

БИОМАТЕМАТИКА

— РОКОВИ —

Теорија

1. (6 п.) Дефинисати појмове: (а) лимеса низа, (б) тачке нагомилавања низа, (в) Да ли је сваки лимес низа уједно и његова тачка нагомилавања? Да ли важи и обрат?

Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.

2. (7 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

3. (4 п.) Израчунајте детерминанту следеће матрице:

$$A = \begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & b+y & z \\ x & y & c+z \end{vmatrix}.$$

Ако су a, b и c реални бројеви такви да је $abc \neq 0$, који је скуп тачака дефинисан једначином $\det A = 0$?

4. (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије n . Дефинисати појам линеарног оператора $A: V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A .

Нека је A линеарни оператор на V и нека су $a \neq b$ две међусобно различите сопствене вредности оператора A . Да ли су одговарајући сопствени вектори u (за сопствену вредност a) и w (за сопствену вредност b) линеарно независни? Да ли се ово тврђење може уопштити на k ($2 \leq k \leq n$), сопствених вектора који припадају различитим сопственим вредностима?

Задаци

1. [5 п.] Доказати да за свако $n \geq 5$ важи $2^n > n^2$.

2. [6 п.] Пронаћи лимес

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 8 + 13 + \cdots + (5n - 2)}{2n^2 + n + 1}.$$

3. [6 п.] Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

и утврдити да ли је конвергенција апсолутна или условна.

4. [7 п.] Наћи изводе следећих функција:

а) $f(x) = \sin^2(\cos x)$;

б) $g(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

5. [8 п.] Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x^2 e^{-x}$. Одредити домен функције, испитати парност, непарност и периодичност, одредити нуле и знак, асимптоте, интервале монотоности и локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке.

6. [4 п.] Пронаћи вредност несвојственог интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

- $$\begin{array}{rclcl} x & - & 2\alpha y & - & 3z & = & -2 \\ 3x & + & y & - & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 1. \end{array}$$

- ## Zadaci

- $$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

- $$f(x) = \begin{cases} \frac{(2 \cos^3 x - \cos x)(2 \sin x \cos x - \sin x - 2 \cos x + 1)}{2 \sin x \cos x - \sin x}, & x < \frac{\pi}{3}, \\ \frac{ae^{2x}}{\sin x + 2}, & x \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

- $$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) e^{\cos x}.$$

- $$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}.$$

$$\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1} dx.$$

Задаци

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) левог извода функције у тачки. Формулисати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Израчунајте детерминанту следеће матрице:

$$A = \begin{vmatrix} x & x & a+x \\ x & a+x & x \\ a+x & a & a \end{vmatrix}.$$

За које вредности од a и x матрица A није регуларна.

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 7. Дефинисати појам линеарног оператора, $A : V \longrightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Показати тврђење: $\lambda \in \mathbb{R}$ је сопствена вредност линеарног оператора A ако и само ако је λ нула карактеристичног полинома од A .

Задаци

- (4 п.) Доказати да за сваки природан број n важи

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

- (7 п.) Одредити граничну вредност низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ датог са

$$a_n = n \cdot \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right).$$

- (7 п.) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

- (5 п.) Одредити изводе функција

(а) $\arctg(\sin^2 x)$

(б) $e^{2 \cos x} \cdot \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

- (8 п.) Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2.$$

Одредити домен функције, испитати парност, непарност и периодичност, одредити нуле и знак, асимптоте, интервале монотоности и локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке.

- (5 п.) Одредити вредност одређеног интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \cdot \sin 3x \, dx.$$

Теорија

1. (6 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) лимес низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
2. (7 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
3. (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} -x + 2y - 4z &= 4 \\ x + 3\alpha y - 2z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 2. \end{aligned}$$

4. (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 5. Дефинисати појам линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Нека је A линеарни оператор на V такав да постоји база e од V која се састоји од четири сопствена вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат ?

Задаци

1. Доказати да за сваки природан број k важи

$$11 \mid 7^{4k} \cdot 3^{2k} - 5^k.$$

2. Одредити граничне вредности низова

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{2n}$

б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}).$

3. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 3n}.$$

4. Одредити извод функције

$$f(x) = \arctg x^2 \cdot \ln(\cos^2 x + 1).$$

5. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{1-x}{e^{2x}}.$$

Одредити домен функције, испитати парност, непарност и периодичност, одредити нуле и знак, асимптоте, интервале монотоности и локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке.

6. Одредити вредност неодређеног интеграла

$$\int e^{2x} \cos x dx.$$

Биоматематика

26. фебруар 2026.

Теорија

1. (6 п.) Дефинисати појмове: (а) извода функције у тачки, (б) десног лимеса функције у тачки. Формулисати и објаснити геометријски смисао Фермаове теореме.
2. (7 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Дати везу између одређеног и неодређеног интеграла. Формулисати и доказати теорему о средњој вредности за (одређене) интеграле.
3. (4 п.) Израчунајте следећу детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

4. (7 п.) Нека је V комплексан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора, $A : V \longrightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Показати тврђење: $\lambda \in \mathbb{C}$ је сопствена вредност линеарног оператора A ако и само ако је λ нула карактеристичног полинома од A .

Задаци

1. (5 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$48 \mid 7^{2n} - 1$$

2. (5 п.) Одредити тачке нагомилавања низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако је $a_n = \frac{(1+(-1)^n)n^2}{2n^2+1} + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
3. (7 п.) Решити интеграл: $\int \frac{x-1}{x^3+2x^2-5x-6} dx$
4. (6 п.) Израчунати површину lika у равни ограниченог кривама: $y = x^2 - 2x - 15$, $y = 2x - 3$, $x = -1$ и $x = 1$.
5. (7 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-3}$
6. (6 п.) Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = (p, 3, 1-p)$ заклапа једнаке углове са векторима $\vec{b} = (2, 1, -2)$ и $\vec{c} = (3, 0, 4)$. Одредити једначину равни α која садржи тачку $A(-1, 0, 1)$ и која је паралелна векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати фундаменталну везу између неодређеног и одређеног интеграла (Њутн-Лајбницева формула).
2. (1.5 п.) Решите, у зависности о реалном парамету γ , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} 2x + \gamma y - 3z &= 4, \\ -3x + 2y + z &= 5, \\ x - 3y + 2z &= -1. \end{aligned}$$

3. (1.5 п.) Израчунајте детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. (4 п.) Дефинисати појам базе векторског простора, линеарног оператора $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ и карактеристичног полинома матрице $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$. Наћи једну базу e векторског простора $\mathbb{R}^4$. Објаснити како се оператору A додељује матрица у $\mathcal{A}$ у бази e . Да ли карактеристични полином оператора A зависи од базе e .

Задаци:

1. (2 п.) Израчунати лимес: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - 3\sin x}{x^3}$
2. (4 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$
3. (3 п.) Решити интеграле: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$; б) $\int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx$
4. (3 п.) Израчунати површину lika у равни ограниченог кривама: $y = x^2 - 2x - 15$, $y = 2x - 3$ и $x = 1$.
5. (3 п.) Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = (p, 3, 1 - p)$ заклапа једнаке углове са векторима $\vec{b} = (2, 1, -2)$ и $\vec{c} = (3, 0, 4)$. Одредити једначину равни α која садржи тачку $A(-1, 0, 1)$ и која је паралелна векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Биоматематика

12. фебруар 2026.

