ako linerani operator A u bazi e ima matricu $A(e)$, matrica $A(v) = T_{ev}^{-1}A(e)T_{ev}$ je dijagonalna.

Primer. Odredimo karakteristični i minimalni polinom kao i sopstvene vrednosti i sopstvene vektore date matrice, a zatim ispitajmo da li je matrica dijagonalizabilna nad $\mathbb{R}$, gde je $\mathcal{A}$ sledeća matrica,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Nalaženje sopstvenih vektora za sopstvenu vrednost λ_0 svodi se na rešavanje homogenog sistema:

$$(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathbb{I}_n) x = 0.$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathcal{A}}(\lambda) &= \det(\mathcal{A} - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &\quad + 2 \begin{vmatrix} 2 & -2-\lambda \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = (4-\lambda)((\lambda+2)^2 - 4) + 4(-4 - 2\lambda + 4) + 2(8 - 8 - 4\lambda) \\ &= \lambda(16 - \lambda) - 8\lambda - 8\lambda = -\lambda^3. \end{aligned}$$

Kako $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)$, ima samo jedan trostruki ireducibilni faktor λ , kandidati za minimalni polinom $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)$ su: λ, λ^2 i λ^3 . Očigledno, $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) \neq \lambda$, jer je $\mathcal{A} \neq \mathbf{0}$. Dakle, sada je potrebno samo još izračunati $\mathcal{A}^2$ da bismo odredili minimalni polinom. Lako se proverava da je $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2$.

Dakle, iz gornjeg računa vidimo da $\kappa_{\mathcal{A}}(\lambda)$ ima trostruku nulu $\lambda_0 = 0$, tako da je 0 jedina sopstvena vrednost matrice $\mathcal{A}$. Odredimo sopstvene vektore: neka je x traženi vektor onda je: $\mathbf{0} = (\mathcal{A} - \lambda_0 \mathbb{I}_n)x = \mathcal{A}x$. Ovaj homogeni sistem rešavamo na standardan način:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} 2. \text{ vrstu pomnožimo} \\ \text{sa } -2 \text{ i dodamo } 1. \text{ i} \\ \text{sa } 2 \text{ i dodamo } 3. \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{l} \text{Odavde lako nalazimo sopstvene vektore:} \\ v_1 = (-1, 0, 2)^T \quad \text{i} \quad v_2 = (1, 1, 0)^T. \end{array}$$

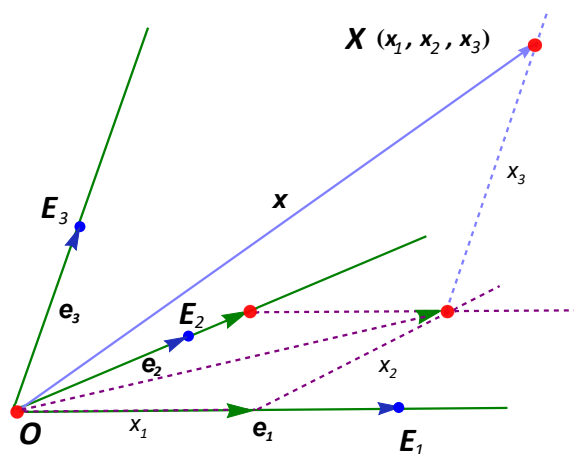
Vidimo da postoje dva linearno nezavisna sopstvena vektora za sopstvenu vrednost $\lambda_0 = 0$, tj. ne postoji baza koja se sastoji od sopstvenih vektora, tako da polazna matrica nije dijagonalizabilna.

Analitička geometrija

1. Linearna analitička geometrija ravni i prostora

7.1. Koordinate tačaka. Koristeći sada pojam koordinata vektora uvodimo pojam koordinata tačaka u prostoru $\mathbb{E}$. Prvo izaberimo neku tačku $O \in \mathbb{E}$ i $e = (e_1, e_2, e_3)$ bazu vektorskog prostora V . Tada proizvoljnoj tački $X \in \mathbb{E}$ (Slika 1) pridružimo jedinstven vektor $x = \mathbf{OX}$ koji nazivamo vektorom položaja ili radijus vektorom tačke. Dakle, za datu tačku O postoji bijekcija između vektora prostora V i tačaka prostora $\mathbb{E}$.

Zbog toga koordinate vektora x u bazi e vektorskog prostora V , nazivamo **koordinatama tačke** X u odnosu na tačku O i bazu $e = (e_1, e_2, e_3)$ zovemo **koordinatni sistem** u $\mathbb{E}$, i obeležavamo ga sa (O, e) . Napomenimo da se analogno uvode koordinatni sistemi na pravoj $\mathbb{E}^1$ i ravni $\mathbb{E}^2$ samo što se u tim slučajevima baza vektorskih prostora V^1 i V^2 sastoje od jednog ($e = (e_1)$) odnosno dva ($e = (e_1, e_2)$) vektora. Ako sa x_1, x_2 i x_3 obeležimo ose određene vektorima e_1 ,



Slika 1. Koordinate tačke

e_2 i e_3 i tačkom O , koordinatni sistem na pravoj ($\mathbb{E}^1$) obeležavamo i sa Ox_1 ; u ravni ($\mathbb{E}^2$) sa Ox_1x_2 i u prostoru ($\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}$) sa $Ox_1x_2x_3$. Tačku O nazivamo **koordinatnim početkom**, a ose x_1, x_2, x_3 **koordinatnim osama**. Ako su x_1 , ili x_1 i x_2 , ili x_1 i x_2 i x_3 koordinate tačke X u koordinatnom sistemu neke prave, ravni ili prostora, tu tačku ćemo obeležavati i sa $X(x_1)$, ili $X(x_1, x_2)$, ili $X(x_1, x_2, x_3)$, ili jednostavno sa (x_1) , (x_1, x_2) , (x_1, x_2, x_3) , bez bojazni da može doći do zabune budući da na isti način obeležavamo i vektore.

7.2. Nule realnih vektorskih funkcija. U prethodnoj tački videli smo kako tačkama prostora ili ravni dodeljujemo koordinate. Sledeći korak je da pokušamo da opišemo neke jednostavnije skupove tačaka koje znamo iz svakodnevnog iskustva i ranijeg školovanja kao što su prazan skup, jedna tačka, prave, ravni, krugovi, sfere, elipse, cilindri i druge, kao skupove nule nekih funkcija koordinata njihovih tačaka, tj. realnih funkcija koordinata tačaka ravni $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ili prostora $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sada za datu funkciju f uvodimo oznaku,

$$(7.1) \quad \mathcal{N}_f = \{x \in \mathbb{E}^m | f(x) = f(x_1, \dots, x_m) = 0\}, \quad \text{gde je } m = 2 \text{ ili } m = 3.$$

Naravno, ne moramo gledati samo nule realnih funkcija, već možemo skupove definisati nejednakostima tipa $f(x) > 0$ i drugima. Kada dobijemo skupove tačaka (nula(jednakosti) ili nejednakostima) na opisane načine nekih polinoma onda sa njima možemo raditi i kao sa drugim skupovima, tj. možemo tražiti njihove unije preseke i sl. I krećemo, kao i uvek, od najjednostavnijih slučajeva ka složenijima. Od svih funkcija najjednostavnije su konstante, i one nisu od nekog većeg interesa. Sledeće po jednostavnosti su linearni polinomi u više promenljivih, pa kvadratni polinomi, itd. Zašto je važno izučiti polinome, tj. skupove koji oni definišu? Odgovor na ovo pitanje daje analogon Tejlorove formule¹ za funkcije više promenljivih, jer za široku klasu (diferencijabilne) funkcija moguće ih je po volji aproksimirati Tejlorovim polinomima u više promenljivuh. U ovom tekstu bavimo se detaljno slučajem kada je f linearan polinom, a u slučaju kada je kvadratni navodimo rezultate, uglavnom bez dokaza, koji se mogu naći u standardni udžbenicima iz Analitičke geometrije.

U ovom pristupu pojavljuje se veliki problem određivanja nula polinoma, mi znamo da je to već i problem kada imamo samo jednu promenljivu i ako je stepen polinoma barem pet. Matematička oblast koja se bavi skupovima nula polinoma zove se **algebarska geometrija**. Postoje i drugi prirodniji pristupi izučavanju geometrijskih skupova, a taj je da se oni zadaju parametarski, tj. **svaka** koordinata tačke iz tog skupa kojeg želimo opisati (koja se obično naziva **geometrijsko mesto tačaka**) je neka funkcija od tih parametara (vidi tačku posvećenu parametarskom zadavanju funkcija). Taj pristup nas vodi ka oblasti geometrije koja se zove diferencijalna geometrija, i da bismo jednog dana do tamo stigli moramo krenuti od fundamentalnih stvari, a to je linearna analitička geometrija ravni i prostora!

2. Prave u ravni

7.3. Jednačine prave u ravni. Neka je zadat Dekartov pravougli koordinatni sistem (O, e_1, e_2) , i u njime određenoj ravni, $\mathbb{E}^2$, prava l . Prema Euklidovim aksiomama svaka prava jednoznačno je određena sa svoje dve različite tačke A_1 i A_2 , koje određuju vektor $s = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ čijem smeru pripada i data prava l . Dakle, ako nam je dat vektor $s \neq \mathbf{0}$ tada se njegov pravac sastoji iz beskonačnog broja paralelnih pravih. Da bismo odabrali jednu od njih npr. l , potrebno je da izaberemo još jednu njenu tačku recimo A_1 . Dakle, na jeziku vektora prava je jednoznačno određena vektorom s , kojeg nazivamo **vektor pravca prave l** , i jednom svojom tačkom A_1 . Primetimo da će tačka $X \in \mathbb{E}^2$ pripadati pravoj l akko su vektori $\mathbf{A}_1\mathbf{X}$ i s kolinearni (linearno zavisni), vidi Sliku 2. Dakle, (7.2) predstavlja parametarsku jednačinu prave u vektorskom obliku. Broj λ je parametar i svakom $\lambda \in \mathbb{R}$ odgovara jedinstvena tačka na pravoj l ,

$$(7.2) \quad X \in \mathbb{E}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}_1\mathbf{X} = \lambda s \quad \text{za neko } \lambda \in \mathbb{R}.$$

¹ prisetimo se glave posvećene diferencijalnom računu i Tejlorove formule za realne fukcije jede promenljive.

Dakle, (7.2) predstavlja parametarsku jednačinu prave u vektorskom obliku. Broj λ je parametar i svakom $\lambda \in \mathbb{R}$ odgovara jedinstvena tačka na pravoj l , koju ćemo ponekad zapisivati kao $l(\lambda)$ kada znamo A_1 i s , jer je $l(\lambda)$ funkcija i od A_1 i s , tj. $l(\lambda, A_1, s)$. Primetimo da vektorska jednačina (7.2) ne zavisi o dimenziji, tako je vektorska jednačina prave u euklidskom prostoru $\mathbb{E}^m$ data sa (7.2). Jednačinu (7.2) sada možemo napisati i koordinatno. Neka su date tačke

$A_1 = (y_1, y_2)$, $A_2 = (z_1, z_2)$, $X = (x_1, x_2)$, tada je $s = (\xi_1, \xi_2) = (z_1 - y_1, z_2 - y_2)$ i $\mathbf{A}_1 \mathbf{X} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$

$$(7.3) \quad \begin{aligned} x_1 - y_1 &= \lambda \xi_1 \\ x_2 - y_2 &= \lambda \xi_2 \end{aligned} \iff$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda \xi_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda \xi_2. \end{aligned}$$

Ili opštije u prostoru tačaka² $\mathbb{E}^m$,

$$(7.4) \quad \begin{aligned} x_1 - y_1 &= \lambda \xi_1 \\ x_2 - y_2 &= \lambda \xi_2 \\ \vdots &\vdots \\ x_m - y_m &= \lambda \xi_m \end{aligned} \iff$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda \xi_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda \xi_2 \\ \vdots &\vdots \\ x_m &= y_m + \lambda \xi_m, \end{aligned}$$

gde je $A_1 = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ i $s = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$.

Budući je $\mathbb{E}^2$ dvodimenzion, vidimo da za dati vektor s pravca prave l postoji jedinstveni pravac koji je normalan na pravac vektora s . Sada, obeležimo sa n neki vektor čiji je pravac normalan na pravac vektora s , vidi Sliku 3. Vektor $n = \mathbf{AB}$ nazivamo vektorom normale prave l . Primetimo da je prava l određena vektorom n i proizvoljnom tačkom prave A , jer važi:

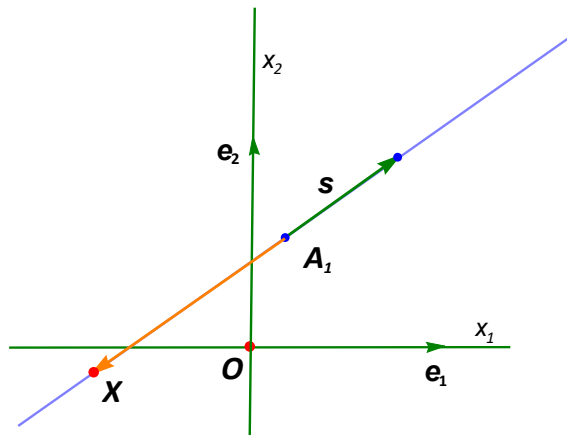
$$X \in l \iff \mathbf{AX} \perp n \iff \mathbf{AX} \cdot n = 0$$

$$\iff a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) = 0,$$

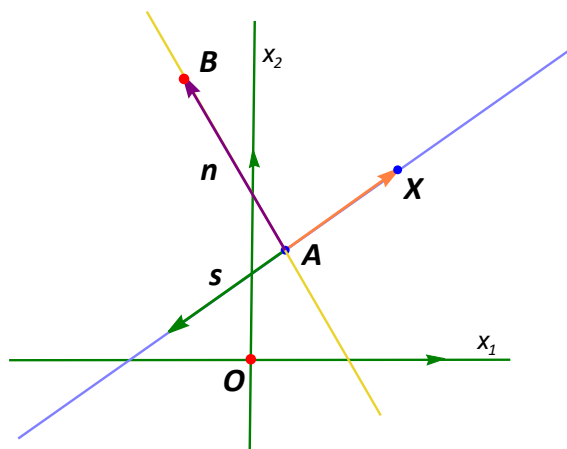
gde je $A = (y_1, y_2)$, $X = (x_1, x_2)$, i $n = (a_1, a_2)$. Jednačinu iz poslednje ekvivalenciju možemo prepisati, i kao

$$(7.5) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0,$$

gde je $b = -n \cdot \mathbf{OA} = -(a_1 y_1 + a_2 y_2)$.



Slika 2. Jednačina prave



Slika 3. Jednačina prave

²Prostor tačaka zove se afini prostor.

Prethodna jednačina zove se **opšta jednačina prave**, zato jer se svakoj pravoj iz $\mathbb{E}^2$ može dodeliti jednačina oblika (7.5)³. Primetimo da se parametarska jednačina prave (7.2), eliminacijom parametra λ može svesti na opštu jednačinu prave (samo u dimenziji $m = 2$). Koristićemo sledeće oznake za pravu l ⁴ da istaknemo kako je zadata: $l = l(s, A_1)$ (vektorom pravca i jednom svojom tačkom), $l = l(A_1, A_2)$ (dve svoje tačke) ili $l = l(n, A_1)$ (vektorom normale i jednom svojom tačkom).

Teorema. *Neka je $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linearni polinom, tada je skup njegovih nula $\mathcal{N}_f$ prava. Važi i obrat, za svaku pravu p u ravni $\mathbb{E}^2$ postoji linearni polinom $g : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ takav da je $\mathcal{N}_g = p$.*

Sada se postavlja prirodno pitanje šta se dobija generalizacijom metode primenjene u izvođenju opšte jednačine prave u višim dimenzijama. U izvođenju opšte jednačine prave ključna stvar bila je egzistencija **jedinstvenog pravca** n normalnog na vektor prave s . Dakle, ako je dimenzija m prostora tačaka $\mathbb{E}^m$ veća od dva tada postoji jedinstveni pravac koji je normalan na ravan dimenzije $(m - 1)$ ⁵. Ravnini prostora $\mathbb{E}^m$ dimenzije $(m - 1)$ zovu se **hiperravni prostora** $\mathbb{E}^m$. Iz ovog razmatranja sledi da jednačina (7.5), njene prve dve ekvivalencije, predstavlja jednačinu hiperravni u prostoru $\mathbb{E}^m$. Preciznije, za $A_1 = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ i $n = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ imamo da je sa

$$(7.6) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m + b = 0,$$

gde je $b = -n \cdot \mathbf{OA}_1 = -(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_m y_m)$, data **opšta jednačina hiperravni** u $\mathbb{E}^m$. U slučaju kada je $m = 3$, jednačina (7.6) predstavlja **opštu jednačinu ravni** u prostoru $\mathbb{E}^3$.

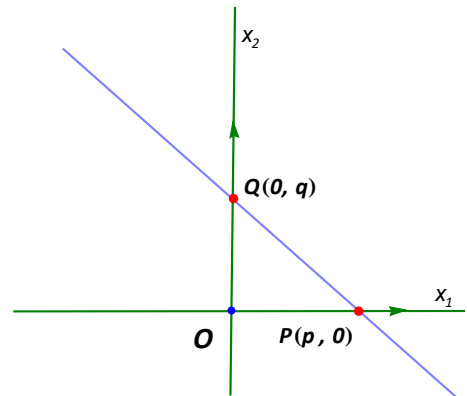
Prava u ravni može se odrediti raznim geometrijskim uslovima. Svaki od njih određuje odgovarajući oblik jednačine prave.

Prava je određena zadavanjem presečnih tačaka prave sa osama, vidi Sliku 4. Jednačina prave koja seče ose x_1 i x_2 u tačkama $P(p, 0)$ i $Q(0, q)$, $p \cdot q \neq 0$, biće

$$(7.7) \quad \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q} = 1.$$

Ako je $a_2 \neq 0$, jednačina (7.5) ekvivalentna je sledećoj jednačini

$$(7.8) \quad x_2 = -\frac{a_1 x_1 + b}{a_2} = k x_1 + t.$$



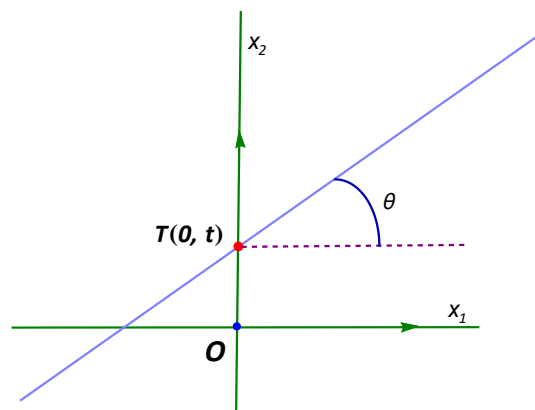
Slika 4. Segmentni oblik jednačina prave

³ Izraz sa leve strane jednačine (7.5) zove se linearni polinom u dve promenljive.

