

7. домаћи

1. Нека је дат скуп $X = (0, \infty)$ и нека су $A = [1, 4)$ и $B = (2, 7)$ његови подскупови и нека је $\mathfrak{M}$ минимална σ -алгебра над X која садржи скупове A и B . Нека је дефинисана функција $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$\mu(E) = \begin{cases} \infty, & 3 \in E, \\ 10, & 2 \in E, 3 \notin E, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказати да је μ мера.

2. Нека су $\mu_1, \dots, \mu_n : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ мере на σ -алгебри и нека су $c_1, \dots, c_n > 0$ произвољне константе.

а) Доказати да је тада са $\mu(E) = c_1\mu_1(E) + \dots + c_n\mu_n(E)$, за све $E \in \mathfrak{M}$, дефинисана мера на σ -алгебри $\mathfrak{M}$.

б) Објаснити да ли μ мора бити мера ако је бар једна константа c_i негативан број.

в) Нека су $\delta_{\{1\}}$ и $\delta_{\{4\}}$ Диракове мере на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Показати да је тада $\mu = 3\delta_{\{1\}} + 7\delta_{\{4\}}$ једна мера на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

г) Наћи бар један скуп $E \subset \mathbb{R}$ тако да је $\mu(E) = 10$, где је мера μ дефинисана у делу под в).

3. Нека је $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ мера на σ -алгебри $\mathfrak{M}$ и нека је $A \subset \mathfrak{M}$ произвољан скуп. Показати да је тада са $\tilde{\mu}(E) = \mu(E \cap A)$ дефинисана још једна мера на $\mathfrak{M}$.

4. Нека је дата σ -алгебра $\mathfrak{M}$ над неким скупом X , нека је $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ мера. Нека су $E_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$, произвољни скупови тако да је $\mu(E_i \cap E_j) = 0$.

а) Доказати да важи $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

б) Дати пример мере μ , σ -алгебре $\mathfrak{M}$ и скупова $E_n \in \mathfrak{M}$ где важи $\mu(E_i \cap E_j) = 0$, али скупови E_n нису дисјунктни.