Теорија

1. (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) левог извода функције у тачки. Формулисати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.
2. (7 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
3. (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 1 \\ x + 3y + 4z &= 5 \\ 2x - \alpha y + 4z &= -2. \end{aligned}$$

4. (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 5. Дефинисати појам линеарног оператора, $A : V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Показати тврђење: $\lambda \in \mathbb{R}$ је сопствена вредност линеарног оператора A ако и само ако је λ нула карактеристичног полинома од A .

Задаци

1. (5 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. (6 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$
3. (6 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(3x)} & , x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}}{6} & , x \geq 0 \end{cases}$$

4. (7 п.) Решити интеграл: $\int \frac{x^2+2x+4}{x^3+2x^2-x-2} dx$
5. (7 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$
6. (5 п.) Одредити једначину равни α која садржи праву $l : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-9}{3}$ и паралелна је равни $\beta : 2x + 3y + z - 5 = 0$. Израчунати угао под којим се права l сече са правом $q : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

Теорија:

1. (3 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 5, c\}$ и $B = \{a, c, d, 5\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести пример једне релације на скупу B која је истовремено рефлексивна и симетрична, као и по пример (барем једне) функције:

(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (2 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 5 различитих тачака нагомилавања.
3. (2 п.) Исказати Болцано - Кошијеву теорему. Дати њену геометријску интерпретацију и навести неке њене последице.
4. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.

Задаци:

1. (3 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. (2 п.) Израчунати лimes: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2-2} \right)^{n+2}$

3. (4 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

4. (4 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(3x)} & , x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}}{6} & , x \geq 0 \end{cases}$$

5. (2 п.) Израчунати извод функције: $f(x) = x^{x^3}$

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати фундаменталну везу између неодређеног и одређеног интеграла (Њутн-Лајбницова формула).
2. (1.5 п.) Решите, у зависности о реалном парамету β , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 7, \\ x + \beta y + z &= -3, \\ 3x - y + 2z &= 1. \end{aligned}$$

3. (1.5 п.) Израчунајте детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. (4 п.) Дефинисати појам линеарног оператора, слике и језгра линеарног оператора. Формулисати и доказати теорему о рангу и дефекту линеарног оператора.

Задаци:

1. (2 п.) Израчунати лимес: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\sin x - x}$
2. (4 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$
3. (3 п.) Решити интеграле: а) $\int \frac{x^2}{x^3 + 2026} dx$; б) $\int_1^{e^{2\pi}} \cos(\ln x) dx$
4. (3 п.) Израчунати површину lika у равни ограниченог кривама: $y = 2$, $y = x^2 - 2x - 1$, $x = 0$ и $x = 3$.
5. (3 п.) Дати су вектори $\vec{a} = (p, 0, 0)$ и $\vec{b} = (1, 1, p)$. Одредити параметар p уколико је угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак $\frac{\pi}{3}$.

Теорија:

1. (3 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 5, c\}$ и $B = \{a, c, d, 5\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести пример једне релације на скупу B која је истовремено рефлексивна и симетрична, као и по пример (барем једне) функције:

(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (2 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 5 различитих тачака нагомилавања.
3. (2 п.) Исказати Болцано - Кошијеву теорему. Дати њену геометријску интерпретацију и навести неке њене последице.
4. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.

Задаци:

1. (3 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n+3) \cdot (n+4)} = \frac{n+3}{n+4}$$

2. (2 п.) Израчунати лimes: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2})$

3. (4 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n - 1}{n!}$

4. (4 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{e^{-x^2}-1} & , x < 0 \\ -1 & , x = 0 \\ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x & , x > 0 \end{cases}$$

5. (2 п.) Израчунати извод функције: $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{(\cos x)^2}$

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Писмени испит из Биоматематике, рок септембар 2, 23.10.2025.

- 1.** (10 поена) Математичком индукцијом доказати да за сваки природан број $n \geq 1$ важи:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

- 2.** (12 поена) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n - 2} \right)^{n^2}.$$

- 3.** (14 поена) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} + (-1)^n.$$

- 4.** (18 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

- 5.** (16 поена) Одредити следећи интеграл $\int \frac{6x + 5}{x^3 + 4x^2 + 3x} dx$.

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Писмени испит из Биоматематике, рок септембар 1, 16.10.2025.

1. (10 поена) Математичком индукцијом доказати да за сваки природан број $n \geq 1$ важи:

$$5 \mid 3 \cdot 6^n + 2.$$

2. (12 поена) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 4}.$$

3. (14 поена) Испитати непрекидност следеће функције и одредити тип тачака прекида (уколико постоје):

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}, x < 0; e^{x^2+x+1}, x = 0; (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{x}}, x > 0.$$

4. (18 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5. (16 поена) Одредити следећи интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(2x) dx$.

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Писмени испит из Биоматематике, рок септембар 1, 15.10.2025.

- 1.** (10 поена) Математичком индукцијом доказати да за сваки природан број $n \geq 1$ важи:

$$\sqrt{1^3 + 2^3 + \dots + n^3} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- 2.** (12 поена) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-3}{n+3} \right)^{n(n+3)}.$$

- 3.** (14 поена) Испитати непрекидност следеће функције и одредити тип тачака прекида (уколико постоје):

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, x < 0; \frac{x-1}{x^2-2}, x = 0; \frac{\ln(1+2x)}{4x}, x > 0.$$

- 4.** (18 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

- 5.** (16 поена) Одредити следећи интеграл $\int \frac{5x+3}{x^3+3x^2+2x} dx$.

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Писмени испит из Биоматематике, рок јун 2, 2.10.2025.

1. (10 поена) Математичком индукцијом доказати да за сваки природан број $n \geq 1$ важи:

$$3 \mid 5^{n-1} + 2^n.$$

2. (12 поена) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+5}{n^2-n}.$$

3. (14 поена) Испитати непрекидност следеће функције и одредити тип тачака прекида (уколико постоје):

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x}, x < 0; \frac{2 \sin(2x)}{x}, x = 0; (2x+1)^{\frac{1}{x}}, x > 0.$$

4. (18 поена) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 6}.$

5. (16 поена) Одредити следећи интеграл $\int \frac{2x+7}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx.$

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Писмени испит из Биоматематике, рок јун 1, 25.09.2025.

1. а) (6 поена) Математичком индукцијом доказати да за сваки природан број $n \geq 1$ важи:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

- б) (6 поена) Израчунати: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{2n+3}{5} \right) \frac{1}{n^2}.$

2. (10 поена) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n+7} \right)^{n(n-3)}.$$

3. (18 поена) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}.$

4. (14 поена) Одредити интеграл: $\int x \ln^2 x \, dx$

5. (16 поена) Скицирати и израчунати површину lika у равни ограниченог са три дате криве:

$$y = x^2 - 9, \quad y = -x^2 + 2x + 15, \quad x = 2$$

.

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Писмени испит из Биоматематике, рок јануар 2, 19.09.2025.

1. Израчунати:

(а) (6 поена) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{5x}}{\sin(7x)}$

(б) (6 поена) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} \right)^x$

2. (12 поена) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{3} \right)^n \frac{1}{n!}.$$

3. (18 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

4. Одредити следеће интеграле:

(а) (4 поена) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(б) (8 поена) $\int e^x \sin x dx.$

5. (16 поена) Скицирати и израчунати површину лика у равни ограниченог са три дате криве:

$$y = x^2 - 9, \quad y = -x^2 + 2x + 15, \quad x = 2$$

.

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Писмени испит из Биоматематике, рок јануар 2, 18.09.2025.