⁴ Korisno prilikom rešavanja zadataka.

⁵ Ravan dimenzije k ($k < m$) u prostoru $\mathbb{E}^m$ je njegov podskup, koji generiše k -dimenzioni vektorski prostor s obzirom na relaciju $\sim$ iz tačke 2.1

Na taj način svakoj vrednosti promenljive x_1 dodeljena je vrednost promenljive x_2 , Slika 5. Tada je $k = -a_1/a_2 = \tan \theta$, koeficijent pravca prave l , gde je θ ugao koji gradi prava l sa pozitivnim delom ose x_1 i $t = -b/a_2$ određuje presek prave l i x_2 ose. Za jednačinu prave (7.8) kažemo da je u **eksplicitnom obliku**. Ako je data jednačina $F(x_1, x_2) = 0$ ili $x_2 = f(x_1)$, tada se tačke čije koordinate zadovoljavaju zadatu jednačinu mogu odrediti dodeljivanjem vrednosti promenljive x_2 svakoj vrednosti promenljive x_1 .

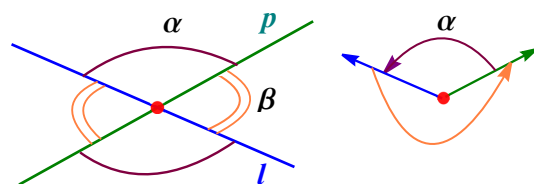


Slika 5. Eksplicitni oblik jednačine prave

7.4. Ugao između dve prave u ravni. Neka su l i p dve prave iste ravni date svojim jednačinama (7.41), koje se seku, obrazuju četiri ugla, od kojih su po dva nasuprot-na jednaka i zbir bilo koja dva ugla α i β , koji nisu nasuprotni je π . Pod uglom između pravih l i p podrazumevamo manji od uglova α i β , vidi Sliku 6a. Dakle,

$$\angle(l, p) = \min\{\alpha, \beta\}, \quad \text{odakle je jasno}$$

$$\angle(l, p) \in [0, \pi/2].$$



Slika 6a. Ugao između dve prave

Kako mi želimo ugao $\angle(l, p)$ svesti na ugao između njihovih vektora normala (ili vektora pravaca) i kako ti uglovi⁶ mogu biti veći od $\pi/2$ (ali svakako ne veći od π , vidi Sliku 6a) i kako je kosinus negativan na intervalu $(\pi/2, \pi)$, moramo uzeti apsolutnu vrednost skalarnog proizvoda, tj. dobijamo da je

$$\cos \angle(l, p) = \frac{|\langle n_1, n_2 \rangle|}{\|n_1\| \|n_2\|} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle(l, p) = \arccos \frac{|\langle n_1, n_2 \rangle|}{\|n_1\| \|n_2\|}.$$

7.5. Rastojanje tačke i prave u ravni. U ravni $\mathbb{E}^2$ rastojanje između tačaka A i B dato je sa $\text{dis}(A, B) = \|\mathbf{AB}\|$. Kao i mnogo puta dosada mi želimo dobar koncept⁷, u ovom slučaju rastojanje između dve tačke, proširiti na rastojanje između dva neprazna skupa $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{E}^2$. To radimo na sledeći prirodan način:

$$(7.9) \quad \text{dis}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf \{ \text{dis}(A, B) \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \}.$$

Ova definicija je prirodna i dobra jer svaki podskup od $\mathbb{R}$ koji je odozdo ograničen ima u skupu $\mathbb{R}$ infimum. Iz gornje definicije je jasno da ako je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ tada je $\text{dis}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$. Postavlja se pitanje da li može biti $\text{dis}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, a da su skupovi $\mathcal{A}$

⁶ između njihovih vektora normala ili vektora pravaca

⁷ Jedna od važnijih metoda u matematici.

i $\mathcal{B}$ disjunktni. Odgovor je potvrđan, jer npr. za $\mathcal{A} = [0, 1)$ i $\mathcal{B} = [1, 2]$ važi da je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ i $\text{dis}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.

Primenimo sada našu definiciju rastojanja na slučaj kada je $\mathcal{A} = \{A\}$ jedna tačka i kada je $\mathcal{B} = l$ data prava ravni $\mathbb{E}^2$.

S obzirom na naše geometrijsko iskustvo očekujemo da se najkraće rastojanje od tačke do prave ostvaruje normalom iz tačke na tu pravu.

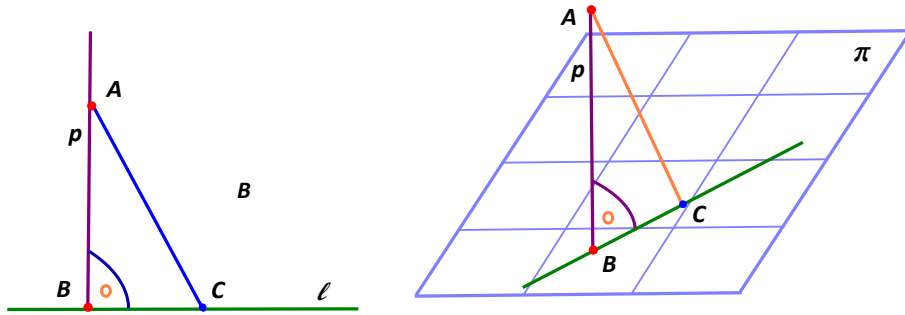
Propozicija. (1) Neka je data tačka A i prava l i neka je B podnožje normale iz A na pravu l i neka je C proizvoljna tačka prave l . Tada je

$$\text{dis}(A, B) \leq \text{dis}(A, C), \quad \text{odnosno} \quad \text{dis}(A, l) = \|\mathbf{AB}\|.$$

(2) Ako je $A = (y_1, y_2)$ i $l: a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$, tada je

$$(7.10) \quad \text{dis}(A, l) = \text{dis}(A, B) = \frac{|a_1 y_1 + a_2 y_2 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Dokaz. (1) Uočimo trougao $\triangle ABC$ (Slika 6), s obzirom da je $AB \perp l$ trougao $\triangle ABC$ je pravougli.



Slika 6. Rastojanje tačka do prave i ravni

Primenom Pitagorine teoreme⁸ je

$$\|AB\|^2 = \|AC\|^2 - \|CB\|^2 \leq \|AC\|^2.$$

(2) Na osnovu upravo dokazane tvrdnje (1), potrebno je naći tačku B koja je presek prave p , određene vektorom normale $n = (a_1, a_2)$ prave l i tačke $A = (y_1, y_2)$, i prave l .

$$(7.11) \quad \text{Parametarske jednačine prave } p \text{ su:} \quad x_1 = y_1 + \lambda a_1, \quad x_2 = y_2 + \lambda a_2.$$

Ako ih zamenimo u opštu jednačinu prave l , dobijamo redom

$$0 = a_1 (y_1 + \lambda a_1) + a_2 (y_2 + \lambda a_2) + b = \lambda (a_1^2 + a_2^2) + a_1 y_1 + a_2 y_2 + b \quad \text{odakle je} \quad \lambda_0 = - \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + b}{a_1^2 + a_2^2}.$$

Dakle, tački B odgovara parametar λ_0 , a tački A parametar 0, tj. $p(\lambda_0) = B$ i $p(0) = A$. Sada nalazimo,

$$\begin{aligned} \text{dis}(A, B) &= \sqrt{(y_1 + \lambda_0 a_1 - y_1)^2 + (y_2 + \lambda_0 a_2 - y_2)^2} = \sqrt{\lambda_0^2 (a_1^2 + a_2^2)} = |\lambda_0| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ &= \frac{|a_1 y_1 + a_2 y_2 + b|}{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{|a_1 y_1 + a_2 y_2 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

⁸ Pitagora, 580–500, grčki matematičar, filosof, ...

Primetimo da analogna propozicija sa isto takvim dokazom važi i u slučaju rastojanja tačke i ravni⁹.

7.6. Jednačina kruga. Odredimo sada jednačinu kruga u Dekartovom koordinatnom sistemu $O e_1 e_2$. Prvo, iz Pitagorine teoreme sledi da je rastojanje $dis(P, Q)$ između tačaka $P(p_1, p_2)$ i $Q(q_1, q_2)$ u Dekartovom koordinatnom sistemu dato sa

$$dis^2(P, Q) = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2.$$

Tačka $X(x_1, x_2)$ pripada krugu sa središtem u tački $S(p, q)$, poluprečnika r ako i samo ako je $\|SX\| = r$, te je njegova jednačina (Slika 7)

$$(x_1 - p)^2 + (x_2 - q)^2 = r^2.$$

Iz prethodne jednačine dobijamo da je

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2px_1 - 2qx_2 + c = 0,$$

jednačina kruga sa centrom u (p, q) ,

kad god je $p^2 + q^2 \geq c$.

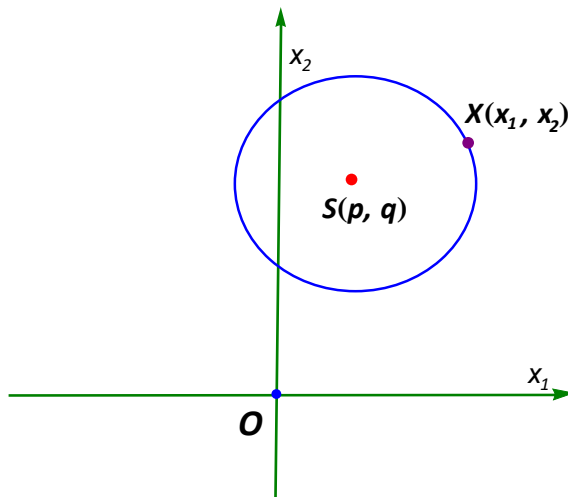
Skup svih tačaka ravni (u kojoj je zadat koordinatni sistem $O e_1 e_2$), na jediničnom rastojanju od O je krug čija skup nula kvadratnog polinoma,

$$(7.12) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Kako je polinom (7.12) kojim je definisan krug stepena 2 krug ne spada u linearnu analitičku geometriju ravni. Primetimo da je krug, moguće (kao i pravu) zadati parametarskim jednačinama. Postoji mnogo parametrizacija kruga, npr. krug sa središtem O ima npr. sledeću prirodnu parametrizaciju

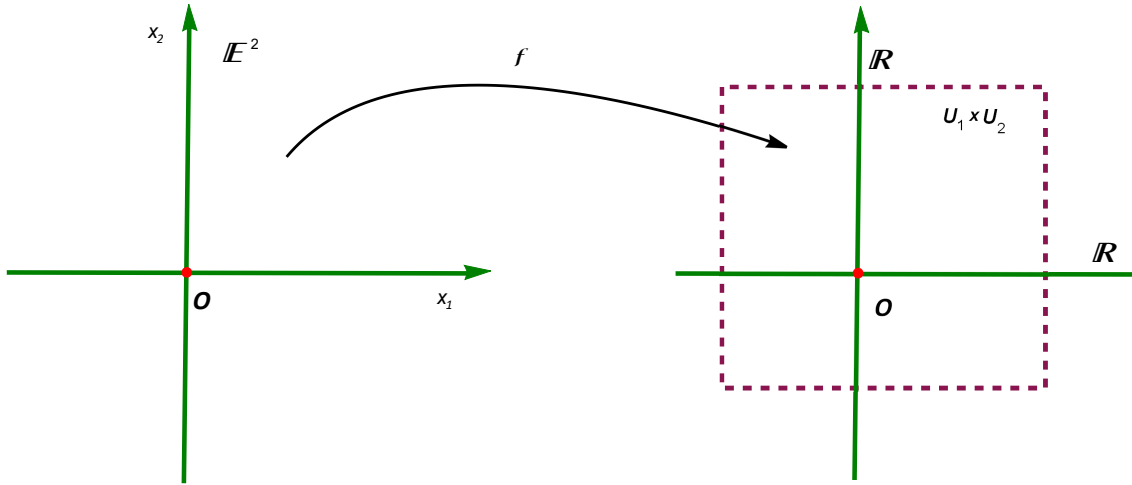
$$x_1 = \cos \theta, \quad x_2 = \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

7.7. Koordinatni sistemi u ravni. Polarni koordinatni sistem. Uvođenje Dekartovih koordinata predstavlja bijekciju ravni $\mathbb{E}^2$ i skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kojom svakoj tački



Slika 7. Jednačina kruga

⁹Štaviše i hiperravni u prostoru $\mathbb{E}^m$, $m > 2$.

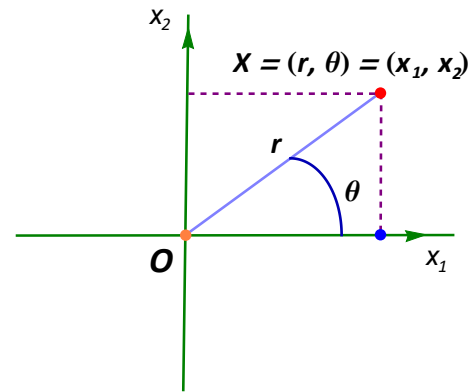


Slika 8. Koordinatni sistemi u ravni

$X \in \mathbb{E}^2$ dodelimo tačno jedan uređeni par brojeva – koordinata (x_1, x_2) . Postavlja se prirodno pitanje da li je moguće uvesti neke druge koordinate, tj. naći intervale U_1 , i $U_2 \subseteq \mathbb{R}$, takve da je ravan, $\mathbb{E}^2$, u bijekciji sa $U_1 \times U_2$. Odgovor na ovo pitanje je potvrđan jer proizvoljna bijekcija $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow U_1 \times U_2$ definiše jedan koordinatni sistem, vidi Sliku 8. Ponekad se dozvoljava da je funkcija f bijekcija na $\mathbb{E}^2 \setminus \mathbb{D}$, pri čemu je $\mathbb{D}$ neki jednostavni podskup od $\mathbb{E}^2$ (npr. tačka, prava i slično). Za tačke skupa $\mathbb{D}$ obično nije dobro definisana neka od koordinata, ali u tom slučaju tačke ovog skupa mogu se jednostavno kontrolisati preko preostale koordinate. Za takve funkcije koristimo termin "skoro bijekcije". Na proizvoljni koordinatni sistem možemo gledati kao na uređenu trojku (U_1, U_2, f) , pri čemu je f bijekcija (ili "skoro bijekcija"). Skup $\{(U_1, U_2, f) \mid f : \mathbb{E}^2 \rightarrow U_1 \times U_2, f \text{ je bijekcija}\}$ ima mnogo elemenata, od posebnog su interesa jednostavni elementi tog skupa. Sledeći sistem po jednostavnosti bazira se na

trigonometrijskoj interpretaciji kompleksnog broja i taj sistem poznat je i kao polarni koordinatni sistem. Definišimo sada polarni sistem. Izaberimo tačku $O \in \mathbb{E}^2$, koju zovemo polarnim središtem ili polom, i polupravu x_1 kojoj je početak tačka O , koja se naziva osom polarnog koordinatnog sistema ili polarnom osom. Tačka X , različita od pola jednoznačno je određena rastojanjem $r > 0$ od pola i uglom θ koji vektor $\mathbf{OX}$ zaklapa sa jediničnim vektorom x_1 ose, Slika 9. Uređeni par (r, θ) nazivamo polarnim

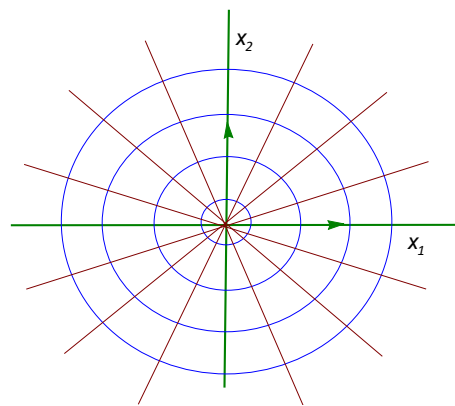
koordinatama tačke X . Tačka (r, θ) se poklapa sa svakom od tačaka $(r, \theta + 2n\pi)$, $n = 1, 2, \dots$. Da bismo dobili jedinstvenost, tj. da bi svakoj tački ravni odgovarao tačno jedan uređeni par koordinata, r mora u-



Slika 9. Polarni koordinatni sistem

zimati vrednosti u skupu $U_1 = [0, +\infty)$, a koordinata θ u skupu $U_2 = [0, 2\pi)$ ili nekom drugom poluzatvorenom intervalu dužine 2π . Mali problem nastaje sa polom jer je za njega $r = 0$, a ugao θ nije definisan (primer "skoro bijekcije").

Primetimo da su sledeće koordinatne linije $X_1(a) = \{X(r, \theta) \mid r = a, \theta \in U_2\}$ krugovi, a $X_2(\alpha) = \{X(r, \theta) \mid \theta = \alpha, r \in U_1\}$ poluprave sa početkom u tački O , vidi Sliku 10. Nađimo



Slika 10. Koordinatne linije polarnog sistema

sada vezu između koordinata neke tačke u pravouglo Dekartovom sistemu i polarnom sistemu čiji se pol poklapa sa početkom Dekartovog koordinatnog sistema, a polarna osa se poklapa sa x_1 osom pravouglog Dekartovog sistema.

Ako neka tačka ima koordinate (r, θ) u polarnom sistemu tada su njene koordinate u Dekartovom sistemu jednoznačno određene formulama, kao na Slici 9,

$$(7.13) \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Obratne veze, tj. prelazak iz pravouglog koordinatnog sistema u polarni koordinatni sistem date su (za $x_1 \neq 0$) formulama,

$$(7.14) \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

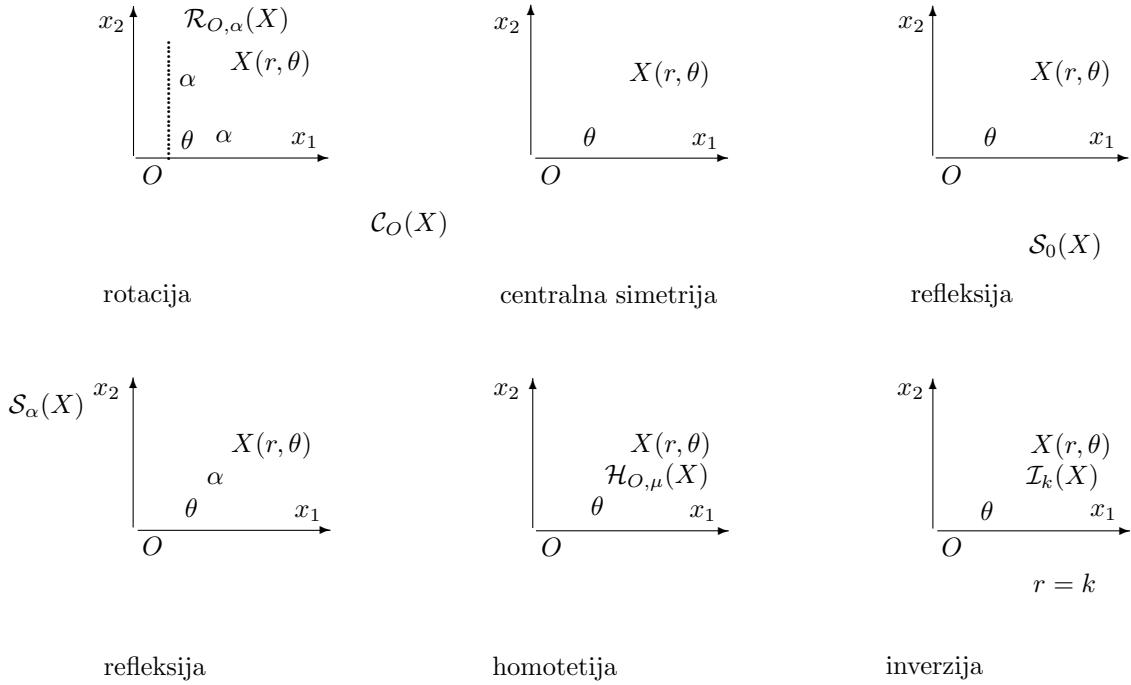
Primetimo da transformacione formule (7.14) nisu jednoznačne, jer treba voditi računa o kvadrantu u kojem se nalazi tačka.