1. (10 поена) Математичком индукцијом доказати да за сваки природан број $n \geq 1$ важи:

$$3 \mid n(n+1)(n+5).$$

2. (14 поена) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је

$$a_n = \frac{(1 + (-1)^n)n^3}{4n^3 + 1} + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

3. (12 поена) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2n+1} \right)^n.$$

4. (18 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$.

5. Израчунати следеће интеграле:

(а) (6 поена) $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$

(б) (10 поена) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x) dx.$

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
Писмени испит из Биоматематике, рок јануар 1, 04.09.2025.

- 1.** (а) (6 поена) Математичком индукцијом доказати да за сваки природан број $n \geq 2$ важи:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

- (б) (6 поена) Одредити граничну вредност низа са општим чланом

$$a_n = \sqrt{n^2 + 4n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

- 2.** (10 поена) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+4}{n+9}\right)^{n(n+5)}.$$

- 3.** (14 поена) Испитати непрекидност следеће функције и одредити тип тачака прекида (уколико постоје):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{x}, & x < 0 \\ x^2 + x + 3, & x = 0 \\ \frac{2 \sin(3x)}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

- 4.** (18 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

- 5.** (16 поена) Одредити следећи интеграл $\int \frac{x^2 + 2}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$.

Биоматематика

19. септембар 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) лимес низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} -x + 2y - 4z &= 4 \\ x + 3\alpha y - 2z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 2. \end{aligned}$$

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A .
Нека је A линеарни оператор на V такав да постоји база e од V која се састоји од четири сопствена вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат ?

Задаци

- (5 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $6|n(n^2 - 1)$
- (6 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - \sqrt{1-4x}}{x} & , x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{\tan(x-1) - \sin(x-1)}{(x-1)^3} & , x > 1 \end{cases}$$

- (6 п.) Скицирати и израчунати површину lika у равни ограниченог кривама: $y = |x|, y = (x+2)^2 - 4, y \in [-4, 4]$
- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x}{1+\ln x}$
- (5 п.) Дати су вектори $\vec{a} = (-2, 1, r)$ и $\vec{b} = (1, p, q)$. Одредити параметре r, p и q уколико је познато да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ међусобно колинеарни и да је $\|\vec{a}\| = 3$.
- (5 п.) Одредити једначину равни α која садржи праву $p : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{-2}$ и нормална је на праву $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$. Израчунати растојање тачке $A(1, -2, 1)$ од равни α и одредити бар три тачке које припадају равни α .

Биоматематика

29. август 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) лimes низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Израчунајте детерминанту следеће матрице:

$$A = \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}.$$

Ако су a, b, c једнаки 1 за које вредности параметра x матрица A није регуларна.

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 3. Дефинисати појам линеарног оператора $A: V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A .
Нека је A линеарни оператор на V такав да постоји база $\mathbf{e}$ од V која се састоји од три сопствена вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат?

Задаци

- (5 п.) Користећи математичку индукцију доказати да је за све $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n} - 1$$

- (5 п.) Испитати конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{(n^2+3n)}$
- (6 п.) Решити одређен интеграл: $\int_2^e \frac{x^2+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$
- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-1}$
- (5 п.) Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = p\vec{i} + (1-p)\vec{j} + 2\vec{k}$ заклапа угао од 30° са вектором $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$.
- (6 п.) Одредити пресек правих $p: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+3}{-2}$ и $q: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{1}$, а потом одредити једначину равни α која их садржи. Израчунати растојање тачке $A(7, 6, 1)$ од равни α .

Биоматематика

24. јун 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) тачке нагомилавања низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{array}{rclcl} -x & + & 2y & - & 4z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 4\alpha y & - & z & = & -3. \end{array}$$

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора $A : V \longrightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A .
Нека је A линеарни оператор над V такав да постоји база $\mathbf{e}$ од V која се састоји од сопствених вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат ?

Задаци

- (5 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи: $25 \mid 4 \cdot 6^n + 5n - 4$.
- (6 п.) Одредити параметре a и b тако да функција буде непрекидна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{ax^2} & , x < 0 \\ \frac{1}{3} & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{bx-b} & , x > 1 \end{cases}$$

- (6 п.) Решити одређен интеграл: $\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} \frac{x-5}{x^3-x} dx$
- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}$
- (5 п.) Да ли су тачке $A(1, 2, 0)$, $B(2, 3, 3)$, $C(-3, 1, 4)$ и $D(2, 1, -2)$ компланарне? Уколико нису, израчунати запремину тетраедра $ABCD$.
- (5 п.) Одредити једначину праве p која садржи тачку $A(2, 0)$ и сече праву $q : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1}$ под углом од $\frac{\pi}{3}$.

Биоматематика

11. јун 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) тачке нагомилавања низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{array}{rclcl} -x & + & 2y & - & 4z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 4\alpha y & - & z & = & -3. \end{array}$$

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора $A: V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A .
Нека је A линеарни оператор над V такав да постоји база e од V која се састоји од сопствених вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат?

Задаци

- (5 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$1 + 25 + 625 + \dots + 5^{2n-2} = \frac{5^{2n} - 1}{5^2 - 1}$$

- (6 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+1}{n^2-3}$

- (6 п.) Решити одређен интеграл: $\int_0^{\pi} \sin(2x) e^{5x} dx$

- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x}$

- (5 п.) Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = p\vec{i} + (2-p)\vec{j} + \vec{k}$ заклапа угао од 60° са вектором $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

- (5 п.) Одредити једначину равни α која садржи праву $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{3}$ и нормална је на праву $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$. Израчунати растојање тачке $A(1, 1, 1)$ од равни α и одредити бар три тачке које припадају равни α .

Биоматематика

6. фебруар. 2024.

Теорија

- (7 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) извода функције у тачки. Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.
- (6 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Навести основна својства неодређеног интеграла и формулисати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Израчунајте детерминанту следеће матрице:

$$A = \begin{vmatrix} x & x & a+x \\ x & a+x & x \\ a+x & a & a \end{vmatrix}.$$

За које вредности од a и x матрица A није регуларна.

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора, $A : V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Показати тврђење: $\lambda \in \mathbb{R}$ је сопствена вредност линеарног оператора A ако и само ако је λ нула карактеристичног полинома од A .

Задаци

- (5 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи: $5 \mid 8^n - 3^n$.
- (6 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-e^{3x}}{x} & , x < 0 \\ 3 & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{\sin(3x-3)}{\tan(x-1)} & , x > 1 \end{cases}$$

- (6 п.) Решити интеграл: $\int \frac{\sqrt{1+7x}}{1-\sqrt[3]{1+7x}} dx$
- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$
- (5 п.) Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = p\vec{i} + 2\vec{j} + (1+p)\vec{k}$ заклапа једнаке углове са векторима $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.
- (5 п.) Одредити једначину равни α која садржи тачке $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 2, 2)$ и $C(3, 1, 5)$. Колика је површина троугла ABC ?

Биоматематика

18. јануар. 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) левог извода функције у тачки. Формулисати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}3x - y - 2z &= 1 \\x + 3y + 4z &= 5 \\2x - \alpha y + 4z &= -2.\end{aligned}$$

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 5. Дефинисати појам линеарног оператора, $A : V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Показати тврђење: $\lambda \in \mathbb{R}$ је сопствена вредност линеарног оператора A ако и само ако је λ нула карактеристичног полинома од A .

Задаци

- (5 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи: $3^n \leq (n+2)!$
- (5 п.) Наћи све тачке нагомилавања низа (a_n) , ако је $a_n = \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-1}\right)^3 + A \cos(n\pi)$. Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.
- (7 п.) Решити интеграл: $\int \frac{x^2+4x-11}{x^3-3x^2+x-3} dx$
- (6 п.) Скицирати и израчунати површину lika у равни ограниченог кривама: $y = x - 1$ и $y = x^2 - 3x - 1$
- (7 п.) Одредити угао под којим се секу праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{1}$ и $q : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Навести пример и написати једначину бар једне праве r која сече дате праве p и q .
- (6 п.) Одредити једначину равни α која садржи праву $l : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{4}$ и паралелна је равни $\beta : x + 6y + z - 4 = 0$. Израчунати растојање тачке $A(2, 1, 3)$ од равни β .

Теорија

1. (3 п.) Дефинисати појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати фундаменталну везу између неодређеног и одређеног интеграла (Њутн-Лајбницава формула).
2. (2 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}x - 2y - z &= 2, \\ 2x + 3y - z &= -1, \\ \alpha x + 2y + 4z &= 3.\end{aligned}$$

3. (2 п.) Израчунајте детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -5 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. (3 п.) Дефинисати појам линеарног оператора, слике и језгра линеарног оператора. Формулисати и доказати теорему о рангу и дефекту линеарног оператора.

Задаци

1. (2 п.) Решити одређен интеграл: $\int_0^3 x^2 e^x dx$.
2. (3 п.) Решити интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x} - \sqrt[3]{1-3x}}.$
3. (2 п.) Одредити једначину равни која садржи тачку $P(1, 0, 3)$ и нормална је на праву $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{3}.$
4. (3 п.) Дати су вектори $\vec{a} = (r, -1, 1)$ и $\vec{b} = (1, p, q)$. Одредити параметре r , p и q уколико је познато да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ међусобно колинеарни и да је $\|\vec{a}\| = 2$.
5. (5 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x.$

Теорија

- (3 п.) Нека су дати скупови: $A = \{5, a, 2, q\}$ и $B = \{a, 2, r\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести пример једне симетрична релације на скупу A , као и по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 – 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 – 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (2 п.) Дефинисати појам реда и суме реда. Доказати неопходан услов конвергенције реда. Дефинисати геометријски и хармонијски ред. Доказати услов конвергенције геометријског реда.
- (2 п.) Исказати Болцано – Кошијеву теорему. Дати њену геометријску интерпретацију и навести неке њене последице.
- (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.

Задаци:

- (3 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи: $6 \mid (n + 1)^3 - n^3 - 1$.
- (2 п.) Израчунати лимес: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n-1} - \sqrt[3]{n+1}$.
- (4 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{n(n+1)}$.
- (3 п.) Без коришћења Лопиталовог правила израчунати $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{3\pi}{2}x)}{1-\sqrt{x}}$.
- (3 п.) Одредити домен, а потом израчунати извод функције $g(x) = \arcsin \frac{x}{1+x}$.

Теорија

1. (3 п.) Дефинисати неодређени интеграл. Формулисати и доказати фундаменталну везу између неодређеног и одређеног интеграла (Њутн-Лајбницова формула).
2. (1.5 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= 1, \\ x + 7y + \alpha z &= -2, \\ x + 2y + 4z &= 9.\end{aligned}$$

3. (1.5 п.) Израчунајте детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 3 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. (4 п.) Дефинисати појам линеарног оператора, слике и језгра линеарног оператора. Формулисати и доказати теорему о рангу и дефекту линеарног оператора.

Задаци

1. (2 п.) Израчунати лимес: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{3x^3}$
2. (2 п.) Решити одређен интеграл: $\int_0^1 \frac{t}{t^2 + 2023} dt$
3. (3 п.) Дате су тачке $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 3, 1)$ и $C(7, 7, 0)$. Одредити координате тачке D тако да четвороугао $ABCD$ буде паралелограм. Израчунати површину тог паралелограма.
4. (3 п.) Дати су вектори $\vec{a} = (1, -2, 1)$ и $\vec{b} = (p, 1, q)$. Одредити параметре p и q уколико је познато да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ међусобно нормални и да је $\|\vec{b}\| = 5$.
5. (5 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 7}$

Теорија

1. (3 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 3, b, d\}$ и $B = \{a, b, 2\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести пример једне рефлексивне релације на скупу A , као и по пример (барем једне) функције:

(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (2 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 4 различитих тачака нагомилавања.
3. (2 п.) Исказати Болцано – Кошијеву теорему. Дати њену геометријску интерпретацију и навести неке њене последице.
4. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.

Задаци:

1. (3 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

2. (2 п.) Израчунати лimes: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} \right)^n$

3. (4 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{n(n+1)}$

4. (4 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1-3x}}{x} & , x < 0 \\ \frac{\sin 5x}{x \cos 2x} & , 0 \leq x < \frac{\pi}{5} \\ 0 & , x \geq \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

5. (2 п.) Израчунати извод функције: $f(x) = e^x x^3 (7x + 1)$

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{X, a, 2\}$ и $C = \{2, 4, 7, X\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times C$ и $C \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
 (а) $f : A \longrightarrow C$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow C$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
 Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) извода функције у тачки.
 Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
- (8 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци:

- (6п) Методом математичке индукције доказати да за сваи природан број $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3n+1}}$$

- (6п) Одредити тачке нагомилавања низа $a_n = \frac{n^2 + (-1)^{n+1}n + 4}{(2 + (-1)^n)n^2 + 6n - 2} + 4 \cos \frac{n\pi}{2}$.

- (4п) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2021n + 2020}$.

- (4п) Испитати непрекидност функције $g(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^5 - e^x}{x}, & x < 0; \\ \frac{x^2 - 16}{x-4}, & 0 \leq x < 4; \\ \sqrt{x^2 + 9} - 2, & x \geq 4. \end{cases}$

- (8п) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$.

- (8п) Израчунати $\int \frac{x}{x^3 - x^2 + 5x - 5} dx$.

Теорија:

- (3п) Нека су дати скупови: $A = \{2, 3\}$ и $B = \{a, 3, d\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести барем један пример функције:
 (а) $f: A \rightarrow B$, која је '1-1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \rightarrow A$ која је и '1-1' и 'на'.
 Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (3п) Дефинисати појам реда. Када геометријски ред конвергира ?
- (4п) Дефинисати појам непрекидности функције у тачки. Формулисати и доказати Болцано-Кошијеву теорему за непрекидне функције.

Задаци:

- (3п) Доказати да за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$ важи $1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + \dots + n(n+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$.
- (3п) Израчунати $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 - 2} \right)^{\frac{2n^2}{n+1}}$.
- (2п+2п) Испитати конвергенцију редова:
 а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^{n+2}}$, б) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 2021}$. (условну и апсолутну).
- (3п+2п) Израчунати лимесе функција:
 а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{tg} x}$.

Теорија:

- (3 п.) Дефинисати појам екстремне вредности непрекидне функције. Дефинисати извод функције у тачки. Наћи екстремне вредности функције $f(x) = x^2 - 7x + 12$.
- (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.
- (4 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци:

- (3п) Користећи Лопиталова правила, израчунати $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.
- (3п) Израчунати извод функције $f(x) = x^{e^x}$.
- (6п) Наћи асимптоте и испитати монотоност функције $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}$.
- (3п) Израчунати $\int x \sin x \cos x dx$.

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = x^3$. Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци:

1. (3п) Одредити $A \in \mathbb{R}$ такав да функција $g(x) = \begin{cases} A - \cos x, & x \leq 0; \\ x^2 \ln x, & x > 0. \end{cases}$ буде непрекидна.
2. (3п) Израчунати извод функције $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.
3. (5п) Наћи асимптоте и испитати монотоност функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$.
4. (4п) Израчунати $\int 3^x \cos x dx$.