Ako umesto tačke uzmemo jednačinu neke krive u Dekartovom pravougloj sistemu, tada se njena jednačina u polarnom sistemu dobija zamenom datom u (7.13). Na primer, Dekartova jednačina $x_1^2 + x_2^2 = 1$ jediničnog kruga, u polarnim koordinatama je jednostavnija jer iz

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 1 \quad \text{sledi} \quad r = 1.$$

Primetimo da je jednačina kruga, poluprečnika r_0 sa centrom u polu, u polarnom sistemu linearna, $f(r, \theta) = r - r_0 = 0$. Dakle jednostavnija, jer je ovaj sistem prilagođen geometriji kruga. Polarni sistem pojavio se prvo u astronomiji, a zatim u fizici i mehanici pri tretiranju kružnih kretanja nebeskih tela i materijalnih tačaka.

7.8. Geometrijske transformacije ravni. Preslikavanja ravni $\mathbb{E}^2$ na samu sebe nazivamo geometrijskim transformacijama ravni. One geometrijske transformacije koje



Slika 1. Neke transformacije ravni

ostavljaju invarijantnom neku tačku O te ravni mogu se obično jednostavnije predstaviti u polarnom koordinatnom sistemu, ako za središte polarnog koordinatnog sistema izaberemo tačku O . Na primer, tačka (r, θ) preslikava se u tačku (vidi Sliku 1)

$(r, \theta + \alpha)$	rotacijom, $\mathcal{R}_{O, \alpha}$,
$(r, \theta + \pi)$	centralnom simetrijom, $\mathcal{C}_O$,
$(r, -\theta)$	refleksijom u odnosu na pravu x_1 , $\mathcal{S}_0$,
$(r, 2\alpha - \theta)$	refleksijom u odnosu na pravu $\theta = \alpha$, $\mathcal{S}_\alpha$,
$(\mu r, \theta)$	homotetijom, $\mathcal{H}_{O, \mu}$,
$(k^2/r, \theta)$	inverzijom u odnosu na krug $r = k$, $\mathcal{I}_k$, .

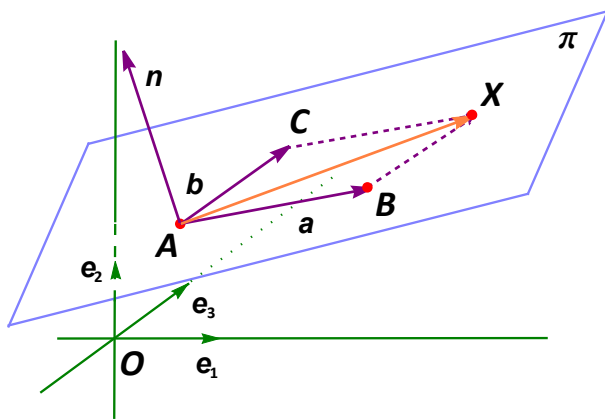
Stoga polarne kordinate mogu pomoći da se jednostavnije dođe do formula tih geometrijskih transformacija u Dekartovim koordinatama. Na primer, rotacija $\mathcal{R}_{O, \alpha}$ (Slika 1) kojom se tačka sa koordinatama (x_1, x_2) preslikava u $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ zadata je izrazima

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= r \cos(\theta + \alpha) = r(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \\ \bar{x}_2 &= r \sin(\theta + \alpha) = r(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Ovo pokazuje da su polarne koordinate posebno pogodne za opisivanje pojava sa rotacionim, kružnim kretanjima, simetrijama, tj. sa geometrijskim transformacijama i kretanjima u čijoj je osnovi krug.

3. Linearna analitička geometrija prostora

7.9. Ravan i prava u prostoru. Neka je dat Dekartov pravougli koordinatni sistem (O, e_1, e_2, e_3) u prostoru $\mathbb{E}^3$, i ravan π . Prema Euklidovim aksiomama svaka ravan jednoznačno je određena sa svoje tri nekolinearne tačke A, B i C , koje određuju i vektore $a = \overrightarrow{AB}$ i $b = \overrightarrow{AC}$. Vektorski prostor $\overrightarrow{\pi} = \mathcal{L}(a, b)$ zove se **pravac ravni** π . Dakle, pravac ravni π sastoji se iz beskonačnog broja paralelnih ravni. Da bismo odabrali jednu od njih npr. π , potrebno je da izaberemo još jednu njenu tačku, recimo A . Dakle, na jeziku vektora ravan je jednoznačno određena svojim pravcem (dvodimenzioni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$), i jednom svojom tačkom A , vidi Sliku 12. Primetimo da će tačka $X \in \mathbb{E}^3$ pripadati ravni π akko su vektori $\overrightarrow{AX}$, a i b koplanarni (linearno zavisni), tj.



Slika 12. Ravan

$$(7.15) \quad X \in \pi \iff \overrightarrow{AX} = \lambda_1 a + \lambda_2 b$$

za neke $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dakle, (7.15) predstavlja parametarsku jednačinu ravni u vektorskom obliku. Brojevi λ_1 su parametri i svakom uređenom paru $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$ odgovara jedinstvena tačka X ravni π . Jednačinu (7.15) sada možemo napisati i koordinatno. Neka su date koordinate tačaka

$$A = (y_1, y_2, y_3), \quad B = (z_1, z_2, z_3), \quad C = (w_1, w_2, w_3), \quad X = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{tada je } a = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (z_1 - y_1, z_2 - y_2, z_3 - y_3),$$

$$(7.16) \quad b = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (w_1 - y_1, w_2 - y_2, w_3 - y_3),$$

$$\overrightarrow{AX} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$$

Sada dobijamo parametarsku jednačinu ravni,

$$(7.17) \quad \begin{aligned} x_1 - y_1 &= \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \eta_1 & x_1 &= y_1 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \eta_1 \\ x_2 - y_2 &= \lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \eta_2 & x_2 &= y_2 + \lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \eta_2 \\ x_3 - y_3 &= \lambda_1 \xi_3 + \lambda_2 \eta_3 & x_3 &= y_3 + \lambda_1 \xi_3 + \lambda_2 \eta_3 \end{aligned} \iff$$

Prethodno izvođenje parametarskih jednačina ravni u prostoru $\mathbb{E}^3$ može se direktno uopštiti na slučaj proizvoljne k -dimenzione ravni u $\mathbb{E}^m$, $1 \leq k < m$. Dakle, ako je π neka k -dimenziona ravan u $\mathbb{E}^m$, tada je ona određena svojim pravcem $\overrightarrow{\pi}$, i jednom svojom tačkom $A \in \pi$. Pravac $\overrightarrow{\pi}$, k -ravni π je vektorski prostor dimenzije k , čija se neka baza sastoji od k linearno nezavisnih vektora $s_1, s_2, \dots, s_k$. Prema tome, možemo pisati $\pi = A + \overrightarrow{\pi} = A + \mathcal{L}(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Jasno, tačka $X \in \mathbb{E}^m$ pripada ravni π akko

su vektori $\mathbf{AX}$, $s_1, s_2, \dots, s_k$ linearno zavisni, tj.

$$(7.18) \quad X \in \pi \iff \mathbf{AX} = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_k s_k,$$

za neke parametre $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Sada analogno slučaju ravni u prostoru $\mathbb{E}^3$ možemo vektorsku jednačinu (7.18) raspisati po koordinatama, što ostavljamo čitaocu za vežbu.

Opšta jednačina ravni. Jednačinu ravni π možemo izvesti ako znamo jednu njenu tačku $A = (y_1, y_2, y_3)$ i njen vektor normale $n = (a_1, a_2, a_3)$. Postupak je potpuno analogan izvođenju jednačine prave l u ravni, koja je određena jednom svojom tačkom A i svojim vektorom normale n , vidi tačku 7.2. Tako da formula (7.6), u slučaju ravni u prostoru prima oblik,

$$(7.19) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b = 0,$$

pri čemu je $b = -a_1 y_1 - a_2 y_2 - a_3 y_3$. Jednačinu (7.19) nazivamo **opšta jednačina ravni**.

Primetimo da opštu jednačinu ravni možemo predstaviti i u vektorskom obliku,

$$0 = (\mathbf{OX} - \mathbf{OA}) \cdot n = \mathbf{OX} \cdot n + b = 0 \quad \text{gde je } b = -\mathbf{OA} \cdot n, \text{ konstanta.}$$

Prethodna jednačina ravni zove se opšta jednačina jer se svaka ravan u nekom datom Dekartovom sistemu opisuje jednačinom oblika (7.19).

Postavlja se pitanje kako da iz parametarske jednačine ravni (7.17) eliminišemo parametre i dobijemo opštu jednačinu ravni. Da bismo to uradili dovoljno je primetiti da su vektori $\mathbf{OA}$, a i b linearno zavisni, pa je zapremina paralelepipeda određenog njima jednaka 0^{10} . Ako su nam koordinate vektora $\mathbf{OA}$, a i b dati sa (7.16) tada imamo da je

$$(7.20) \quad 0 = [\mathbf{OA}, a, b] = \begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & x_3 - y_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & x_3 - y_3 \\ z_1 - y_1 & z_2 - y_2 & z_3 - y_3 \\ w_1 - y_1 & w_2 - y_2 & w_3 - y_3 \end{vmatrix} \\ = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b.$$

gde je

$$a_1 = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad a_2 = -\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}, \quad b = -(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3).$$

Kao i kod jednačine prave u ravni, uvedimo sledeće oznake koje sugerišu sa kojim je elementima određena neka ravan π : $\pi(A, B, C)$ (sa svoje tri nekolinearne tačke), $\pi(A, n)$ (svojom tačkom i vektorom normale) ili $\pi(A, a, b)$ (svojom tačkom i dva nekolinearna vektora (bazom svog pravca)).

¹⁰ jer ovaj paralelepiped nema visinu.

Teorema. Neka je $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ linearni polinom, tada je skup njegovih nula $\mathcal{N}_f$ ravan. Važi i obrat, za svaku ravan $\pi \subseteq \mathbb{E}^3$ postoji linearni polinom $g : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ takav da je $\mathcal{N}_g = \pi$.

DIGRESIJA. Analogon ove teoreme važi u prostoru tačaka¹¹ $\mathbb{E}^k$, samo je u prethodnoj teoremi potrebno sve stepene 3 zameniti sa k i reč ravan sa hiperravan.

Jednačina prave u prostoru. Jednačinu prave l možemo izvesti ako znamo jednu njenu tačku $A = (y_1, y_2, y_3)$ i njen vektor pravca $s = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Postupak je potpuno analogan izvođenju jednačine prave l u ravni, koja je određena jednom svojom tačkom A i svojim vektorom pravca s , vidi tačku 7.2. Tako da jednačine (7.21), u slučaju prostoru primaju oblik,

$$(7.21) \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda \xi_1 \\ x_2 &= y_2 + \lambda \xi_2 \\ x_3 &= y_3 + \lambda \xi_3 \end{aligned} \quad \text{ili} \quad \lambda = \frac{x_1 - y_1}{\xi_1} = \frac{x_2 - y_2}{\xi_2} = \frac{x_3 - y_3}{\xi_3}.$$

Poslednji zapis¹² parametarskih jednačina prave zove se i kanonski oblik jednačine prave u prostoru.

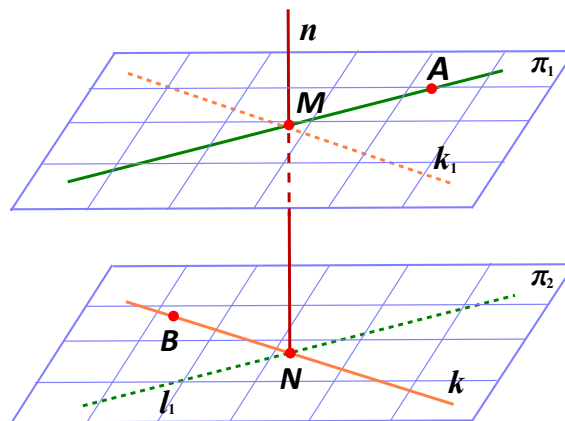
7.10. Mimoilazne prave. Iz Euklidovih aksioma sledi da dve prave u prostoru mogu biti u jednom od četiri položaja:

- (po) podudaraju se,
- (pa) paralelne su i ne seku se,
- (s) seku se,
- (m) mimoilazne su, tj. ne seku se i nisu paralelne.

Poslednji slučaj, slučaj mimoilaznih pravih je najinteresantniji. Mimoilazne prave imaju sledeću osobinu.

Propozicija. Neka su l i k dve mimoilazne prave. Tada postoji tačno jedna prava koja ih seče i normalna je na njih. Pomenutu jedinstvenu pravu nazivamo *zajednička normala* pravih l i k .

Dokaz. Neka su prave $l = l(A, u)$ i $k = k(B, v)$ određene svojim vektorima pravca i tačkom. Tada su određene i dve paralelne ravni $\pi_1 = \pi_1(A, u, v)$ i $\pi_2 = \pi_2(B, u, v)$, od kojih prva sadrži pravu l i sa pravom k nema zajedničkih tačaka, a druga sadrži pravu k i sa pravom l nema zajedničkih tačaka, Slika 13. Posmatrajmo sada ortogonalne projekcije, $pr_1 : l \rightarrow \pi_2$ i $pr_2 : k \rightarrow \pi_1$.



Slika 13. Zajednička normala mimoilaznih pravih

¹¹ Prostor tačaka naziva se afini prostor pridružen vektorskom prostoru $\mathbb{R}^k$.

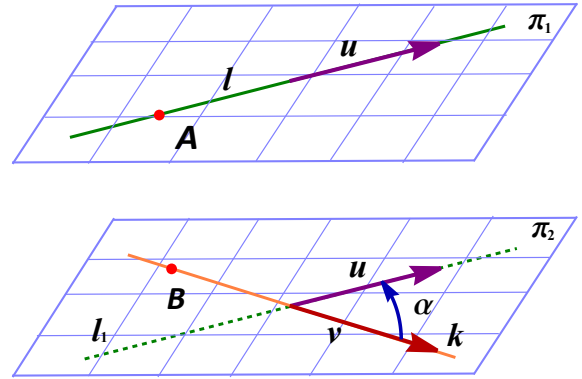
¹² Radi se samo o zapisu u obliku razlomka, jer neki od imenilaca može biti jednak i 0.

Neka su $l_1 = pr_1(l) \subseteq \pi_2$ i $k_1 = pr_1(k) \subseteq \pi_1$ prave koje su slike polaznih pravih l i k pri ovim ortogonalnim projekcijama. Kako prave l i k nemaju proporcionalne vektore pravca, neće ih imati ni prave l_1 i k_1 , tako da zaključujemo da se prave l i k_1 , odnosno k i l_1 seku. Obeležimo sa M i N redom tačke preseka pravih l i k_1 odnosno k i l_1 , tada prava određena tačkama M i N ima sve tražene osobine, dakle ona je zajednička normala pravih l i k . $\square$

Postojanje zajedničke normale može se utvrditi i analitičkom (koordinatnom) metodom rešavanjem odgovarajućeg sistema linearnih jednačina.

7.11. Uglovi između pravih i ravni. Ugao je jedan od osnovnih pojmova u geometriji. Podsetimo se prvo definicija ugla između pravih (vidi tačku 7.4), između prave i ravni, i na kraju ugla između dve ravni. Određivanje ovih uglova svodimo na određivanje uglova između nekih vektora kojima su prave ili ravni određene. Postavlja se pitanje kako da izračunamo pomenute uglove iz poznatih jednačina pravih i ravni.

Ugao između pravih. Neka su prave $l = l(A, u)$ i $k = k(B, v)$ određene svojim vektorima pravca i tačkom, (Slika 14).



Slika 14. Ugao između pravih

Ugao α je neorijentisani ugao između pravih l i k , vidi tačku 7.4, $\alpha = \angle(l, k) \in [0, \pi/2]$. Tako da je

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \quad \text{ili koordinatno} \quad \cos \alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

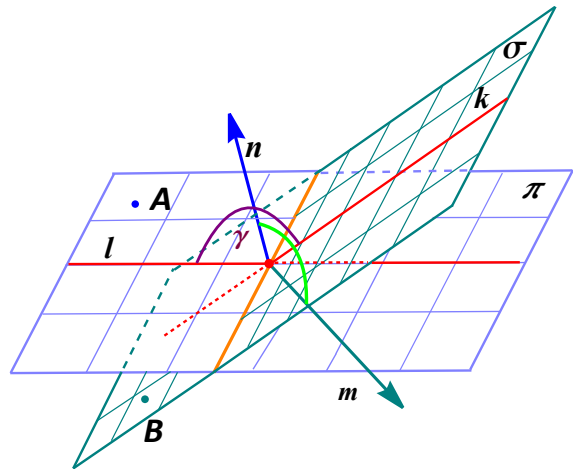
pri čemu je $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Ugao između dve ravni. Neka su date ravni π i σ , koje se seku i ravan τ koja je normalna na presečnu pravu ravni π i σ . Neka su l i k presečne prave ravni τ sa π i σ redom. Tada pod uglom α između ravni π i σ podrazumevamo ugao

$$\angle(\pi, \sigma) = \angle(l, k).$$

Neka su date ravni $\pi = \pi(A, n)$ i $\sigma = \sigma(B, m)$ redom svojim jednačinama:

$$r \cdot n + b_1 = 0 \quad \text{i} \quad r \cdot m + b_2 = 0,$$



Slika 15. Ugao između ravni

vidi Sliku 15. Tada je $\xi = \angle(\pi, \sigma) = \angle(n, m) \in [0, \pi/2]$, neorijentisani ugao između dve ravni. Primetimo, da je na Slici 15, ugao $\gamma = \pi - \xi$, jer po definiciji ugao $\xi \in [0, \pi/2]$. Tako da imamo,

$$\cos \xi = \frac{\langle n, m \rangle}{\|n\| \|m\|} \quad \text{ili u koordinatama} \quad \cos \xi = \frac{|n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}.$$

Ugao između prave i ravni. Posmatrajmo sada pravu $l = l(A, s)$ i ravan $\pi = \pi(B, n)$ zadatu jednačinom $r \cdot n + b = 0$, vidi Sliku 16. Neorijentisani ugao između prave i ravni definišemo na sledeći način

$$\beta = \angle(l, \pi) = \angle(l, l'),$$

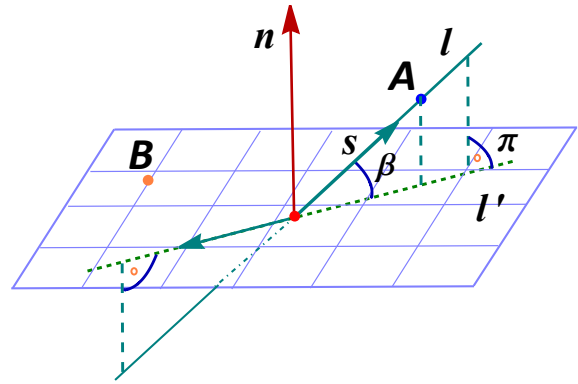
gde je l' normalna projekcija prave l na ravan π .