Први колоквијум из Биоматематике - 18.04.2021. године

Теорија:

1. (3п) Нека су дати скупови: $A = \{5, a, b\}$ и $B = \{a, 3\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \rightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \rightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
2. (3п) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 5 различитих тачака нагомилавања.
3. (4п) Навести локална својства непрекидних функција у тачки, формулисати и доказати Болцано - Кошијеву теорему.

Задаци:

1. (4п) Математичком индукцијом доказати да за све природне бројеве n важи $9 \mid 4^{n+1} + 6n + 5$.
2. (3п) Доказати да је низ $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ монотон и ограничен, а затим одредити његову граничну вредност.
3. (2п+2п) Испитати конвергенцију редова:
а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{18n+4} + 2021}{n}$, б) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n \cdot 2^{2n+3}}$. (условну и апсолутну).
4. (2п+2п) Израчунати лimesе функција:
а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - x^2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)^4}{\sin x}$.

Теорија:

1. (15 п.) Нека су дати скупови: $A = \{Y, W, 3\}$ и $D = \{2, 3, 7, W\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times D$ и $D \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow D$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow D$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
2. (15 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности низа, (б) извода функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.
3. (15 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци:

1. (13 п.) Доказати да за сваки природан број n важи једнакост

$$1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. (13 п.) Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 4} \right)^x.$

3. (13 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}.$$

4. (13 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Одредити домен функције, испитати парност, непарност и периодичност, одредити нуле и знак, асимптоте, интервале монотоности и локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке.
5. (13 п.) Израчунати вредност неодређеног интеграла

$$\int e^x \sin x dx.$$

Време за рад је 180 минута.

Теорија:

1. (15 п.) Нека су дати скупови: $A = \{W, 3\}$ и $D = \{b, 7, a, \}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times D$ и $D \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow D$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow D$, која је 'на', (в) $h : D \longrightarrow D$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
2. (15 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) извода функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (15 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци:

1. [10] Доказати да за свако $x \geq -1$ и за сваки природан број n важи неједнакост

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

2. [10] Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{n^2+3n+2} \right)^n.$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\sqrt[n]{\ln(n+3)} \right)}{n^2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{\sqrt{25+x^3}-5}.$

3. [10] Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+2}{n+1}.$$

4. [10] Испитати непрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{x^2}}{2x^2}, & x < 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Уколико у некој тачки постоји прекид, одредити да ли је у питању отклоњив прекид, прекид прве врсте или прекид друге врсте.

5. [10] Израчунати извод следећих функција

а) $f(x) = \cos(e^{\sin x})$

б) $g(x) = \frac{x^2-3}{\cos x}$

в) $h(x) = x^2 \ln(\arcsin x)$

6. [10] Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Одредити домен функције, испитати парност, непарност и периодичност, одредити нуле и знак, асимптоте, интервале монотоности и локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке.

Теорија

- (8 п.) Нека су дати скупови: $C = \{Y, Z\}$ и $D = \{2, 5, 7, 8\}$. Одредити Декартов производ скупова $C \times D$ и $D \times C$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : C \longrightarrow D$, која је '1 - 1', (б) $g : C \longrightarrow D$, која је 'на', (в) $h : D \longrightarrow D$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) извода функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
- (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- (6 поена) Методом математичке индукције доказати неједнакост $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{2}{n^2}$ за сваки природан број $n \geq 2$.
- (6 поена) Применом теореме о полицајцима доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos n}{n+1} = 1$.
- (6 поена) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+2}$.
- (6 поена) Одредити извод функције $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.
- (6 поена) Одредити домен и испитати монотоност функције $f(x) = e^{\frac{x+2}{x-1}}$. Да ли ова функција поседује локалне екстремуме?
- (6 поена) Израчунати одређени интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2x - 1) \sin(3x) dx$.

Теорија:

1. (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 5\}$ и $B = \{b, c, f\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
2. (8 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки (б) извода функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
3. (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци:

1. (6 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}$.
2. (6 поена) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције $f(x) = \operatorname{sgn}(2x)$.
3. (6 поена) Одредити извод функције $f(x) = \arcsin \sqrt[3]{1-x^2}$.
4. (6 поена) Одредити домен и асимптоте функције $f(x) = (x+5)e^{\frac{1}{x-1}}$.
5. (6 поена) Израчунати неодређени интеграл $\int \frac{x-3}{x^3-x} dx$.
6. (6 поена) Израчунати површину lika ограниченог линијама $y = \ln(x)$, $x = 1$ и $x = 4$.

Поправни први колоквијум из Биоматематике, 12.06.2019.

Задаци:

1. (4 поена) Методом математичке индукције доказати да $25 \mid 4 \cdot 6^n + 5n - 4$ за сваки природан број n .
2. (4 поена) Одредити све тачке нагомилавања низа $\frac{n^2 \sin \frac{n\pi}{2} + n}{7n^2 + 2019}$.
3. (4 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n - 1} \right)^{n^2}$.
4. (3 поена) Израчунати граничне вредности:
а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1} + 9^{n+1}}{5^n + 9^n}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} 18x \cdot \operatorname{ctg}(85x)$.

Теорија:

1. (4 поена) Дефинисати појам непрекидности функције у тачки. Формулисати и доказати Болцано-Кошијеву теорему за непрекидне функције.
2. (3 поена) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = x^4$. Навести основна алгебарска својства извода (без доказа).
3. (3 поена) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.

Задаци:

1. (3 поена) Одредити могуће вредности константе $a \in \mathbb{R}$ тако да функција $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{за } x \leq 0; \\ \frac{1 - \cos x}{ax^2} & \text{за } x > 0 \end{cases}$ буде непрекидна на $\mathbb{R}$.
2. (2 поена) Израчунати извод функције $f(x) = \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
3. (7 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}$.
4. (3 поена) Израчунати интеграл $\int x^2 \ln^2 x \, dx$.

Теорија:

1. (4 поена) Нека су дати скупови: $A = \{3, a, b\}$ и $B = \{b, 3\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести по пример (барем једне) функције:

(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (4 поена) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 4 различите тачке нагомилавања.

3. (2 поена) Дефинисати појам реда. Када геометријски ред конвергира ?

Задаци:

1. (4 поена) Методом математичке индукције доказати једнакост $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ за сваки природан број n .
2. (4 поена) Одредити све тачке нагомилавања низа $\frac{n^2 \cos \frac{n\pi}{2} + n}{3n^2 + 4}$.
3. (4 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}$.
4. (3 поена) Израчунати граничне вредности:
а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^3 + 6x^2 - 9x + 4}{3x^3 - 2019}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{tg(4x)}$.

Јулски испитни рок из Биоматематике, 25.06.2018.

Теорија:

1. (8 поена) Нека су дати скупови $A = \{2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 7\}$. Одредите Декартов производ скупова $A \times B$, $B \times A$ и $A \times B \cap B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \rightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на',
(в) $h: B \rightarrow B$ која је '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
2. (8 поена) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.
3. (8 поена) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницева формула).

Задаци:

1. а) (6 поена) Методом математичке индукције доказати да за сваки природан број $n \geq 3$ важи $(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{2}{n}$.
б) (3 поена) Одредити граничну вредност низа са општим чланом $\sqrt{n^2 + 3n} \cdot (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{n})$.
2. (6 поена) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5^n}$.
3. а) (4 поена) Испитати непрекидност функције $\frac{\sin(2x)}{x}$ у тачкама $x = 0$ и $x = 1$.
б) (4 поена) Израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\operatorname{tg}(x)}$.
4. (7 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.
5. (6 поена) Израчунати интеграл $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Јунски испитни рок из Биоматематике, 16.06.2018.

Теорија:

1. (8 поена) Нека су дати скупови $A = \{a, g, h\}$ и $B = \{2, 5\}$. Одредите Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \rightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на', (в) $h: B \rightarrow B$ која је '1 - 1' и 'на'. (г) Дефинисати појам композиције функција, а затим израчунати функцију $h \circ h$, где је h функција из (в) дела задатка.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
2. (8 поена) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
3. (8 поена) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницева формулу).

Задаци:

1. (6 поена) Методом математичке индукције доказати да за сваки природан број n важи $25 \mid 4 \cdot 6^n + 5n - 4$.
2. (6 поена) Доказати да је низ са општим чланом $b_n = \frac{1}{2n^2-n} + \frac{1}{2n^2-n+1} + \frac{1}{2n^2-n+2} + \dots + \frac{1}{2n^2+n-1} + \frac{1}{2n^2+n}$ конвергентан и одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
3. (6 поена) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+2}$.
4. (6 поена) Одредити константу $A \in \mathbb{R}$ тако да је функција
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{\sqrt{x^2+9}-3} & \text{за } x \neq 0 \\ A & \text{за } x = 0 \end{cases}$$
 непрекидна.
5. (6 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $f(x) = \frac{e^x}{x^2-x+1}$.
6. (6 поена) Израчунати несвојствени интеграл $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$.

Поправни други колоквијум из Биоматематике, 08.06.2018.

Теорија

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачци, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = x^4$. Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати, објаснити геометријски смисао и доказати Лагранжову теорему о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла и формулисати Фундаменталну теорему интегралног рачуна (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци:

1. (3 поена) Испитати непрекидност и врсте прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^x-1}{x} & \text{за } x < 0 \\ \ln(x+2) & \text{за } 0 \leq x \leq e-2 \\ \frac{\ln(1+x)}{2x} & \text{за } x > e-2 \end{cases}$$

2. (3 поена) Израчунати извод функције $f(x) = e^x \cdot \arctg(x) - x^x$.
3. (2 поена) Одредити граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{3x} - \frac{1}{e^{3x}-1})$.
4. (5 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.
5. (2 поена) Израчунати интеграл $\int x \arcsin(x) dx$.

Други колоквијум из Биоматематике, 26.05.2018.

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = \cos x$.
Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла.

Задаци:

1. (3 поена) Испитати непрекидност и врсте прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} 4 \frac{1-\cos(x)}{x^3} & \text{за } x < 0 \\ 0 & \text{за } x = 0 \\ \frac{(1+x)^3 - 1}{x} & \text{за } 0 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 + 7} + 5x + 2 & \text{за } x \geq 3 \end{cases}$$

2. (3 поена) Израчунати извод функције $f(x) = x^2 \tan(e^x) + \frac{\sin(3x)}{\ln(x)}$.
3. (2 поена) Одредити граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(\sin(x))$.
4. (5 поена) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$.
5. (2 поена) Израчунати интеграл $\int e^x \sin(x) dx$.

Први колоквијум из Биоматематике, 14.04.2018.

Теорија:

1. (4 поена) Нека су дати скупови $A = \{2, a, b\}$ и $B = \{b, 1, 3\}$. Одредити Декартове производе $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести по један пример функције:

(а) $f: A \rightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \rightarrow A$ која је '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји, образложити одговор !

2. (3 поена) Дефинисати појам лимеса (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лимеса и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 5 различитих тачака нагомилавања.
3. (3 поена) Дефинисати појам уметнутих сегмената, формулисати и доказати њихово основно својство.

Задаци:

1. (4 поена) Методом математичке индукције доказати да за сваки природан број n важи једнакост $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.
2. (4 поена) Доказати да је низ са општим чланом $b_n = \frac{\sin(3^n \cdot \ln(2n+1) + n^3 + 4)}{n^2}$ конвергентан и одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
3. (4 поена) Испитати конвергенцију реда са позитивним члановима $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$.
4. (3 поена) Израчунати граничне вредности:
- а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x - 4}{-2x^2 - 7x + 8}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x})$

Теорија

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{X, W, 1\}$ и $D = \{1, 3, 9, X\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times D$ и $D \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
 (а) $f : A \longrightarrow D$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow D$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
 Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) извода функције у тачки.
 Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
- (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n\pi} 2^n}{n!^2}$.
- Испитати непрекидност функције

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < -1; \\ \cos \frac{\pi}{2}x, & -1 \leq x \leq 1; \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

- Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
- Одредити површину ограничену кривама $x = y^2$ и $x^2 + 3y^2 = 4$.

Теорија

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{X, W, 1\}$ и $D = \{1, 3, 9, X\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times D$ и $D \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
 (а) $f : A \longrightarrow D$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow D$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
 Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) извода функције у тачки.
 Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
- (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n\pi} 2^n}{n!^2}$.
- Испитати непрекидност функције

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < -1; \\ \cos \frac{\pi}{2}x, & -1 \leq x \leq 1; \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

- Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
- Одредити површину ограничену кривама $x = y^2$ и $x^2 + 3y^2 = 4$.

Теорија

- 1.
- 2.
- 3.

Задаци

1. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+1)}$.
2. Одредити грничну вредност $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln(1+t) + 1 - \cos t}{t^2}$.
3. Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$.
4. Израчунати $\int \frac{6t^2 - 5t + 31}{t^3 - 3t^2 + 5t - 15} dt$.

Теорија

- 1.
- 2.
- 3.

Задаци

1. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+1)}$.
2. Одредити грничну вредност $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln(1+t) + 1 - \cos t}{t^2}$.
3. Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$.
4. Израчунати $\int \frac{6t^2 - 5t + 31}{t^3 - 3t^2 + 5t - 15} dt$.

Теорија

1. (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 5, X, 7\}$ и $B = \{7, X, Y\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:

(а) $f: A \rightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \rightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (8 п.) Дефинисати појмове: (а) левог и десног извода функције у тачки. (б) извода функције у тачки. (в) локалних екстрема непрекидне функције.

Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме (о потребним условима за егзистенцију локалног екстрема).

3. (8 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла, као и основне методе интегралења. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{4n+2} - \sqrt{4n})$.
- Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} \cos x + \sqrt{3}, & x \leq 0; \\ \frac{(1+x)^{\sqrt{3}}}{x}, & x > 0. \end{cases}$
- Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- Одредити површину lika у равни ограниченог кривама $y = x$ и $y = x^3$.

Теорија

1. (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 5, X, 7\}$ и $B = \{7, X, Y\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:

(а) $f: A \rightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \rightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (8 п.) Дефинисати појмове: (а) левог и десног извода функције у тачки. (б) извода функције у тачки. (в) локалних екстрема непрекидне функције.

Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме (о потребним условима за егзистенцију локалног екстрема).

3. (8 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла, као и основне методе интегралења. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{4n+2} - \sqrt{4n})$.
- Испитати непрекидност функције $f(x) = \begin{cases} \cos x + \sqrt{3}, & x \leq 0; \\ \frac{(1+x)^{\sqrt{3}}}{x}, & x > 0. \end{cases}$
- Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- Одредити површину lika у равни ограниченог кривама $y = x$ и $y = x^3$.