Važi sledeća formula, koja daje i praktični algoritam za izračunavanje ugla između prave i ravni, jer mi ustvari tražimo ugao između vektora pravca s' prave l' i vektora pravca s prave l koji može biti veći od $\pi/2$ kao na Slici 16, a kako je

$$(7.22) \quad \beta = \angle(l, l') = \left| \frac{\pi}{2} - \angle(n, s) \right|.$$

I ako sada uzmemo sinus leve i desne strane jednakosti (7.22) (i kako je sinus neparna funkcija, i $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$) dobijamo

$$\sin \beta = \frac{\langle s, n \rangle}{\|s\| \|n\|} \quad \text{ili u koordinatama} \quad \sin \beta = \frac{|\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2 + \xi_3 n_3|}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$



Slika 16. Ugao između prave i ravni

7.12. Rastojanje tačke i ravni. U svakom euklidskom prostoru $\mathbb{E}^n$ rastojanje između tačaka A i B dato je sa $dis(A, B) = \|\mathbf{AB}\|$, tako da možemo primeniti koncept opisan u tački 7.5: *Rastojanje tačke i prave u ravni.*

Iz dokaza 7.5 Propozicije jasno je da važi sledeće analogno tvrđenje, Slika 6.

Propozicija. (1) Neka je data tačka A i ravan π i neka je B podnožje normale iz A na ravan π i neka je C proizvoljna druga tačka sa te prave. Tada je

$$dis(A, B) \leq dis(A, C), \quad \text{odnosno} \quad dis(A, \pi) = \|\mathbf{AB}\|.$$

(2) Ako je $A = (y_1, y_2, y_3)$ i $\pi: a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b = 0$, tada je

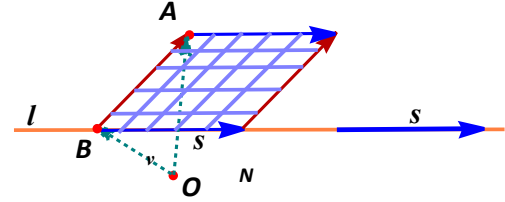
$$dis(A, \pi) = dis(A, B) = \frac{|a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

7.13. Rastojanja tačke i prave u prostoru. I u ovom slučaju primenjujemo koncept rastojanja između dva podskupa euklidskog prostora uveden u tački 7.5. Sada ga samo primenimo na tačku A i pravu $l = l(B, s)$.

Propozicija 1. *Rastojanje tačke A i prave l dato je sa*

$$d(A, l) = \frac{1}{\|s\|} \|(a - b) \times s\|,$$

pri čemu su $a = \mathbf{OA}$ i $b = \mathbf{OB}$ vektori položaja tačaka A i B .



Slika 17. Rastojanje tačke i prave u prostoru

Dokaz. Posmatrajmo paralelogram čije su strane određene vektorima $\mathbf{BA}$ i s kao na Slici 17. Njegovu površinu, $\mathcal{P}$, izražavamo na sledeća dva načina:

$$(7.23) \quad \mathcal{P} = d(A, l) \|s\| \quad \text{ i } \quad \mathcal{P} = \|((a - b) \times s)\|,$$

na osnovu definicije površine paralelograma i definicije vektorskog proizvoda. Iz ovih jednakosti sledi rezultat. $\square$

Ako su tačke A, B i vektor s dati redom svojim Dekartovim koordinatama $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $s(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, onda formula (7.23) u razvijenom obliku postaje

$$d(A, l) = \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 - b_1 & a_3 - b_3 \\ \xi_1 & \xi_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{array} \right|^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

7.14. Rastojanje između pravih. U tački 7.10: Mimosilazne prave, opisali smo četiri moguća položaja u kojima mogu biti dve prave u prostoru. Ako se prave seku ili se podudaraju onda je, jasno, njihovo međusobno rastojanje jednako 0. Ako su prave paralelne i ne seku se, tada je njihovo međusobno rastojanje jednako rastojanju između presečnih tačaka pravih i ravni koja je normalna na obe prave. U dokazu 7.2 Propozicije, dokazali smo egzistenciju zajedničke normale mimosilaznih pravih l i k , što nam je od velike pomoći i u dokazu sledeće propozicije.

Propozicija 1. *Neka su l i k mimosilazne prave i tačke $M \in l$ i $N \in k$ takve da je prava MN zajednička normala pravih l i k . Za proizvoljne tačke $X \in l$ i $Y \in k$ je*

$$\|\mathbf{MN}\| \leq \|\mathbf{XY}\|, \quad \text{odnosno,}$$

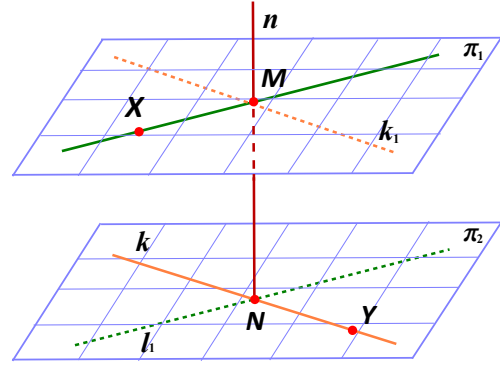
$$\text{dis}(l, k) = \inf_{X \in l, Y \in k} \text{dis}(X, Y) = \|\mathbf{MN}\|.$$

Dokaz. Kako je $\mathbf{MN}$ upravno na $\mathbf{XM}$ i $\mathbf{YN}$ to je

$$\begin{aligned} \|\mathbf{XY}\|^2 &= \langle \mathbf{XY}, \mathbf{XY} \rangle \\ &= \langle \mathbf{XM} + \mathbf{NY} + \mathbf{MN}, \mathbf{XM} + \mathbf{NY} + \mathbf{MN} \rangle \\ &= \|\mathbf{XM} + \mathbf{NY}\|^2 + \|\mathbf{MN}\|^2, \end{aligned}$$

$$\text{te je} \quad \|\mathbf{XY}\|^2 \geq \|\mathbf{MN}\|^2,$$

a to je i trebalo pokazati. $\square$



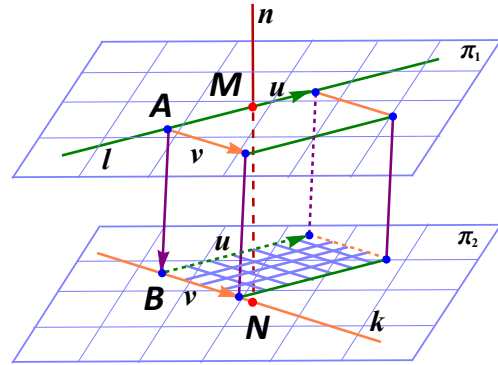
Slika 18. Rastojanje mimoilaznih pravih

Iz prethodne propozicije možemo zaključiti da je rastojanje između mimoilaznih pravih zapravo jednako rastojanju između paralelnih ravni, π_1 i π_2 kao na Slici 18, u kojima se nalazi po jedna od pravih l i k . U sledećoj propoziciji dajemo rastojanje u funkciji parametara kojima su date prave l i k bez računanja konkretnih tačaka preseka.

Propozicija 2. Neka su date prave $l = l(A, u)$ i $k = k(B, v)$ jednom svojom tačkom i vektorom pravca. Tada je rastojanje između mimoilaznih pravih l i k dato formulom

$$(7.24) \quad d(l, k) = \frac{|[\mathbf{AB}, u, v]|}{\|u \times v\|}.$$

Dokaz. Posmatrajmo paralelepiped određen vektorima $\mathbf{AB}$, u i v , kao na Slici 19. Koristeći geometrijsku interpretaciju mešovitog proizvoda (čija apsolutna vrednost je jednaka zapremini paralelepipeda razapetog sa ta tri vektora, njegova zapremina je $V = |[\mathbf{AB}, u, v]|$. Ako izaberemo bazu paralelepipeda razapetu vektorima u i v , površine B , to je zapremina $V = B \cdot d(l, k) = d(l, k) \cdot \|u \times v\|$, zbog definicije vektorskog proizvoda. Odavde sledi tražena formula. $\square$



Slika 19. Rastojanje mimoilaznih pravih

Posledica ovog dokaza je da $[\mathbf{AB}, u, v]$ ne zavisi od izbora tačaka A i B pravih l i k redom.

Ako su a i b vektori položaja tačaka A i B onda se (7.24) zapisuje u obliku

$$d(l, k) = \frac{|[b - a, u, v]|}{\|u \times v\|}.$$

Konačno formulu (7.24) možemo izraziti u koordinatama polaznih elemenata. Ako su prave l i k određene jednačinama,

$$l: \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}, \quad k: \frac{x_1 - b_1}{v_1} = \frac{x_2 - b_2}{v_2} = \frac{x_3 - b_3}{v_3},$$

onda je

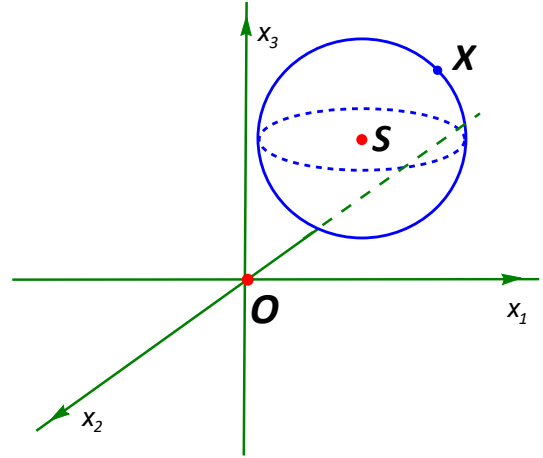
$$(7.25) \quad d(l, k) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2}}.$$

7.15. Jednačina sfere. Kao što nam je poznato sfera je skup tačaka prostora, $\mathbb{E}^3$, koje su jednako udaljene od jedne tačke S , koju nazivamo središtem ili centrom sfere, Slika 20.

Budući da je rastojanje $dis(X, S)$ između bilo koje dve tačke $X(x_1, x_2, x_3)$ i $S(s_1, s_2, s_3)$ jednako intenzitetu vektora $\mathbf{X}$, biće

$$\begin{aligned} dis^2(X, S) &= \|\mathbf{XS}\|^2 = \delta_{ij}(x_i - s_i)(x_j - s_j) \\ &= (x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2. \end{aligned}$$

Stoga je jednačina sfere sa središtem u tački S i poluprečnika r ,



Slika 20. Sfera

$$(7.26) \quad (x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 = r^2.$$

Slično kao kod kruga, za očekivati je da će i jednačina sfere biti drugog stepena u Dekartovim koordinatama, u što se nije teško uveriti ako malo sredimo prethodnu jednačinu sfere (7.26). Tako dobijamo,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2s_1x_1 - 2s_2x_2 - 2s_3x_3 + c = 0,$$

jednačina kruga sa centrom u (s_1, s_2, s_3) , kad god je $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \geq c$.

Skup svih tačaka prostora u kojem je zadat koordinatni sistem $O e_1 e_2 e_3$, na jediničnom rastojanju od O je sfera čija skup nula kvadratnog polinoma,

$$(7.27) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$

Kako je polinom (7.27) kojim je definisana sfera stepena 2 sfera ne spada u linearnu analitičku geometriju. Primetimo da je krug. Postoji mnogo parametrizacija sfere, a u nekima od njih (npr. u sfernim koordinatama) je sfera data linearnom jednačinom.

4. Koordinatni sistemi u prostoru

7.16. Cilindrični (cilindarski) i sferni koordinatni sistem. Sve ono što je rečeno o suštini koordinatnog sistema u ravni važi i za prostor, samo što je u prostoru situacija malo komplikovanija jer imamo posla sa jednom dimenzijom više. Dakle, koordinatni sistem u $\mathbb{E}^3$ je uređena četvorka (U_1, U_2, U_3, f) , pri čemu je $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow U_1 \times U_2 \times U_3$, bijekcija (ili "skoro bijekcija"), a U_1, U_2, U_3 su intervali u $\mathbb{R}$. Sledeći koordinatni sistem po jednostavnosti, nakon Dekartovog, je cilindrični (cilindarski) koordinatni sistem, koji je dobijen iz polarnog sistema dodavanjem jedne dimenzije. Sistem je dobio ime po jednoj od klasa koordinatnih površi, koje su cilindri.

Definišimo sada cilindrični koordinatni sistem.

Prvo izaberemo tačku O koja je koordinatni početak, i osu x_1 koja sadrži tačku O , a zatim osu x_3 koja je normalna na osu x_1 i sadrži tačku O (vidi Sliku 2).

U ravni, π , kojoj je vektor normale jednak vektoru pravca ose x_3 uvedemo polarne koordinate. Tada je svaka tačka X , prostora $\mathbb{E}^3$ jednoznačno određena uređenom trojkom (r, θ, x_3) pri čemu je r rastojanje ortogonalne projekcije, X' , tačke X na ravan π do tačke O ; ugao θ je ugao koji zaklapaju jedinični vektor e_1 ose x_1 i vektor $\mathbf{OX}'$; a x_3 je rastojanje tačke X do ravni π , tj. $\|XX'\|$. Uređena trojka (r, θ, x_3) zove se cilindarskim ili cilindričnim koordinatama tačke X . Primetimo da je u ovom slučaju $U_1 = [0, +\infty)$, $U_2 = [0, 2\pi)$ i $U_3 = (-\infty, +\infty)$, i da za sve tačke x_3 ose nije dobro definisan ugao θ , jer je njihova projekcija na ravan π koordinatni početak, a za tu tačku nije definisan ugao θ .

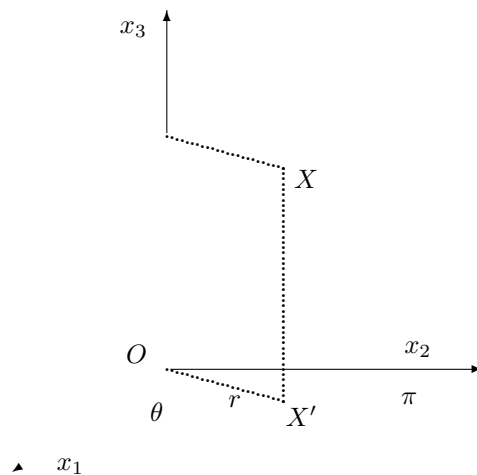
Sada lako nalazimo veze između koordinata neke tačke u Dekartovom i cilindarskom sistemu, koji su postavljeni tako da imaju isti koordinatni početak, tačku O , i da im se ose x_1 i x_3 podudaraju. Ako tačka X ima koordinate (x_1, x_2, x_3) u pravouglom Dekartovom sistemu onda su njene koordinate u cilindarskom sistemu, za $x_1 \neq 0$, date formulama:

$$(7.28) \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad x_3 = x_3.$$

Obratno ako tačka X ima cilindarske koordinate (r, θ, x_3) onda su njene Dekartove koordinate određene jednoznačno, tj. date su formulama:

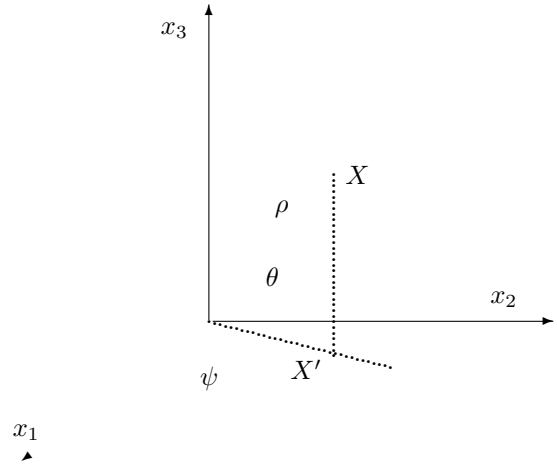
$$(7.29) \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = x_3.$$

Sferni koordinatni sistem. Koordinatni sistem koji je prilagođen geometriji sfere zove se



Slika 2. Cilindrične koordinate

sferni koordinatni sistem. Analogno kao i polar-
ni koordinatni sistem sferni sistem definišemo
istim izborom elemenata koordinatnog sis-
tema, tj. koordinatnog početka i osa x_1 i
 x_3 . Tada je svaka tačka X prostora $\mathbb{E}^3$ jed-
noznačno određena uređenom trojkom (ϱ, θ, ψ)
gde je ϱ rastojanje tačke X do koordinatnog
početka, uglom $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ koji vektor
 $\mathbf{OX}$ zaklapa sa svojom normalnom projekci-
jom $\mathbf{OX}'$ na koordinatnu ravan Ox_1x_2 , i uglom
 $\psi \in (-\pi, \pi]$ koji vektor $\mathbf{OX}'$ zaklapa sa x_1
osom (Slika 3). Uređena trojka (ϱ, θ, ψ) zove
se sferne koordinate tačke X . Tačku O zovemo
središtem sfernog koordinatnog sistema, a uglove
 θ i ψ , redom, Eulerovom sfernom širinom i
dužinom. Za tačku O nisu definisani uglovi θ i



Slika 3. Sferni koordinatni sistem

ψ . Sada lako nalazimo veze između koordinata neke tačke u Dekartovom i sfernom sistemu, koji su postavljeni tako da imaju isti koordinatni početak, tačku O , i da im se ose x_1 i x_3 podudaraju. Ako tačka X ima koordinate (ϱ, θ, ψ) u sfernom sistemu onda su njene koordinate u Dekartovom date formulama:

$$(7.30) \quad x_1 = \varrho \cos \theta \cos \psi, \quad x_2 = \varrho \cos \theta \sin \psi, \quad x_3 = \varrho \sin \theta.$$

Obratno ako tačka X ima Dekartove koordinate (x_1, x_2, x_3) onda su njene sferne koordinate, ako je $x_1 \neq 0$, određene sa:

$$(7.31) \quad \varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad \psi = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Dakle, ako je u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu neka površ zadata jednačinom $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, tada se jednačina te površi u sfernim koordinatama dobija zamenama datim relacijama (7.30).

Na primer, Dekartova jednačina, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, jedinične sfere sa središtem O , u sfernim koordinatama je jednostavnija jer iz

$$(\varrho \cos \theta \cos \psi)^2 + (\varrho \cos \theta \sin \psi)^2 + (\varrho \sin \theta)^2 = 1 \quad \text{odakle je} \quad \varrho = 1.$$

5. Konusni preseki

7.16. Konusni preseki. Neka su u prostoru date dve različite prave i i s koje se nalaze u istoj ravni. Tada se one mogu seći u jednoj tački O ili mogu biti paralelene. Posmatrajmo skup, $\mathcal{K}$, svih slika tačkaka prave i pri rotacijama sa osom s . U slučaju

kada se prave i i s seku u jednoj tački O , $\mathcal{K}$, je **prav kružni konus**, a u slučaju kada se prave i i s ne seku, $\mathcal{K}$, je **prav kružni cilindar**. Kada je $\mathcal{K}$ konus tačku O zvaćemo **temenom** tog konusa, pravu s njegovom **osom**, a slike prave i u rotacijama oko prave s , njegovim **izvodnicama**. Presek proizvoljne ravni Ω i konusa $\mathcal{K}$ nazivamo **konusnim presekom**. Ako je ravan Ω normalna na s i ne sadrži tačku O , konusni presek je **krug**. Lako se dokazuje da postoji sfera koja dodiruje konus u tačkama toga kruga. Za takvu sferu kažemo da je **upisana** u konus.

Ako ravan Ω sadrži O , njen presek sa konusom može da bude ili samo tačka O , ili jedna izvodnice (prava), ili dve izvodnice tog konusa. U generičkom slučaju kada ravan Ω ne sadrži O i nije normalna na s , konusni presek nazivamo **konikom**. Ostale konusne preseke ćemo zvati i **degenerisanim konikama**.

7.17. Ekscentricitet konike. Dokažimo najpre teoremu kojom se karakterišu konike.

Teorema 1. *Za svaku koniku $\mathcal{K}$ u ravni Ω postoji tačka F i prava d takva da je odnos rastojanja proizvoljne tačke konike $\mathcal{K}$ do F i do d konstantan.*

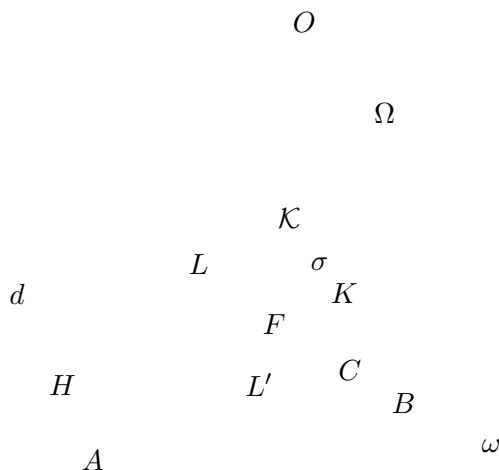
Dokaz. Neka je σ jedna od sfera upisanih (Dandelinove sfere) u dati konus koja dodiruje ravan Ω u tački F (Slika 4), i neka je ω ravan kojoj pripada krug dodira k konusa i sfere σ . Neka je zatim, prava d presek ravni Ω i ω , K proizvoljna tačka konike $\mathcal{K}$, A podnožje normale iz K na pravu d , B presek izvodnice OK i ravni ω , i C podnožje normale iz K na ravan ω . Ako obeležimo sa α ugao koji zaklapaju ravni ω i Ω , a sa β ugao koji grade prava KB i ravan ω , biće

$$KB = \frac{KC}{\sin \beta}, \quad \text{ i } \quad KA = \frac{KC}{\sin \alpha}.$$

Kako su tangentne duži KB i KF iz tačke K na sferu σ , međusobno podudarne, biće

$$(7.32) \quad \frac{KF}{KA} = \frac{KB}{KA} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = e.$$

Time je teorema dokazana. □



Slika 4. Ekscentricitet konike

Primedba. Važi i obrat tvrdnje iz iskaza ove teoreme, tj. skup tačaka u ravni Ω za koje je odnos rastojanja do neke tačke i prave u ravni konstantan jeste konusni presek.

Tačku F nazivamo **žižom** ili **fokusom** konike $\mathcal{K}$, pravu d njenom **vodiljom** ili **direktrisu**. Odnos e , rastojanja bilo koje tačke konike od fokusa i direktrise zvaćemo **ekscentricitetom** te konike.

Koniku nazivamo **elipsom** ako je $e < 1$ ($\alpha < \beta$), **hiperbolom** ako je $e > 1$ ($\alpha > \beta$), a **parabolom** ako je $e = 1$ ($\alpha = \beta$).

7.18. Jednačine konika. Izvedimo sada jednačinu konusnog preseka u polarnom koordinatnom sistemu koristeći ekscentricitet e i dužinu tetive paralelne sa direktrisu kroz fokus (Slika 5).

Tetiva LL' konike kroz fokus, paralelna direktrisi naziva se **latus rectum**, i njenu dužinu označimo sa $2l$. Tada je

$$l = FL = e LH,$$

gde je H podnožje normale iz L na d . U polarnom koordinatnom sistemu kome je središte F , a osa prava x_1 koja sadrži F i normalna je na direktrisu d (koja je desno od tačke F (kao na Slici 5)), za tačku K sa iste strane prave d kao i fokus F biće

$$(7.33) \quad r = FK = e KA = e (LH - r \cos \theta) = l - e r \cos \theta,$$

pa je

$$(7.34) \quad r(1 + e \cos \theta) = l \quad \text{ili za } 1 + e \cos \theta \neq 0, \quad r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$$

polarna jednačina konike $\mathcal{K}$.

Izvedimo sada jednačine konika u Dekartovom koordinatnom sistemu čiji je centar u fokusu a osa x_1 normalna na direktrisu (Slika 5).

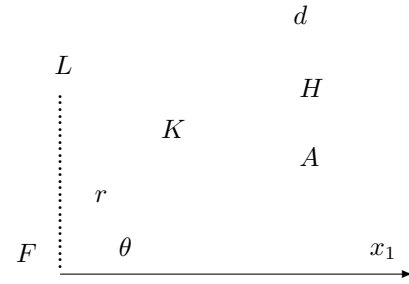
Kvadriranjem leve i desne strane jednačine (7.33) dobija se jednačina konike u Dekartovim koordinatama

$$(7.35) \quad x_1^2 + x_2^2 = (l - e x_1)^2.$$

Primetimo da na osnovu ove jednačine možemo da zaključimo da krug može biti shvaćen i kao elipsa kojoj je $e = 0$.

Ako je $e \neq 1$, deljenjem sa $1 - e^2$ leve i desne strane jednačine (7.35) i zamenom $l/(1 - e^2)$ sa a , dobija se da je

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = l a - 2 e a x_1, \quad \text{pa je stoga,} \quad (x_1 + e a)^2 + \frac{a}{l} x_2^2 = (l + e^2 a) a = a^2,$$



Slika 5. Polarna jednačina konike

tj.

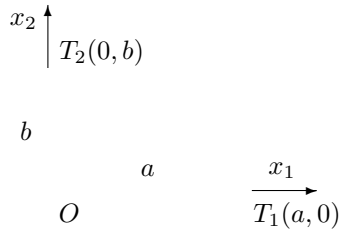
$$\frac{(x_1 + e a)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{l a} = 1.$$

Translacijom koordinatnog početka u tačku $(-e a, 0)$ iz prethodne jednačine dobijamo jednačinu

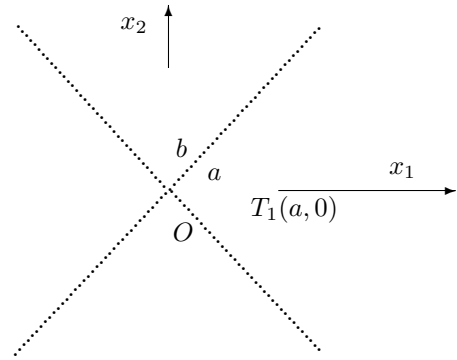
$$(7.36) \quad \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

gde je $b^2 = |l a| = |1 - e^2| a^2$, tako da je $l a = \pm b^2$ pri čemu se bira znak $+$ ili $-$ u zavisnosti od toga da li je $e < 1$ ili $e > 1$.

Veličine a i b se nazivaju **poluosama** elipse i hiperbole, i njihovo geometrijsko značenje sugerisano je Slikama 6 i 7.



Slika 6. Elipsa



Slika 7. Hiperbola

Dve grane hiperbole $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, pripadaju paru unakrsnih uglova određenih pravama zdatim jednačinom

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right) \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \right) = 0.$$

Dve prave,

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0,$$

nazivamo **asimptotama** hiperbole (Slika 7).

Ako je $e = 1$ tada se jednačina (7.34) svodi na

$$x_2^2 = 2 l \left(\frac{l}{2} - x_1 \right),$$

pa se refleksijom u odnosu na pravu $x_1 = l/4$, iz nje dobija standardna jednačina

parabole (Slika 8)

$$(7.37) \quad x_2^2 = 2l x_1.$$

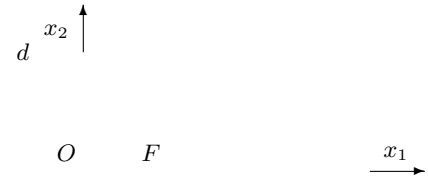
Jednačine (7.36) i (7.37) nazivamo i **kanonskim jednačinama konika**.

Ističemo i najjednostavnije parametarske jednačine konika:

elipse: $x_1 = a \cos t, \quad x_2 = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi);$

parabole: $x_1 = 2lt^2, \quad x_2 = 2lt, \quad t \in \mathbb{R};$

hiperbole: $x_1 = a \cosh t, \quad x_2 = b \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}.$



Slika 8. Parabola

Kretanje planeta. U astronomiji je poznato da je putanja planete u polarnom koordinatnom sistemu, $r = f(\theta)$, određena diferencijalnom jednačinom

$$f^{-1} + \frac{d^2(f^{-1})}{d\theta^2} = \text{konst.}$$

Rešavanjem jednačine dobija se $f^{-1} = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta + \gamma$, odnosno promenom polarne ose,

$$f(\theta) = \frac{1}{\alpha \cos \theta + \gamma}.$$

Dakle, putanje planeta, kometa i asteroida su u prvoj aproksimaciji konike u čijem se jednom fokusu nalazi sunce.

7.19. Osnovna geometrijska svojstva konika. Analizirajmo sada jednačine konike u polarnom i Dekartovom koordinatnom sistemu, kako bismo analizom tih jednačina dobili neka važna geometrijska svojstva konika.

Budući da se jednačina konike (7.34) ne menja ako θ zamenimo sa $-\theta$, konika je osno simetrična u odnosu na polarnu osu x_1 . Kada je $\theta = 0$, onda je $r = l/(1 + e)$, a kada je $\theta = \pi$, onda je $r = l/(1 - e)$, pa konika seče x_1 -osu u dvema tačkama, osim kada je $e = 1$.

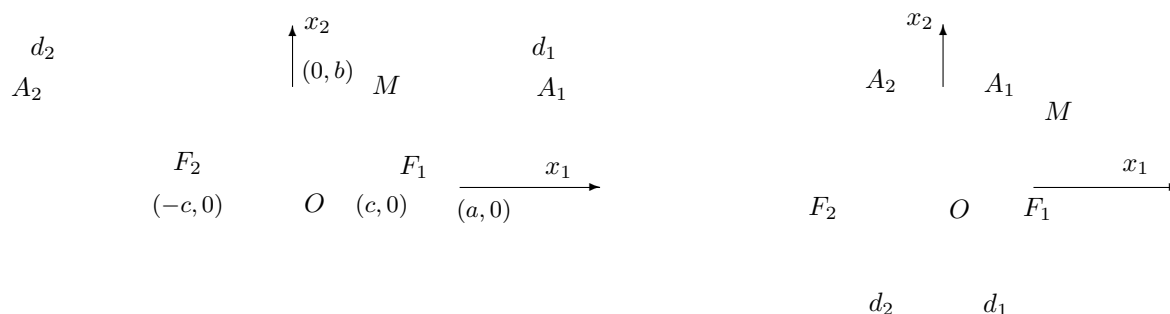
Ako je $e < 1$ iz polarne jednačine konike sledi da je za sve vrednosti θ , r konačno i pozitivno pa je stoga, elipsa zatvorena kriva. Ako je $e = 1$, r je i dalje konačno i pozitivno za sve vrednosti θ osim za $\theta = \pi$. Stoga parabola nije zatvorena jer je vrednost r nedefinisana za $\theta = \pi$. Ako je $e > 1$, i kako je $r \geq 0$ vidimo da za $\cos \theta$ manji ili jednak od $-1/e$ ne postoje tačke krive (jer bi za takve tačke bilo $r < 0$), odakle zaključujemo da ni hiperbola nije zatvorena kriva. Primetimo da jednu granu hiperbole date jednačinom (7.34) dobijamo ako ugao θ uzima vrednosti u $[0, 2\pi) \setminus [\alpha, 2\pi - \alpha]$, gde je $\alpha = \arccos(-1/e)$.

Sličnom analizom iz kanonskih jednačina konika u Dekartovom sistemu, prvo primećujemo da se jednačine elipse i hiperbole neće promeniti ako promenimo znak promenljive

x_1 ili x_2 . Odatle sledi da su elipsa i hiperbola simetrične u odnosu na ose x_1 i x_2 . Stoga se koordinatni početak naziva u ovom slučaju i **centrom** ili **središtem** konike.

7.20. Fokusne osobine konika. Budući da su elipsa i hiperbola koje su date svojim kanonskim jednačinama, simetrične u odnosu na ose x_1 i x_2 , one će biti i centralno-simetrične u odnosu na koordinatni početak. Stoga one imaju dva fokusa i dve direktrise. Kod elipse fokusi su između direktrisa, a kod hiperbole (vidi Sliku 9) direktrise su između fokusa. Ako su F_1 i d_1 fokus i direktrisa ustanovljeni u 7.17 Teorema 1: *Ekscentricitet konika*, a F_2 i d_2 njihove centralno simetrične slike u odnosu na koordinatni početak, M proizvoljna tačka elipse ili hiperbole, i A_1 i A_2 podnožja normala iz M na prave d_1 i d_2 , biće

$$(7.38) \quad \begin{aligned} & MF_1 = e MA_1 \quad \text{i} \quad MF_2 = e MA_2, \\ \text{pa je, za elipsu} \quad & MF_1 + MF_2 = e (MA_1 + MA_2) = e A_1 A_2, \\ \text{a za hiperbolu} \quad & |MF_1 - MF_2| = e |MA_1 - MA_2| = e A_1 A_2. \end{aligned}$$



Slika 9. Fokusne osobine elipse i hiperbole

Time smo dokazali,

Teorema 1. *Zbir rastojanja svake tačke elipse do njenih fokusa, i apsolutna vrednost razlike rastojanja svake tačke hiperbole do njenih fokusa su konstante.*

Pokažimo kako se koristeći prethodnu teoremu mogu odrediti ekscentricitet elipse i hiperbole kao i položaj njihovih žiža iz njihovih kanonskih jednačina, tj. na osnovu njihovih poznatih poluosa.

Pretpostavimo da je $a > b$. Obeležimo sa c rastojanje fokusa elipse ili hiperbole od koordinatnog početka. Primijenimo formule (7.38) na tačke $(a, 0)$ i $(0, b)$, gde su a i b dužina poluosa elipse. Tako dobijamo da je zbir rastojanja fokusa elipse do pomenutih tačaka

$$(7.39) \quad e A_1 A_2 = a - c + a + c = 2a, \quad e A_1 A_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Odavde odmah sledi da je

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Podsetimo se da smo u cilju dobijanja kanonskih jednačina elipse i hiperbole translirali središte koordinatnog sistema iz fokusa u tačku $(-ea, 0)$. Stoga je tačka $(ea, 0)$ fokus elipse (ili hiperbole) u koordinatnom sistemu u kojem njihove jednačine imaju kanonski oblik. Dakle $(c, 0) = (ea, 0)$, pa je

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Na isti način dobijaju se odgovarajuće jednakosti za hiperbolu

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{i} \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Osobine ustanovljene u prethodnoj teoremi su dobro poznate karakterizacije elipse i hiperbole što se vidi iz sledeće teoreme.

Teorema 2. *Geometrijsko mesto tačaka čiji je zbir (apsolutna vrednost razlike) rastojanja od dve fiksne tačke konstantan jeste elipsa (hiperbola). Geometrijsko mesto tačaka, koje su podjednako udaljene od fiksne tačke i fiksne prave, je parabola.*

Dokaz. Dokažimo prvo da je skup svih tačaka ravni kojima je zbir (apsolutna vrednost razlike) rastojanja od dve fiksne tačke F_1 i F_2 jednaka $2a$, elipsa (hiperbola). Postavimo koordinatni sistem tako da je središte duži F_1F_2 koordinatni početak O , (Slika 9) da se x_1 osa poklapa sa pravom F_1F_2 i da je osa x_2 normalna na osu x_1 i sadrži tačku O . Ako tačka F_1 ima koordinate $(c, 0)$ u ovako izabranom koordinatnom sistemu onda tačka F_2 ima koordinate $(-c, 0)$. Neka je $X(x_1, x_2)$ tačka iz traženog skupa onda imamo,

$$\left| \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} \pm \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} \right| = 2a,$$

pa se odavde, jednostavnim sređivanjem, koristeći formula (7.39) i njihove posledice, dobijaju kanonske jednačine elipse (i hiperbole), što znači da je traženo geometrijsko mesto tačaka elipsa (ili hiperbola).

Za drugo tvrđenje izaberimo koordinatni sistem (Slika 8) tako da je osa x_1 prava, normalna na datu pravu d i sadrži tačku F , koordinatni početak neka je tačka O na osi x_1 koja je podjednako udaljena od prave d i tačke F i neka je x_2 osa prava normalna na osu x_1 koja prolazi kroz O . Ako F ima koordinate $(l/2, 0)$ u ovako izabranom koordinatnom sistemu, onda je $x_1 = -l/2$ jednačina prave d . Sve tačke podjednako udaljene od F i d zadovoljavaće jednačinu

$$\left(x_1 + \frac{l}{2}\right)^2 = \left(x_1 - \frac{l}{2}\right)^2 + x_2^2,$$

odakle se sređivanjem dobija kanonska jednačina parabole. □

7.21. Optička svojstva konika. Konike poseduju sledeća vrlo značajna svojstva, koja su važna u optici.

Teorema 3.