Теорија

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = \cos x$.
Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

1. Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2}$.
2. Одредити вредност неодређеног интеграла $\int \frac{4x^2 + x + 10}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$.
3. Израчунати

$$(a) \int_0^{\pi} 3^x \sin 2x dx$$

$$(b) \int_{-\infty}^0 (x^2 + 1)e^x dx$$

Теорија

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = \cos x$.
Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

1. Детаљно испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2}$.
2. Одредити вредност неодређеног интеграла $\int \frac{4x^2 + x + 10}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$.
3. Израчунати

$$(a) \int_0^{\pi} 3^x \sin 2x dx$$

$$(b) \int_{-\infty}^0 (x^2 + 1)e^x dx$$

Теорија

- (4 п.) Нека су дати скупови: $A = \{7, a, x\}$ и $B = \{x, 7\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \rightarrow B$, која је '1-1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \rightarrow A$ која је и '1-1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (3 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 5 различитих тачака нагомилавања.
- (3 п.) Исказати и доказати Болцано-Кошијеву теорему. Користећи Болцано-Кошијеву теорему показати да полином $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ има барем једну реалну нулу.

Задаци

- Математичком индукцијом показати да за све природне бројеве важи: $2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 9n + 1)$.
- Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{\frac{(n+1)^2}{9}}$.
- Одредити константу L тако да функција $f(x)$ буде непрекидна у тачки $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{e^x - 1}, & x < 0; \\ L, & x = 0; \\ \frac{6 \operatorname{tg} x}{\ln(1+3x)}, & x > 0. \end{cases}$$

- Израчунати извод функције

$$(a) f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{\ln(x+2)} \qquad (b) g(x) = \operatorname{arctg} x^2 \cos x$$

Теорија

- (4 п.) Нека су дати скупови: $A = \{7, a, x\}$ и $B = \{x, 7\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \rightarrow B$, која је '1-1', (б) $g: A \rightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \rightarrow A$ која је и '1-1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (3 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 5 различитих тачака нагомилавања.
- (3 п.) Исказати и доказати Болцано-Кошијеву теорему. Користећи Болцано-Кошијеву теорему показати да полином $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ има барем једну реалну нулу.

Задаци

- Математичком индукцијом показати да за све природне бројеве важи: $2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 9n + 1)$.
- Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{\frac{(n+1)^2}{9}}$.
- Одредити константу L тако да функција $f(x)$ буде непрекидна у тачки $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{e^x - 1}, & x < 0; \\ L, & x = 0; \\ \frac{6 \operatorname{tg} x}{\ln(1+3x)}, & x > 0. \end{cases}$$

- Израчунати извод функције

$$(a) f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{\ln(x+2)} \qquad (b) g(x) = \operatorname{arctg} x^2 \cos x$$

Биоматематика, јулски рок, 18.07.2014.

Теорија:

1. (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 3, Y\}$ и $B = \{2, X, Y\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и скуп $(A \times B) \cap (B \times A)$. Навести по пример (барем једне) функције:

(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (8 п.) Дефинисати појмове: (а) левог и десног извода функције у тачки. (б) непрекидности функције у тачки. (в) локалног минимума непрекидне функције.

Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.

3. (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницева формулу).

Задаци

1. (8 п.) Израчунати граничну вредност низа $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-1)}$.
2. (8 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^3-3}}$.
3. (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.
4. (8 п.) Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, dx$.

Биоматематика, јулски рок, 18.07.2014.

Теорија:

1. (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 3, Y\}$ и $B = \{2, X, Y\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и скуп $(A \times B) \cap (B \times A)$. Навести по пример (барем једне) функције:

(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (8 п.) Дефинисати појмове: (а) левог и десног извода функције у тачки. (б) непрекидности функције у тачки. (в) локалног минимума непрекидне функције.

Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.

3. (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницева формулу).

Задаци

1. (8 п.) Израчунати граничну вредност низа $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-1)}$.
2. (8 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^3-3}}$.
3. (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.
4. (8 п.) Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, dx$.

Биоматематика, јулски рок, 18.07.2014.

Теорија:

1. (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 3, Y\}$ и $B = \{2, X, Y\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и скуп $(A \times B) \cap (B \times A)$. Навести по пример (барем једне) функције:

(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.

Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (8 п.) Дефинисати појмове: (а) левог и десног извода функције у тачки. (б) непрекидности функције у тачки. (в) локалног минимума непрекидне функције.

Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.

3. (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

1. (8 п.) Израчунати граничну вредност низа $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-1)}$.
2. (8 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^3-3}}$.
3. (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.
4. (8 п.) Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, dx$.

Биоматематика, јунски рок, 28.06.2014.

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 9, c\}$ и $B = \{5, c\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и скуп $(A \times B) \cap (B \times A)$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) лимеса низа (б) непрекидности функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.
- (8 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- (8 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за све природне бројеве n важи : $7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
- (8 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{e^n((n+1)!)^2}$.
- (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}}$.
- (8 п.) Решити интеграл $\int \frac{1+\ln x}{x(\ln^4 x - 1)} dx$.

Биоматематика, јунски рок, 28.06.2014.

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 9, c\}$ и $B = \{5, c\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и скуп $(A \times B) \cap (B \times A)$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) лимеса низа (б) непрекидности функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.
- (8 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- (8 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за све природне бројеве n важи : $7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
- (8 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{e^n((n+1)!)^2}$.
- (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}}$.
- (8 п.) Решити интеграл $\int \frac{1+\ln x}{x(\ln^4 x - 1)} dx$.

Биоматематика, јунски рок, 28.06.2014.

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 9, c\}$ и $B = \{5, c\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и скуп $(A \times B) \cap (B \times A)$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !

2. (8 п.) Дефинисати појмове: (а) лimesа низа (б) непрекидности функције у тачки.

Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.

3. (8 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

1. (8 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за све природне бројеве n важи : $7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

2. (8 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{e^n((n+1)!)^2}$.

3. (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}}$.

4. (8 п.) Решити интеграл $\int \frac{1+\ln x}{x(\ln^4 x - 1)} dx$.

Биоматематика, други колоквијум, 19.06.2014.

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = \sin x$. Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати теорему о средњој вредности интеграла.

Задачи:

1. (4 п.) Одредити интервале монотоности, локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке функције $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$
2. (4 п.) Дата је функција $f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1}$. Одредити област дефинисаности функције и асимптоте графика дате функције.
3. Израчунати интеграле:

а) (4 п.) $\int (x^2 - 5x + 6) \cos 2x \, dx$

б) (3 п.) $\int_0^5 \sqrt{x+4} \, dx$

Биоматематика, други колоквијум, 19.06.2014.

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = \sin x$. Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати теорему о средњој вредности интеграла.

Задачи:

1. (4 п.) Одредити интервале монотоности, локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке функције $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$
2. (4 п.) Дата је функција $f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1}$. Одредити област дефинисаности функције и асимптоте графика дате функције.
3. Израчунати интеграле:

а) (4 п.) $\int (x^2 - 5x + 6) \cos 2x \, dx$

б) (3 п.) $\int_0^5 \sqrt{x+4} \, dx$

Биоматематика, други колоквијум, 19.06.2014.

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = \sin x$. Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати теорему о средњој вредности интеграла.

Задачи:

1. (4 п.) Одредити интервале монотоности, локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке функције $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$
2. (4 п.) Дата је функција $f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1}$. Одредити област дефинисаности функције и асимптоте графика дате функције.
3. Израчунати интеграле:

а) (4 п.) $\int (x^2 - 5x + 6) \cos 2x \, dx$

б) (3 п.) $\int_0^5 \sqrt{x+4} \, dx$

Биоматематика, први колоквијум, 10.05.2014.