- (e) *Svetlosni zrak koji izvire iz jednog fokusa i odbija se od elipse proći će kroz drugi fokus elipse.*
- (h) *Svetlosni zrak koji izvire iz jednog fokusa i odbija se od hiperbole izgleda kao da izvire iz njenog drugog fokusa.*

(p) *Svetlosni zrak koji izvire iz fokusa i odbija se od parabole, paralelan je osi te parabole.*

Dokaz: Pokažimo optičko svojstvo elipse, (e) (dokaz za hiperbolu je vrlo sličan) i optičko svojstvo parabole, (p).

(e) Optičku osobinu elipse lako prevodimo na geometrijski jezik, dakle treba dokazati sledeće tvrđenje:

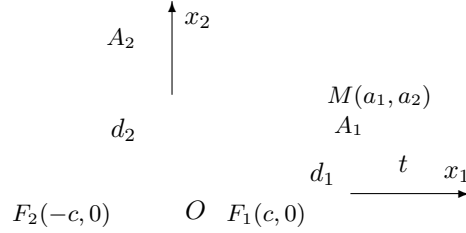
tangenta u tački M elipse zaklapa jednake uglove sa pravama koje spajaju tačku M i njene fokuse (Slika 10).

Neka je $M(a_1, a_2)$ proizvoljna tačka elipse zadate svojom kanonskom jednačinom, t tangenta te elipse u zadatoj tački i F_1 i F_2 njeni fokusi. Dovoljno je pokazati da se sinusi uglova $\alpha_1 = \angle F_2MA_2$ i $\alpha_2 = \angle F_1MA_1$ podudaraju (jer su oba ugla manja od $\pi/2$). Prvo primetimo da iz jednakosti (7.38) i (7.39) sledi,

$$MF_1 = e MA_1 = e \left(\frac{1}{2} A_1 A_2 - a_1 \right) = a - e a_1,$$

$$MF_2 = e MA_1 = e \left(\frac{1}{2} A_1 A_2 + a_1 \right) = a + e a_1.$$

Zaista, rastojanja d_1 i d_2 fokusa $F_1(c, 0)$ i $F_2(-c, 0)$ od tangente t data su formulama



Slika 10. Optičko svojstvo elipse

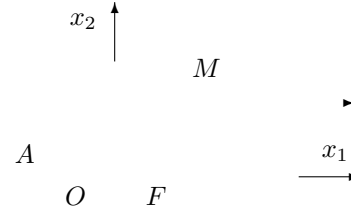
$$d_1 = \frac{1}{N} \left| \frac{a_1 c}{a^2} + \frac{a_2 0}{b^2} - 1 \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{a_1 c}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{Na} |a - a_1 e| = \frac{MF_1}{Na},$$

$$d_2 = \frac{1}{N} \left| \frac{a_1 (-c)}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{Na} |a_1 e + a| = \frac{MF_2}{Na}, \quad \text{gde je}$$

$$N^2 = \left[\frac{a_1}{a^2} \right]^2 + \left[\frac{a_2}{b^2} \right]^2, \quad \text{pa je stoga}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{d_1}{MF_1} = \frac{d_2}{MF_2} = \sin \alpha_2,$$

odakle sledi da poluprave MF_1 i MF_2 sa t zaklapaju podudarne uglove. Dokažimo još i optičko svojstvo parabole (Slika 11) (p). Zaista, tangenta parabole u tački $M(a_1, a_2)$ seče x_1 osu u tački $(-a_1, 0)$ pa su duži FA i FM jednake $a_1 + l/2$. Zato su uglovi $\angle MAF$ i $\angle AMF$ takođe jednaki odakle sledi tvrđenje. $\square$



Slika 11. Optičko svojstvo parabole

7.22. Krive drugog reda. i U ovom poglavlju opisaćemo kvadratnu geometriju krivih u ravni, tj. skupova tačaka u ravni čije Dekartove koordinate zadovoljavaju jednačine $f(x_1, x_2) = 0$, gde je f realni polinom drugog stepena u promenljivima x_1 i x_2 . Preciznije, neka je

$$(7.40) \quad f(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{13} x_1 + 2 a_{23} x_2 + a_{33},$$

polinom drugog stepena sa realnim koeficijentima ($a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$) i neka je dat pravougli koordinatni sistem u ravni. Skup svih tačaka, $\mathcal{N}_f$, ravni $\mathbb{E}^2$ čije koordinate

poništavaju polinom (7.40) zove se **kriva drugog reda**. Prema tome, kriva drugog reda je skup $\mathcal{N}_f = \{X \in \mathbb{E}^2 \mid f(X) = 0\}$.

U tu svrhu navedimo sledeće teoreme čije dokaze izostavljamo.

Kanonski oblik krive drugog reda. Da bismo opisali sve moguće skupove tačaka koji zadovoljavaju jednačinu (7.40), prvo se pokazuje egzistencija Dekartov pravougli koordinatni sistem u kojem jednačina $f(X) = 0$ ima najjednostavniji oblik.

Teorema 4. *Za svaku krivu drugog reda postoji pravougli koordinatni sistem u kojem njena jednačina ima jedan od sledećih oblika:*

- (i1) $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} = 0, a_{11} a_{22} \neq 0$ ili
- (i2) $a_{22} x_2^2 + 2 a_{13} x_1 = 0, a_{22} a_{13} \neq 0$ ili
- (i3) $a_{22} x_2^2 + a_{33} = 0, a_{22} \neq 0$.

Relacije (i1) – (i3) zovu se **kanonskim ili svedenim jednačinama** krive drugog reda.

Klasifikacionu teoremu dobijamo pažljivom analizom različitih slučajeva iz prethodne teoreme. Preciznije imamo:

Teorema 5. *Kriva drugog reda je ili konika (elipsa, hiperbola, parabola) ili degenerisana konika (dve prave koje se seku, dve paralelne prave, jedna prava, jedna tačka ili prazan skup).*

6. Zadaci

7.22. Pokažite da je vektorski proizvod tri vektora x, y i $z \in \mathcal{V}^3$ dat formulom

$$(x \times y) \times z = (x \cdot z)y - (y \cdot z)x.$$

7.23. Koristeći formulu iz prethodnog zadatka pokažite da vektorski proizvod nije asocijativan, tj. da postoje tri vektora (nađite neke konkretne vektore) x, y i $z \in \mathcal{V}^3$ takve da je

$$(x \times y) \times z \neq x \times (y \times z),$$

a zatim pokažite da važi sledeća zamena za asocijativnost:

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = ,$$

koja se zove **Jacobijev identitet**¹³.

7.24. Odnos dve prave u ravni. Iz Euklidovih aksioma sledi da dve prave u ravni mogu biti u jednom od tri sledeća položaja:

(po) da se podudaraju,

(pa) da su paralelne i ne seku se,

(s) da se seku.

(po) (pp) (s)

Odrediti u kojem se od tri položaja nalaza dve prave l i k u ravni, na osnovu poznavanja njihovih jednačina:

Slika 12. Položaj dve prave u ravni

$$(7.41) \quad l \dots\dots a_1 x_1 + a_2 x_2 + c_1 = 0, \quad p \dots\dots b_1 x_1 + b_2 x_2 + c_2 = 0.$$

Rešenje. Da bismo dali odgovor na ovo pitanje uvedimo sledeće oznake: $\tilde{n}_1 = (a_1, a_2, 0)$, $\bar{n}_1 = (a_1, a_2, c_1)$, $n_1 = (a_1, a_2)$ odnosno $\tilde{n}_2 = (b_1, b_2, 0)$, $\bar{n}_2 = (b_1, b_2, c_2)$ i $n_2 = (b_1, b_2)$. Sada lako zaključujemo:

(po) $l = p$ akko su vektori $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ proporcionalni, tj. ako je $\bar{n}_1 = \lambda \bar{n}_2$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$.

(pa) $l \parallel p$ akko su vektori n_1 i n_2 proporcionalni, a vektori $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ nisu proporcionalni, tj. $n_1 = \lambda n_2$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \neq 0$.

(s) $l \neq p$ i $l \cap p \neq \emptyset$ akko vektori n_1 i n_2 nisu proporcionalni, tj. ako je $\tilde{n}_1 \times \tilde{n}_2 \neq 0$.

7.25. Neka su date prave l i p u ravni svojim jednačinama u eksplicitnom obliku

$$(7.42) \quad l \dots\dots x_2 = k_1 x_1 + t_1, \quad p \dots\dots x_2 = k_2 x_1 + t_2.$$

Odredite ugao između pravih l i k .

Rešenje. Koristeći geometrijsku interpretaciju da je $k_1 = \tan \theta_1$ i $k_2 = \tan \theta_2$, kao i činjenicu da ugao između pravih l i p mora biti u intervalu $[0, \pi/2]$, dobijamo da je

$$\tan \angle(l, p) = |\tan(\theta_2 - \theta_1)| = \left| \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

7.26. Odnos dve ravni. Iz Euklidovih aksioma sledi da dve ravni mogu biti u jednom od tri sledeća položaja:

(po) podudaraju se,

(pa) ne seku se,

(s) seku se, ali se ne podudaraju, tada je njihov presek prava.

Odrediti u kojem se od tri položaja nalaza dve ravni π i σ ako znamo njihove opšte jednačine:

$$(7.43) \quad \pi \dots a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + c_1 = 0, \quad \sigma \dots b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + c_2 = 0.$$

¹³ Jacobi Carl Gustav Jacob, 1804–1851, nemački matematičar.

Rešenje. Ako uvedemo oznake: $\bar{n}_1 = (a_1, a_2, a_3, c_1)$, $n_1 = (a_1, a_2, a_3)$ odnosno $\bar{n}_2 = (b_1, b_2, b_3, c_2)$ i $n_2 = (b_1, b_2, b_3)$. Sada lako zaključujemo:

- (po) $\pi = \sigma$ akko su vektori $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ proporcionalni, tj. ako je $\bar{n}_1 = \lambda \bar{n}_2$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (pa) $l \parallel p$ akko su vektori n_1 i n_2 proporcionalni, a vektori $\bar{n}_1$ i $\bar{n}_2$ nisu proporcionalni, tj. $n_1 = \lambda n_2$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\bar{n}_1 \neq \mu \bar{n}_2$, za svaki $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$.
- (s) $\pi \neq \sigma$ i $\pi \cap \sigma \neq \emptyset$ akko vektori n_1 i n_2 nisu proporcionalni, tj. ako je vektor $n = n_1 \times n_2 \neq 0$. Tada je $\pi \cap \sigma = p$ prava koja je određena vektorom pravca n i jednom tačkom preseka ravni π i σ koju dobijamo kao neko rešenje sistema jednačina (7.43).

7.27. Odnos ravni i prave u prostoru. Iz Euklidovih aksioma takođe sledi da prava l i ravan π u prostoru mogu biti u jednom od tri sledeća položaja:

- (po) $l \subseteq \pi$, tj. prava l je podskup ravni π ,
- (pa) $l \cap \pi = \emptyset$, tj. l i π se ne seku,
- (s) seku se u jednoj tački.

Neka su date jednačine ravni π i prave l ,

$$(7.44) \quad \pi \dots a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b = 0, \quad l \dots \frac{x_1 - y_1}{\xi_1} = \frac{x_2 - y_2}{\xi_2} = \frac{x_3 - y_3}{\xi_3}.$$

Dati karakterizaciju sva tri moguća položaja ravni i prave u terminima njihovih jednačina.

Rešenje. Neka je $n = (a_1, a_2, a_3)$ vektor normale ravni π i $s = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektor pravca prave l . Da bismo opisali jedan od gore pomenuta tri slučaja potrebno je ispitati presek prave l i ravni π . Evantualne tačke preseka moraju zadovoljavati obe od jednačine (7.44). Tako dobijamo,

$$(7.45) \quad \begin{aligned} 0 &= a_1 (y_1 + \lambda \xi_1) + a_2 (y_2 + \lambda \xi_2) + a_3 (y_3 + \lambda \xi_3) + b \\ &= \lambda (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3) + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + b. \end{aligned}$$

Sada iz (7.44) lako zaključujemo:

- (po) $l \subseteq \pi$ akko za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ jednačina (7.44) ima rešenje, tj. ako su ispunjeni uslovi,

$$(1) \quad 0 = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 \quad (2) \quad a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + b = 0.$$

Uslov (1) predstavlja normalnost vektora n i s , tj. $0 = n \cdot s$.

- (pa) $l \cap \pi = \emptyset$ akko jednačina (7.44) nema rešenja, tj. ako su ispunjeni uslovi,

$$(1) \quad 0 = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 \quad (2) \quad a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + b \neq 0.$$

Kao i u prethodnom slučaju (1) predstavlja normalnost vektora n i s .

- (s) $l \cap \pi$ je jedna tačka akko jednačina (7.44) ima tačno jedno rešenje, tj. ako je $0 \neq n \cdot s = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3$.

7.28. Odnos dve prave u prostoru. Iz Euklidovih aksioma sledi da dve prave u prostoru mogu biti u jednom od četiri položaja:

- (po) podudaraju se,
- (pa) paralelne su i ne seku se,
- (s) seku se,
- (m) mimoilazne su, tj. ne seku se i nisu paralelne.

Neka su prave l i p date svojim jednačinama,

$$l \dots \frac{x_1 - y_1}{\xi_1} = \frac{x_2 - y_2}{\xi_2} = \frac{x_3 - y_3}{\xi_3}, \quad p \dots \frac{x_1 - z_1}{\eta_1} = \frac{x_2 - z_2}{\eta_2} = \frac{x_3 - z_3}{\eta_3}.$$

Dati karakterizaciju svih mogućih položaja ravni i prave u terminima njihovih jednačina.

Rešenje. Da bismo dali odgovor koji od četiri slučaja nastupa potrebno je opisati presek ove dve prave, tj. naći rešenje sistema (u λ i μ) jednačina

$$(7.46) \quad \begin{array}{lll} x_1 = y_1 + \lambda \xi_1 = z_1 + \mu \eta_1 & & \lambda \xi_1 - \mu \eta_1 = z_1 - y_1 \\ x_2 = y_2 + \lambda \xi_2 = z_2 + \mu \eta_2 & \text{ili ekvivalentno} & \lambda \xi_2 - \mu \eta_2 = z_2 - y_2 \\ x_3 = y_3 + \lambda \xi_3 = z_3 + \mu \eta_3 & & \lambda \xi_3 - \mu \eta_3 = z_3 - y_3. \end{array}$$

Sistem (7.46) ima više jednačina nego nepoznatih, pa njegovo rešenje tražimo tako što nađemo rešenje sistema (ako postoji) koji se sastoji od prve dve jednačine, a zatim proverimo da li dobijeno rešenje zadovoljava i treću jednačinu. Ako uvedemo oznake, $s_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $s_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, imamo:

- (po) $l = p$ akko su vektori s_1 i s_2 proporcionalni, tj. ako je $s_1 \times s_2 = 0$, i sistem (7.46) ima barem jedno rešenje¹⁴
- (pa) $l \parallel p$ i $l \cap p \neq \emptyset$ akko su vektori s_1 i s_2 proporcionalni, i sistem (7.46) nema rešenja.
- (s) $l \neq p$ i $l \cap p \neq \emptyset$ akko vektori s_1 i s_2 nisu proporcionalni, tj. ako je $s_1 \times s_2 \neq 0$, i sistem (7.46) ima tačno jedno rešenje.
- (m) $l \neq p$ i $l \cap p = \emptyset$ akko vektori s_1 i s_2 nisu proporcionalni, tj. ako je $s_1 \times s_2 \neq 0$, i sistem (7.46) nema rešenja.

¹⁴Iz geometrijskih razloga jasno je da ako sistem (7.46) ima barem jedno rešenje ima beskonačno rešenja.

Dodatak

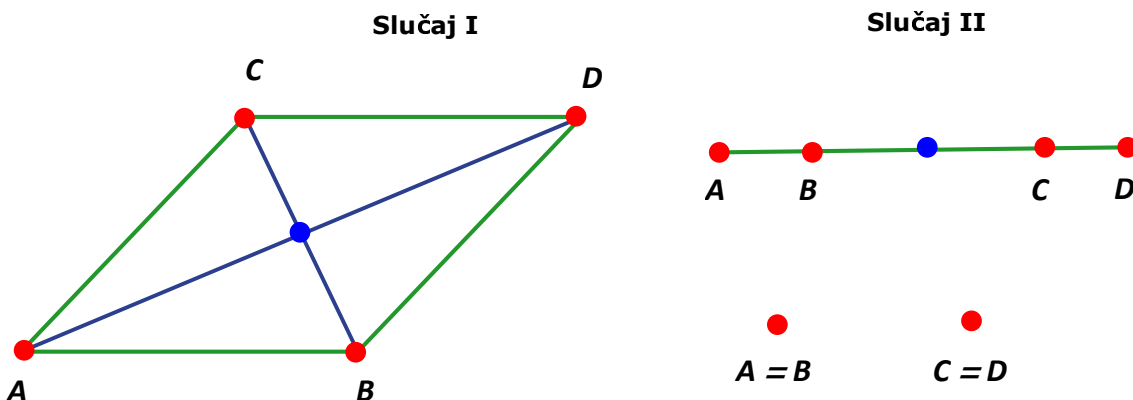
U ovoj glavi uvodimo pojam vektora, vektorskog prostora i dajemo njihove najjednostavnije primene u analitičkoj geometriji. Uvođenje vektora i njihova primena dovelo je do povezivanja starih matematičkih disciplina geometrije i algebre. Preciznije, vektori kao algebarski aparat omogućio je na početku lakše rešavanje poznatih geometrijskih (planimetrijskih i stereometrijskih) problema, a zatim je postao i obrazac za povezivanja nekih matematičkih disciplina. Jedna od tekovina uvođenja vektora su i koordinatni sistemi i koordinate. Danas je teško zamisliti i jednu naučnu disciplinu koja se bavi prirodnim naukama u kojoj se ne pojavljuju koordinate.

Izlaganje u ovoj glavi zasniva se uglavnom na knjizi N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić: *Analitička geometrija*, MF, 2003, kao i na nezavršenom materijalu *Linearna algebra*, autora.

1. Uvođenje vektora

8.1. Uvođenje vektora. Geometrija koja se uči u osnovnoj i srednjoj školi zasnovana je na pretpostavci da je prostor $\mathbb{E}$ u kojem živimo dobro aproksimiran Euklidovskim prostorom, ili preciznije pretpostavljamo da je opisan aksiomama koje je dao D. Hilbert, krajem 19. i početkom 20. veka prilagođavajući Euklidovu aksiomatiku datu u "Elementima", savremenom matematičkom jeziku.