Теорија:

- (4 п.) Нека су дати скупови: $A = \{5, a\}$ и $B = \{a, c, 5\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \longrightarrow B$, која је $'1 - 1'$, (б) $g: A \longrightarrow B$, која је $'на'$, (в) $h: A \longrightarrow A$ која је и $'1 - 1'$ и $'на'$.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (3 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 7 различитих тачака нагомилавања.
- (3 п.) Исказати Вајерштрасову теорему о екстремним вредностима непрекидне функције на сегменту. Да ли важе закључци теореме ако у њеном исказу заменимо сегмент $[a, b]$ са отвореним интервалом (a, b) ?

Задаци

- (3 п.) Доказати да за све природне бројеве n важи исказ: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
- (3 п.) Израчунати граничну вредност низа $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+6n}} \right)$.
- (3 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+2} \right)^{n\sqrt{n}}$.
- Дата је функција $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}, & x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & x < 0 \end{cases}$
 - (3 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида дате функције.
 - (3 п.) Израчунати извод дате функције.

Биоматематика, први колоквијум, 10.05.2014.

Теорија:

- (4 п.) Нека су дати скупови: $A = \{5, a\}$ и $B = \{a, c, 5\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \longrightarrow B$, која је $'1 - 1'$, (б) $g: A \longrightarrow B$, која је $'на'$, (в) $h: A \longrightarrow A$ која је и $'1 - 1'$ и $'на'$.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (3 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 7 различитих тачака нагомилавања.
- (3 п.) Исказати Вајерштрасову теорему о екстремним вредностима непрекидне функције на сегменту. Да ли важе закључци теореме ако у њеном исказу заменимо сегмент $[a, b]$ са отвореним интервалом (a, b) ?

Задаци

- (3 п.) Доказати да за све природне бројеве n важи исказ: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
- (3 п.) Израчунати граничну вредност низа $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+6n}} \right)$.
- (3 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+2} \right)^{n\sqrt{n}}$.
- Дата је функција $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}, & x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & x < 0 \end{cases}$
 - (3 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида дате функције.
 - (3 п.) Израчунати извод дате функције.

Биоматематика, септембарски рок, 09.09.2013.

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $C = \{X, Z\}$ и $D = \{1, 3, 6, 8\}$. Одредити Декартов производ скупова $C \times D$ и $D \times C$.
Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : C \longrightarrow D$, која је '1 - 1', (б) $g : C \longrightarrow D$, која је 'на', (в) $h : D \longrightarrow D$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) извода функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
- (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- (6 п.) Доказати да за све природне бројеве n важи исказ: $1 + 8 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- (9 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[4]{n^3 + 2n}}$.
- (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x^2-4}{1-x^2}$.
- (9 п.) Израчунати површину лика у равни, ограниченог кривама $y^2 = x$, $x - 2y = 3$

Биоматематика, јулски рок, 05.07.2013.

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 5, 8, 9\}$ и $B = \{X, Y\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g: A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) левог и десног извода функције у тачки. (б) извода функције у тачки.
(в) локалних екстрема непрекидне функције.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме (о потребним условима за егзистенцију локалног екстрема).
- (8 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- (8 п.) Одредити граничну вредност низа $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \right)$.
- (8 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!(4n+3)}{5^n((2n+1)!!)^2}$.
- (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.
- (8 п.) Решити интеграл $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{(1+x)^2}$.

Биоматематика, јулски рок, 05.07.2013.

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 5, 8, 9\}$ и $B = \{X, Y\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f: A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g: A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h: A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) левог и десног извода функције у тачки. (б) извода функције у тачки.
(в) локалних екстрема непрекидне функције.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме (о потребним условима за егзистенцију локалног екстрема).
- (8 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- (8 п.) Одредити граничну вредност низа $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \right)$.
- (8 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!(4n+3)}{5^n((2n+1)!!)^2}$.
- (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.
- (8 п.) Решити интеграл $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{(1+x)^2}$.

Биоматематика, јунски рок, 10.06.2013.

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 3\}$ и $B = \{a, c, e\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки (б) извода функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
- (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- (8 п.) Користећи математичку индукцију доказати да је $9 \mid 4^n + 15n - 1$.
- (8 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - 2}{3n^2 + n + 3} \right)^{n(n+1)}$.
- (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$.
- (8 п.) Решити интеграл $\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+1)^2} dx$

Биоматематика, јунски рок, 10.06.2013.

Теорија:

- (8 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 3\}$ и $B = \{a, c, e\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$. Навести по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (8 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки (б) извода функције у тачки.
Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
- (8 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

- (8 п.) Користећи математичку индукцију доказати да је $9 \mid 4^n + 15n - 1$.
- (8 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - 2}{3n^2 + n + 3} \right)^{n(n+1)}$.
- (12 п.) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$.
- (8 п.) Решити интеграл $\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+1)^2} dx$

Биоматематика, други колоквијум, 05.06.2013.

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = x^3$. Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

1. (4 п.) Одредити интервале монотоности, локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке функције $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$.
2. (4 п.) Дата је функција $f(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}$. Одредити област дефинисаности функције и асимптоте графика дате функције.
3. Израчунати интеграле:

а) (3 п.) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx$

б) (4 п.) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

Биоматематика, други колоквијум, 05.06.2013.

Теорија:

1. (3 п.) Дефинисати појам извода функције у тачки, а затим из дефиниције извода израчунати извод функције $f(x) = x^3$. Навести основна алгебарска својства извода.
2. (3 п.) Формулисати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме о средњој вредности.
3. (4 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).

Задаци

1. (4 п.) Одредити интервале монотоности, локалне екстремуме, интервале закривљености и превојне тачке функције $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$.
2. (4 п.) Дата је функција $f(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}$. Одредити област дефинисаности функције и асимптоте графика дате функције.
3. Израчунати интеграле:

а) (3 п.) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx$

б) (4 п.) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

Биоматематика, први колоквијум, 24.04.2013.

Теорија:

1. (4 п.) Објаснити појмове: Функција, инверзна функција, композиција функција, релација и релација еквиваленције.
2. (2 п.) Дефинисати појам реда. Када геометријски ред конвергира ?
3. (4 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) функције. Навести локална својства непрекидних функција у тачки, формулисати и доказати Болцано - Кошијеву теорему.

Задаци

1. (3 п.) Доказати да за све природне бројеве n , $n \geq 2$ важи исказ: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.
2. (4 п.) Израчунати граничну вредност $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1}+1}{\sqrt{n^3+1}-1} \right)^{1-n^2}$.
3. (4 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{4^n n^2}$.
4. (4 п.) Одредити реалан број A тако да функција $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin 4x}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{e^{\frac{x}{4}}-1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ буде непрекидна.

Биоматематика, први колоквијум, 24.04.2013.

Теорија:

1. (4 п.) Објаснити појмове: Функција, инверзна функција, композиција функција, релација и релација еквиваленције.
2. (2 п.) Дефинисати појам реда. Када геометријски ред конвергира ?
3. (4 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) функције. Навести локална својства непрекидних функција у тачки, формулисати и доказати Болцано - Кошијеву теорему.

Задаци

1. (3 п.) Доказати да за све природне бројеве n , $n \geq 2$ важи исказ: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.
2. (4 п.) Израчунати граничну вредност $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1}+1}{\sqrt{n^3+1}-1} \right)^{1-n^2}$.
3. (4 п.) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{4^n n^2}$.
4. (4 п.) Одредити реалан број A тако да функција $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin 4x}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{e^{\frac{x}{4}}-1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ буде непрекидна.