Pojam vektora. Na skupu $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$, uređenih parova tačaka prostora $\mathbb{E}$ uvodimo relaciju $\sim$ na sledeći način: $(A, B) \sim (C, D)$ akko duži AD i BC imaju zajedničko središte (Slika 1). To zapisujemo ovako $(A, B) \sim (C, D)$.



Slika 1. Uvođenje vektora

Kako je u uređenom paru bitan redosled tačaka, uređene parove iz gornje definicije nazivamo i usmerenim dužima. Usmerena duž (A, B) određena je svojom početnom

tačkom A i krajnjom tačkom B . Tako da se za usmerenu duž (A, B) često koristi oznaka $\overrightarrow{AB}$.

Poznato je da je četvorougao $ABCD$ paralelogram¹ ako i samo ako mu se dijagonale polove. Koristeći ovu činjenicu vidimo (vidi Sliku 1) da postoje dva tipa usmerenih duži (A, B) i (C, D) koje su u relaciji $\sim$: četvorougao $ABDC$ je paralelogram (nedegenerisani slučaj), tačke $ABDC$ pripadaju istoj pravoj (degenerisani slučaj) i zadovoljavaju uslov da se duži AD i BC polove.

Teorema 1. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije $\sim$ direktno sledi iz definicije. Transitivnost, videti npr. u knjizi N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić: *Analitička geometrija* MF, 2003. $\square$

Kao što znamo, osnovna osobina svake relacije ekvivalencije je da razbija skup na kojem je definisana na međusobno disjunktne klase ekvivalencije, tj. na podskupove čija je unija čitav skup i čiji preseki po parovima su prazni skupovi, vidi Uvod 1.17, tako da imamo sledeću definiciju:

*svaka od klasa ekvivalencija na koje je skup uređenih parova tačaka (usmerenih duži) $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ razbijen relacijom $\sim$ zove se **vektor**.*

Dakle, vektor definisan svojim predstavnikom usmerenom duži (A, B) , je skup

$$(8.1) \quad [(A, B)] = \{(X, Y) \mid (X, Y) \sim (A, B)\}.$$

Kako je gornja oznaka glomazna koristimo oznaku $[(A, B)] = \mathbf{AB}$, da bismo naglasili razliku između usmerenih duži i vektora. Vektore ćemo obeležavati malim latiničnim slovima $x, y, a, b, \dots$. Skup svih vektora obeležavamo sa V , dakle,

$$(8.2) \quad V = \mathbb{E} \times \mathbb{E} / \sim = \{[(A, B)] \mid A, B \in \mathbb{E}\}.$$

Primetimo da smo sa $\mathbb{E}$ obeležili čitav prostor, ako sa $\mathbb{E}^1$ i $\mathbb{E}^2$ obeležimo redom sve tačke neke prave ili ravni tada relacija ekvivalencije $\sim$ ima smisla i na ovim skupovima i ona na isti način indukuje vektorske prostore V^1 i V^2 .

8.2. Intenzitet, pravac i smer vektora. Kako je vektor jedna klasa ekvivalencije postavlja se pitanje čime je karakterisana ta klasa, tj. koja svojstva jednoznačno određuju vektor. Primetimo da su usmerene duži (A, B) i (C, D) u relaciji $\sim$ akko su nasuprotne strane paralelograma (ili degenerisanog paralelograma), tada lako možemo zaključiti:

(i) Rastojanje² između tačaka A i B , nazivamo **dužinom**, **intenzitetom** ili **modulom** vektora $\mathbf{AB}$ i obeležavamo ga sa $\|\mathbf{AB}\| = \text{dis}(A, B)$. Jasno je da svi predstavnici

¹ U označavanju temena poligona koristimo konvenciju da temena poligona obeležavamo u pozitivnom smeru tj. u smeru suprotnom od kretanja kazaljki na satovima starijim od 50 godina. Ovaj vremenski uslov je neophodan jer su se u zadnje vreme pojavili satovi čije se kazaljke kreću u suprotnom smeru od satova iz starih dobrih vremena.

² Rastojanje, tj. mera duži, uvedeno je u Euklidovim aksiomama.

datog vektora imaju istu dužinu, kao i to da usmerene duži koje nemaju istu dužinu ne mogu biti u istoj klasi.

(p) Pravu p određenu tačkama A i B ($A \neq B$) i sve prave paralelne pravoj p zvaćemo **pravcem** vektora $\mathbf{AB}$. Primetimo da svi predstavnici datog vektora imaju isti pravac, kao i to da usmerene duži koje nemaju isti pravac ne mogu biti u istoj klasi. Primetimo da je pravac vektora zapravo jedna klasa ekvivalencije relacije 'biti paralelan' na skupu svih pravih prostora $\mathbb{E}$. Vektore koji imaju isti pravac nazivamo **kolinearnim**, a one kojima su pravci paralelni nekoj ravni π , **koplanarnim**. Smatraćemo da je nula vektor kolinearan (ili koplanaran) sa svakim skupom kolinearnih (ili koplanarnih) vektora.

(s) Pod **orijentacijom** (ili **smerom**) vektora $\mathbf{AB}$ podrazumevamo smer prave p ³ određen početkom i krajem predstavnika $\overrightarrow{AB}$ na pravoj p . Primetimo da smer vektora ne zavisi od izbora predstavnika $\overrightarrow{AB}$, kao i to da usmerene duži koje nemaju istu orijentaciju ne mogu biti u istoj klasi.

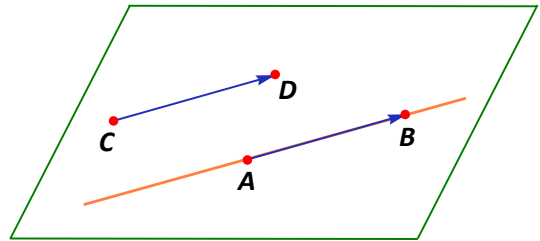
Lako se vidi da je **svaki vektor jednoznačno određen svojim intenzitetom, pravcem i smerom**.

8.3. Neki specijalni vektori. Vektor čiji je predstavnik usmerena duž $\overrightarrow{AA}$, kojoj se početak i kraj poklapaju, nazivamo **nula vektorom** i obeležavamo ga sa $\mathbf{0}$. Jasno je da vektor ima dužinu 0 ako i samo ako je on nula vektor. Nula vektor nema ni pravac ni smer. Za vektor $\mathbf{BA}$ kažemo da je **suprotnosmeran** vektoru $\mathbf{AB}$.

8.4. Linearne operacije u skupu vektora. Da bismo mogli definisati operacije na skupu vektora, neophodna nam je sledeća teorema, koja zapravo tvrdi da je prostor $\mathbb{E}$ homogen i da su sve tačke potpuno ravnopravne⁴.

Teorema 1. *Ako je A proizvoljna tačka skupa $\mathbb{E}$, za svaki vektor $a \in V$ postoji jedinstvena tačka $B \in \mathbb{E}$ takva da je $a = \mathbf{AB}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \neq \mathbf{0}$, jer u suprotnom stavimo $B = A$ i dokaz je gotov. Neka je a dat svojim predstavnikom $\overrightarrow{CD}$, tj. $a = \mathbf{CD}$. Ako tačka A pripada pravoj određenoj sa CD onda na toj istoj pravoj postoji tačno jedna tačka B takva da su rastojanja $dis(A, B)$ i $dis(C, D)$ jednaka i da se duži AD i BC polove. U slučaju da tačka A ne pripada pravoj CD (Slika 2) prvo zaključujemo da postoji (prema 5.-om Euklidovom postulatu) tačno jedna prava koja sadrži



Slika 2. Homogenost prostora

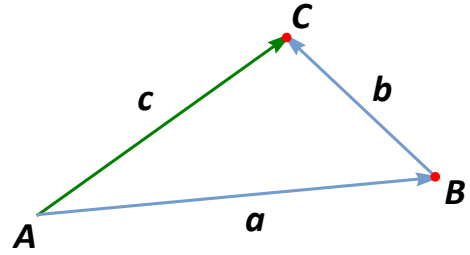
tačku A i paralelna je sa pravom CD , a zatim da je na toj pravoj jedinstveno određena tačka B koja je teme paralelograma $ABDC$. Tako da je $(C, D) \sim (A, B)$, što zapravo znači da je $a = \mathbf{CD} = \mathbf{AB}$. $\square$

³ Za dva nenula vektora istog pravca određena svojim predstavnicima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ kažemo da su istog ili suprotnog smera ako su tačke B i C sa iste odnosno sa suprotne strane tačke A .

⁴ Zbog čega bismo ovu teoremu mogli da nazovemo teorema potpune (totalne) demokratije u skupu $\mathbb{E}$. Istorijско iskustvo pokazuje da se tako nešto gotovo nikad ne dešava u skupovima ljudi, jer tamo uvek postoje oni koji su malo 'ravnopravniji' ili 'jednakiji' od drugih.

Primetimo da upravo dokazana teorema tvrdi da svaki vektor $a \in V$ u proizvoljnoj tački $A \in \mathbb{E}$ ima tačno jednog predstavnika kojem je tačka A početak.

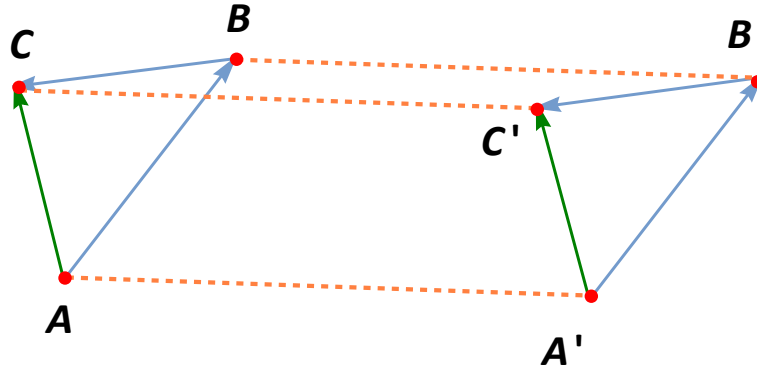
Teorema 1 pokazuje da sledeća definicija sabiranja vektora ima smisla. Neka je A proizvoljna tačka iz $\mathbb{E}$ i $a, b \in V$, i neka su vektori a i b dati svojim predstavnicima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ onda je zbir vektora (Slika 3) a i b , vektor c čiji predstavnik je usmerena duž $\overrightarrow{AC}$.



Slika 3. Sabiranje vektora

Propozicija 2. Zbir dva vektora ne zavisi od izbora njihovih predstavnika.

Dokaz. Neka su a i $b \in V$ dati redom svojim predstavnicima $a = \mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$ i $b = \mathbf{BC} = \mathbf{B'C'}$. Tada su četvorouglovi $ABB'A'$ i $BCC'B'$ paralelogrami (Slika 4) (ili degenerisani paralelogrami), te su duži AA' i CC' podudarne i paralelne. Stoga je $ACC'A'$ paralelogram, odnosno parovi (A, C) i (A', C') određuju isti vektor,



Slika 4. Nezavisnost sabiranja vektora od predstavnika

što je i trebalo proveriti. □

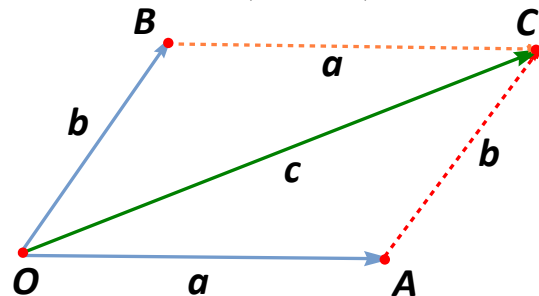
Primedba 1. Ideje iz dokaza prethodne Propozicije mogu se iskoristiti u dokazivanju tranzitivnosti relacije $\sim$.

Ako je $c = \mathbf{AC}$ zbir vektora $a = \mathbf{AB}$ i $b = \mathbf{BC}$, pisaćemo

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}.$$

Primedba 2. Gornja definicija sabiranja vektora zove se sabiranje vektora po zakonu trougla. Sabiranje vektora ponekad se definiše na sledeći način (Slika 5):

neka je $O \in \mathbb{E}$ proizvoljna tačka i neka su a i b proizvoljni vektori iz $\mathbb{E}$ čiji su predstavnici usmerene duži $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. Zbirom vektora a i b zovemo vektor c koji je određen svojim predstavnikom $\overrightarrow{OC}$, pri čemu je C jedinstvena tačka u $\mathbb{E}$, takva da je četvorougao $OACB$ paralelogram. Ovaj način sabiranja vektora zove se sabiranje vektora po zakonu paralelograma.

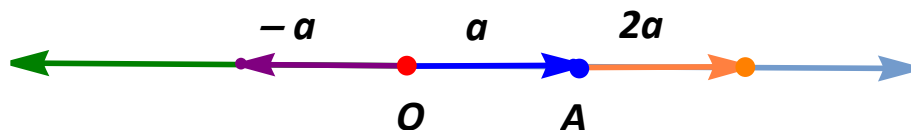


Slika 5. Zakon paralelograma

Lako se vidi da su sabiranja vektora po zakonu trougla i paralelograma ekvivalentna.

Množenje vektora skalarom. Množenje vektora skalarom (realnim brojem) je preslikavanje: $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, kojim bilo kojem skalaru $\alpha \in \mathbb{R}$ i bilo kojem vektoru $a \in V$ dodeljujemo jedinstveni vektor $b = \alpha \cdot a^5 \in V$ dat sa

- (i) $\|b\| = \|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$,
- (p) ako je $a \neq \mathbf{0}$ i $\alpha \neq 0$ tada vektori a i b imaju isti pravac, što ćemo zapisivati $p(b) = p(\alpha a) = p(a)$.
- (s) Vektor $b (\neq \mathbf{0})$ je istosmeran ili suprotnosmeran vektoru $a (\neq \mathbf{0})$ u zavisnosti od toga da li je $\alpha > 0$ ili $\alpha < 0$, što zapisujemo $s(b) = s(\alpha a) = \text{sgn}(\alpha) s(a)$.



Slika 6. Množenje vektora skalarom

2. Vektorski prostor

8.5. Vektorski prostor. Primetimo da je $-\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, što nam omogućuje da proizvod broja -1 i vektora a (Slika 6) obeležavamo sa $-a$ i pišemo $(-1)a = -a$. Zbir vektora a i $-b$ obeležavamo sa $a - b$ i nazivamo ga **razlikom vektora a i b** . Osnovna svojstva sabiranja vektora i množenja vektora sa skalarom sadržana su u sledećoj teoremi.

Teorema 1. Neka su a, b i c proizvoljni vektori i neka su α, β realni brojevi, tada je:

(S1) $a + (b + c) = (a + b) + c$,	(M1) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$,
(S2) $a + \mathbf{0} = \mathbf{0} + a = a$,	(M2) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$,
(S3) $a + (-a) = (-a) + a = \mathbf{0}$,	(M3) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$,
(S4) $a + b = b + a$,	(M4) $1 \cdot a = a$.

Dokaz. U dokazima osobina (S1)-(S4) i (M1) koristimo Teoremu 1 i Propoziciju 2, u dokazima osobina (M2) i (M3) proveriti se da leva i desna strana jednakosti imaju isti intenzitet, pravac i smer, dok je dokaz osobine (M4) očigledan iz definicije. Dokažimo npr.

(S1)-(S4) Neka su A, B, C i D četiri tačke takve da je $a = \mathbf{AB}$, $b = \mathbf{BC}$ i $c = \mathbf{CD}$. Tada je

$$a + (b + c) = \mathbf{AB} + (\mathbf{BC} + \mathbf{CD}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD} = \mathbf{AC} + \mathbf{CD} = (\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) + \mathbf{CD} = (a + b) + c.$$

(S2) Ako su tačke A i B takve da je $\mathbf{AB} = a$, biće

$$a + \mathbf{0} = \mathbf{AB} + \mathbf{BB} = \mathbf{AB} = a, \quad \text{i} \quad \mathbf{0} + a = \mathbf{AA} + \mathbf{AB} = \mathbf{AB} = a.$$

(S3) Ako su tačke A i B takve da je $\mathbf{AB} = a$, biće

$$a + (-a) = \mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{AA} = \mathbf{0} = \mathbf{BB} = \mathbf{BA} + \mathbf{AB} = (-a) + a.$$

⁵ Tačku iz gornje oznake za množenje vektora skalarom ćemo izostavljati i pisati samo $b = \alpha a$

(S4) Neka su O , A i B tri tačke takve da je $\mathbf{OA} = a$ i $\mathbf{OB} = b$, i neka je C tačka takva da je četvorougao $OACB$ paralelogram. Tada je

$$a + b = \mathbf{OA} + \mathbf{AC} = \mathbf{OC} = \mathbf{OB} + \mathbf{BC} = b + a.$$

Slično se provere i ostale osobine. □

Svojstva (S1)–(S4)^{6,7} i (M1)–(M4) koja važe na skupu svih vektora V bila su 'inspiracija' za sledeću definiciju pojma **vektorskog prostora**.

Dakle, za uređenu četvorku $V \equiv (V, +, \cdot, \mathbb{R})$ kažemo da ima strukturu **vektorskog prostora** nad poljem $\mathbb{R}$ ⁸ ako je $(V, +)$ ⁹ Abelova grupa i ako je definisano množenje vektora sa skalarima $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, tako da važe osobine (M1)–(M4).

Sledeća svojstva važe u svakom vektorskom prostoru

Teorema 2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, x neki vektor i α neki skalar. Tada važi:*

$$(i1) \quad \alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x).$$

$$(i2) \quad 0 \cdot x = 0.$$

$$(i3) \quad \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Ako je $\alpha \cdot x = \mathbf{0}$ tada je ili $\alpha = 0$ ili $x = \mathbf{0}$.

Dokaz. (i1) Primena aksiome (M2) kao i komutativnosti množenja skalara daje:

$$\alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot ((-1) \cdot x) = (\alpha(-1)) \cdot x = ((-1)\alpha) \cdot x = \begin{cases} (-1)(\alpha \cdot x) = -(\alpha \cdot x). \\ ((-1)\alpha) \cdot x = (-\alpha) \cdot x. \end{cases}$$

Sada iz (i1) lako slede (i2) i (i3):

$$0 \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = \alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot x + (-\alpha \cdot x) = \mathbf{0}, \quad i$$

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot x + ((-\alpha) \cdot x) = \alpha \cdot x + (-\alpha \cdot x) = \mathbf{0}.$$

Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$, tada u polju $\mathbb{R}$ postoji inverz α^{-1} tako da redom imamo

$$x = 1 \cdot x = ((\alpha^{-1})\alpha) \cdot x = (\alpha^{-1})(\alpha \cdot x) = (\alpha^{-1}) \cdot \mathbf{0} \stackrel{(i3)}{=} \mathbf{0}.$$

Dakle, ako $\alpha \neq 0$ tada mora biti $x = \mathbf{0}$. □

8.6. Linearna kombinacija vektora i skup generatora. Neka je dat neki podskup B vektorskog prostora V , koji ne sadrži nula vektor. Kažemo da je $x \in V$ linearna kombinacija vektora iz B , ako postoje $m \in \mathbb{N}$, vektori $a_1, a_2, \dots, a_m \in B$ i skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$(8.3) \quad x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m.$$

⁶ Skup sa operacijom koja zadovoljava svojstva (S1)–(S3) naziva se **grupa**, a ako još zadovoljava i (S4) onda se naziva komutativna ili Abelova grupa.

⁷ Abel, Niels Henrik, 1802–1829, norveški matematičar.

⁸ Definicija polja data je u tački 1.32.

⁹ Elemente skupa V nazivamo vektorima.

Od posebnog je interesa slučaj kada je svaki vektor $x \in V$ linearna kombinacija vektora iz skupa B . Tada kažemo da je B skup generatora¹⁰ vektorskog prostora V .

8.7. Linearna nezavisnost. Neka je dat neki konačan podskup $B = \{a_1, \dots, a_m\}$ vektorskog prostora V . Kažemo da je B linearno nezavisan ako jednačina linearne (ne)zavisnosti¹¹:

$$(8.4) \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = \mathbf{0},$$

ima samo trivijalno¹² rešenje: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. Skup B je linearno zavisan ako nije linearno nezavisan, tj. ako jednačina (8.4) ima samo netrivialno rešenje¹³. Ako je skup B beskonačan kažemo da je linearno nezavisan ako je svaki njegov konačni podskup linearno nezavisan.

Primetimo da ako skup $B = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ sadrži nula vektor onda je on linearno zavisan jer ako je npr. $a_1 = \mathbf{0}$, imamo netrivialnu linearnu kombinaciju nula vektora,

$$\mathbf{0} = 5 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + \dots + 0 \cdot a_m.$$

Zbog toga uvek podrazumevamo da skup kojem ispitujemo linearnu nezavisnost ne sadrži nula vektor.

Ispitajmo geometrijski smisao linearne zavisnosti i linearne nezavisnosti nekog skupa vektora prave, ravni ili prostora. Jasno, skup koji se sastoji iz samo jednog nenula vektora je linearno nezavisan.

Teorema 1. *Nenula vektori a i b su linearno zavisni ako i samo ako su kolinearni. Neka je $\mathbb{E}^1$ prava i neka je e_1 neki nenula vektor u V^1 , tada za proizvoljni vektor $x \in V^1$ jedinstveno je određen skalar x_1 takav da je $x = x_1 e_1$.*

Dokaz. Sledi iz definicije kolinearnosti i množenja vektora sa skalarom □

U ravni situacija je nešto složenija što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2. *Neka je $\mathbb{E}^2$ ravan onda u vektorskom prostoru V^2 postoje dva linearno nezavisna vektora. Svaka tri vektora iz V^2 su linearno zavisna. Neka su $e_1, e_2 \in V^2$ dva linearno nezavisna vektora. Za svaki vektor $x \in V^2$ jedinstveno su određeni skalari x_1 i x_2 takvi da je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$.*

Dokaz. Kako u ravni postoje tri nekolinearne tačke O, A, B vektori $\mathbf{OA}$ i $\mathbf{OB}$ su nekolinearni, pa samim tim i linearno nezavisni. Time je dokazan prvi deo teoreme.

Dokažimo i drugi. U tom cilju pretpostavimo, najpre, da su dva od vektora iz skupa $\{a, b, c\}$ neke ravni, kolinearna. Ako su to npr. vektori a i b tada su oni i linearno zavisni pa postoje brojevi α i β od kojih je bar jedan nije nula, takvi da je

$$\alpha a + \beta b = \mathbf{0}, \quad \text{tada je} \quad \alpha a + \beta b + 0c = \mathbf{0},$$

¹⁰ Ili generišući skup.

¹¹ Nepoznate su $\alpha_i, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

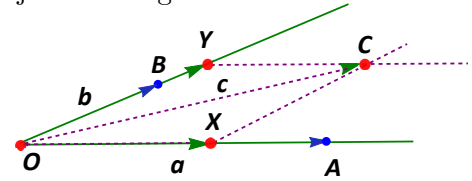
¹² koje uvek postoji zbog Teorema 2 (i2), 2.5

¹³ Barem jedan od skalara $\alpha_i, i = 1, \dots, m$ je različit od nule.

pa su i vektori a, b, c linearno zavisni. Pretpostavimo da nijedan par vektora iz skupa $\{a, b, c\}$ nije kolinearan. Obeležimo sa O proizvoljnu tačku ravni, sa A, B, C tačke te ravni takve da je $\mathbf{OA} = a$, $\mathbf{OB} = b$ i $\mathbf{OC} = c$ (što možemo zbog 8.4 Teoreme 1 i sa X i Y tačke pravih OA i OB takve da je četvorougao $OXC Y$ paralelogram (Slika 7). Budući da su vektori $\mathbf{OX}$ i $\mathbf{OY}$ kolinearni, redom, sa vektorima $\mathbf{OA}$ i $\mathbf{OB}$, na osnovu Teoreme 1 postoje brojevi α i β takvi da je $\mathbf{OX} = \alpha a$ i $\mathbf{OY} = \beta b$. Otuda je

$$c = \mathbf{OC} = \mathbf{OX} + \mathbf{OY} = \alpha a + \beta b,$$

pa su vektori a, b, c linearno zavisni. Poslednji deo teoreme sledi iz upravo dokazanog, tj. ako izaberemo da je $a = e_1$, $b = e_2$ i $c = x$. Tada je i $\alpha = x_1$ i $\beta = x_2$. Jedinstvenost je očigledna. $\square$



Slika 7. Razlaganje vektora u ravni

I na kraju razmotrimo dalje, linearnu zavisnost i linearnu nezavisnost vektora u prostoru.

Teorema 3. *Neka je $\mathbb{E}$ prostor onda u $V^3 = V$ postoje tri međusobno linearno nezavisna vektora. Svaka četiri vektora iz V su linearno zavisna. Neka su $e_1, e_2, e_3 \in V$, tri linearno nezavisna vektora. Tada za svaki vektor $x \in V$ jedinstveno su određeni skalari x_1, x_2 i x_3 takvi da je $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$.*

Dokaz. Prvo se pokaže pomoćni stav: Vektori a, b i c su linearno zavisni akko su koplanarni, a zatim se imitira dokaz Teoreme 2. $\square$

3. Baza i dimenzija

8.8. Baza i dimenzija vektorskog prostora. Podskup B vektorskog prostora V koji je istovremeno skup generatora i koji je linearno nezavisan zove se **baza** vektorskog prostora.

U prethodnoj tački Teoreme 1, 2 i 3 zapravo tvrde da vektorski prostori V^1, V^2 i V^3 imaju bazu, koje se sastoje redom od jednog, dva ili tri vektora. Iz konstrukcija baza vektorskih prostora V^1, V^2 i V^3 vidi se da je broj vektora u njihovim bazama uvek isti što je naznačeno u njihovim oznakama. Ovo nije slučajno jer važi fundamentalna teorema o bazi vektorskog prostora.

Teorema 1. *Neka je V proizvoljan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Tada važi,*

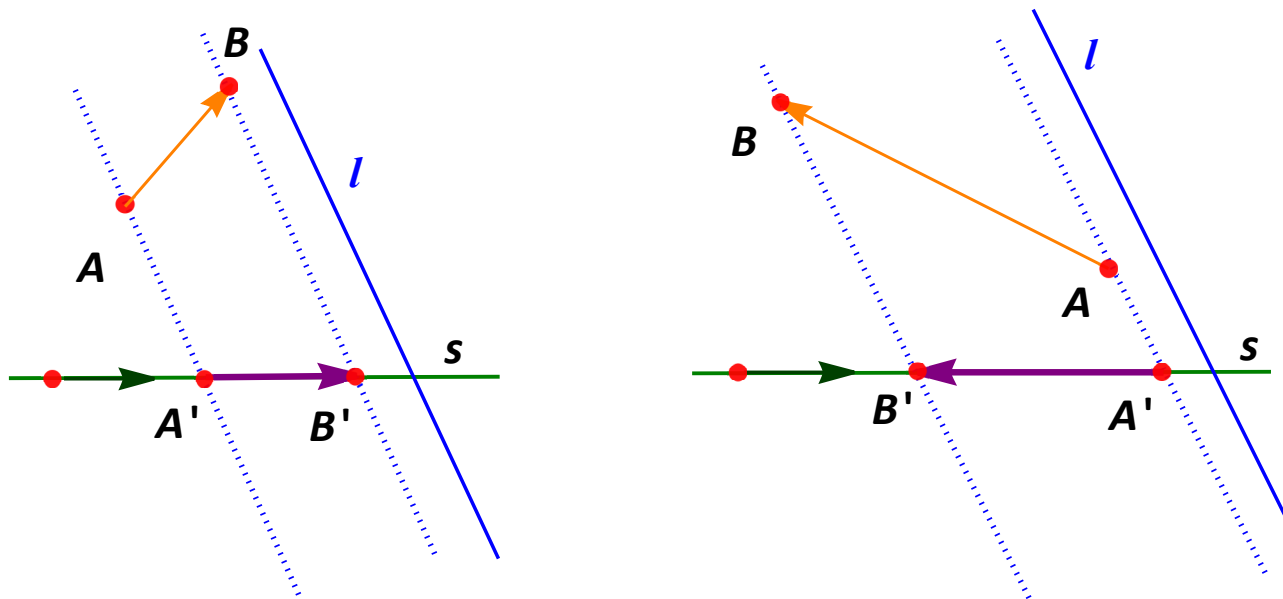
- (i1) *postoji neka baza B vektorskog prostora V .*
- (i2) *ako su B_1 i B_2 dve proizvoljne baze vektorskog prostora V onda postoji bijekcija $f : B_1 \rightarrow B_2$.*

Primetimo da tvrđenje (i2) iz prethodne Teoreme kaže da sve baze vektorskog prostora imaju 'jednak'¹⁴ broj elemenata, što nam omogućuje da definišemo pojam dimenzije vektorskog prostora. Dakle, **dimenzija vektorskog prostora V** je kardinalni broj neke njegove baze. Kažemo da je V **konačnodimenzioni vektorski prostor** ako ima neku bazu koja ima konačno mnogo elemenata. U ovom tekstu pretpostavljamo da su svi vektorski prostori konačnodimenzioni.

¹⁴ tj. da postoji bijekcija sa jedne baze na drugu.

4. Paralelno projektovanje

8.10. Paralelno projektovanje. Poznato je da na pravoj postoje dva usmerenja (levo i desno). Pod osom podrazumevamo pravu na kojoj je uvedena orijentacija izborom predstavnike nekog (nenula) vektora, koji je sadržan na datoj pravoj. Neka



Slika 8. Paralelna projekcija

su u ravni dati vektori $\mathbf{AB}$, osa s određena jediničnim vektorom e ¹⁵ i prava l koja nije paralelna osi. Paralelnom projekcijom vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l nazivamo vektor $\mathbf{A'B'}$ čija temena su tačke A' i B' u kojima prave kroz tačke A i B paralelne pravoj l seku osu s . Kako je vektor $\mathbf{A'B'}$ kolinearan sa vektorom ose e , postoji skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathbf{A'B'} = \alpha e$. Broj α nazivamo **paralelnom skalar–projekcijom** vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na pravu l i obeležavaćemo ga ponekad sa $\alpha = \mathbf{pr}_s^l \mathbf{AB}$. Tako da imamo (Slika 8),

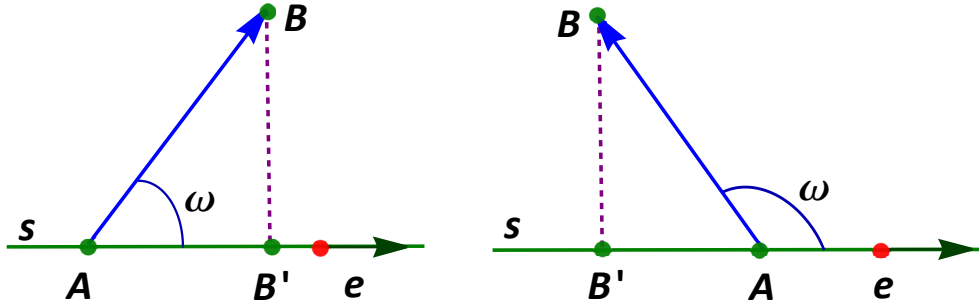
$$(8.5) \quad \mathbf{A'B'} = (\mathbf{pr}_s^l \mathbf{AB}) e.$$

Od posebnog je interesa slučaj kada je prava l normalna na osu s i tada govorimo o ortogonalnoj projekciji (druge projekcije nazivamo kosim). Tada iz oznake za paralelnu–skalar projekciju izbacujemo oznaku za pravu l , tj. pišemo $\mathbf{pr}_s \mathbf{AB}$. Primetimo da ja paralelna projekcija na osu u uskoj vezi sa paralelnom projekcijom vektora $\mathbf{AB}$ na vektor e ose s . Na potpuno analogan način uvodimo pojmove projekcije vektora $\mathbf{AB}$ i skalar–projekcije vektora $\mathbf{AB}$ na osu s u odnosu na ravan λ . Oznake koje koristimo za paralelnu skalar–projekciju su $\mathbf{pr}_s^\lambda \mathbf{AB}$. Ako je λ ravan normalna na s , projekcije nazivamo ortogonalnim ili normalnim i za paralelnu skalar–projekciju koristimo oznaku $\mathbf{pr}_s \mathbf{AB}$.

Ispitajmo sada neke osnovne osobine paralelnog projektovanja. No, pre nego što to učinimo napomenimo da ugloj koji zahvataju vektori $\mathbf{OA}$ i $\mathbf{OB}$ nazivamo ugao AOB ,

¹⁵ Takav vektor ose možemo uvek izabrati, jer ako e nije jediničan vektor tada posmatramo vektor $e' = e/\|e\|$, koji ima intenzitet jednak 1.

a uglom koji neki vektor zahvata sa osom nazivamo ugao koji zahvataju taj vektor i jedinični vektor te ose.



Slika 9. Skalar projekcija vektora

Teorema 1. Ako vektor $\mathbf{AB}$ ravni ili prostora sa osom s zahvata ugao w , tada je

$$(8.6) \quad \text{pr}_s \mathbf{AB} = \|\mathbf{AB}\| \cos w.$$

Dokaz. Ako je $AB \parallel s$ ili $AB \perp s$ tvrđenje se dokazuje neposrednom proverom. Zato pretpostavimo da je ugao w oštar ili tup. Neka je A proizvoljna tačka ose s i sa B' obeležimo podnožje normale iz tačke B na osu s . Ugao kod temena A trougla ABB' jednak je uglu w ako je oštar, ili ga, u suprotnom, dopunjava do opruženog ugla. U prvom slučaju vektor $\mathbf{AB'}$ je istosmeran osi s (Slika 9) pa je

$$\text{pr}_s \mathbf{AB} = \|\mathbf{AB'}\| = \|\mathbf{AB}\| \cos w.$$

U drugom slučaju $\mathbf{AB'}$ je suprotnosmeran osi s (Slika 9), pa je po definiciji,

$$(8.7) \quad \text{pr}_s \mathbf{AB} = -\|\mathbf{AB'}\| = -\|\mathbf{AB}\| \cos(\pi - w) = \|\mathbf{AB}\| \cos w. \quad \square$$

U vektorskim prostorima veoma su važna preslikavanja koja se dobro ponašaju prema sabiranju vektora i množenju vektora sa skalarom. Sledeće teoreme pokazuju da paralelna projektovanja vektora imaju tu osobinu.

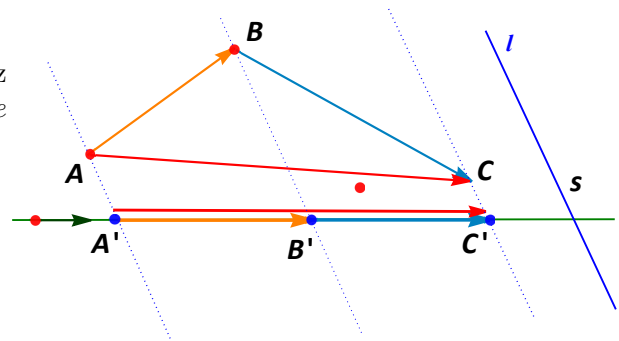
Teorema 2. Za svaka dva vektora $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BC}$ ravni, svaku osu s te ravni i svaku pravu l koja nije paralelna osi s , važi relacija

$$(8.8) \quad \text{pr}_s^l (\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) = \text{pr}_s^l \mathbf{AB} + \text{pr}_s^l \mathbf{BC}.$$

Dokaz. Ako sa A', B', C' obeležimo presečne tačke pravih kroz A, B, C paralelnih pravoj l , sa osom s (Slika 11) i neka je e jedinični vektor ose s , biće

$$\begin{aligned} (\text{pr}_s^l (\mathbf{AB} + \mathbf{BC})) e &= (\text{pr}_s^l \mathbf{AC}) e = \mathbf{A'C'} \\ &= \mathbf{A'B'} + \mathbf{B'C'} \\ &= (\text{pr}_s^l \mathbf{AB} + \text{pr}_s^l \mathbf{BC}) e, \end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje teoreme. $\square$



Slika 11. Projekcija zbira vektora

Primetimo da u dokazu prethodne teoreme ne bi bilo nikakvih promena ako bismo pretpostavili da su $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BC}$ vektori u prostoru i da je u pitanju paralelna skalar – projekcija u odnosu na ravan.

Dokaz sledeće teoreme neposredno sledi iz poznate Talesove¹⁶ teoreme i ostavljamo ga čitaocu. Napomenimo da ista teorema važi i ako je $\mathbf{AB}$ vektor u prostoru, a zadata je paralelna skalar – projekcija u odnosu na ravan.

Teorema 3. *Za svaki vektor $\mathbf{AB}$ ravni, svaku osu s , svaku pravu l koja joj nije paralelna i svaki realan broj α važi relacija*

$$\mathbf{pr}_s^l(\alpha \mathbf{AB}) = \alpha \mathbf{pr}_s^l \mathbf{AB}.$$

¹⁶ $\tau\alpha\lambda\epsilon\sigma$, Tales iz Mileta, 624–546 (?), grčki matematičar.

Literatura

1. Zorich V. A., *Matematicheskij analiz, tom 1*, Facis, 1997.
2. Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3ed, MGH 1976.
3. Fihtengol'c G. M., *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija*, Tom 1, 8 izd., FML, 2003.
4. N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić, *Analitička geometrija*, MF, 2003,
5. Z. Rakić, skripta za predmet *Linearna algebra*, MF, 2021.